

Limite $1/R_0 \ll q \ll R_0/\xi_0^2$

Le déplacement Doppler est négligeable devant le déplacement dû aux interactions.

Il est alors légitime de négliger le mouvement des atomes lié à leur confinement spatial dans le volume de piégeage de rayon de l'ordre de R_0 .

Approximation de densité locale

Le condensat est considéré comme une juxtaposition de condensats localement homogènes et au repos.

En chaque point \vec{r} , on peut considérer un condensat homogène de densité $\rho(\vec{r})$, dont les facteurs de structure dynamique et statique sont donnés par les expressions établies au chapitre précédent.

Facteur de structure dynamique à l'approximation de densité locale

$$S_{LDA}(\vec{q}, \omega) = \int d^3r \rho(\vec{r}) \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B(\vec{r})} \delta[\omega - \omega_q^B(\vec{r})]$$

$$\omega_q^0 = \hbar q^2 / 2m$$

$$\omega_q^B(\vec{r}) = \sqrt{\omega_q^0 \left[\omega_q^0 + \frac{2g\rho(\vec{r})}{\hbar} \right]}$$

Le passage des variables x, y, z aux variables $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ donne, compte tenu de $N = 8\pi \rho_0 x_0 y_0 z_0 / 15$ (voir T-93) :

$$S_{LDA}(\vec{q}, \omega) = N \frac{15}{2} \int_0^1 d\tilde{r} \tilde{r}^2 (1 - \tilde{r}^2) \times \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B(\tilde{r})} \delta[\omega - \omega_q^B(\tilde{r})]$$

$$\omega_q^B(\tilde{r}) = \sqrt{\omega_q^0 \left[\omega_q^0 + 2\tilde{\mu} (1 - \tilde{r}^2) \right]}$$

$$\tilde{\mu} = \mu / \hbar = g\rho_0 / \hbar$$

Calcul de $S_{LDA}(\vec{q}, \omega)$

Posons : $\omega_q^B(\tilde{r}) = \Omega(\tilde{r})$ et effectuons le changement de variables $\tilde{r} \rightarrow \Omega$. Il vient

$$\Omega^2 = \omega_q^0 \left[\omega_q^0 + 2\tilde{\mu}(1 - \tilde{r}^2) \right]$$

$$\Omega d\Omega = -2\tilde{\mu}\omega_q^0 \tilde{r} d\tilde{r} \quad 1 - \tilde{r}^2 = \frac{\Omega^2 - (\omega_q^0)^2}{2\tilde{\mu}\omega_q^0}$$

Quand \tilde{r} varie de 0 à 1, Ω varie de

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_q^0 (\omega_q^0 + 2\tilde{\mu})} \quad \text{à} \quad \omega_{\min} = \omega_q^0$$

$$S_{LDA}(\vec{q}, \omega) = N \frac{15}{8} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} d\Omega \times$$

$$\frac{\Omega^2 - (\omega_q^0)^2}{\tilde{\mu}^2 \omega_q^0} \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 - (\omega_q^0)^2}{2\tilde{\mu}\omega_q^0}} \delta(\omega - \Omega)$$

$$S_{LDA}(\vec{q}, \omega) = \frac{15N}{4\tilde{\mu}} \frac{\omega^2 - \omega_{\min}^2}{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2} \sqrt{\frac{\omega_{\max}^2 - \omega^2}{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}}$$

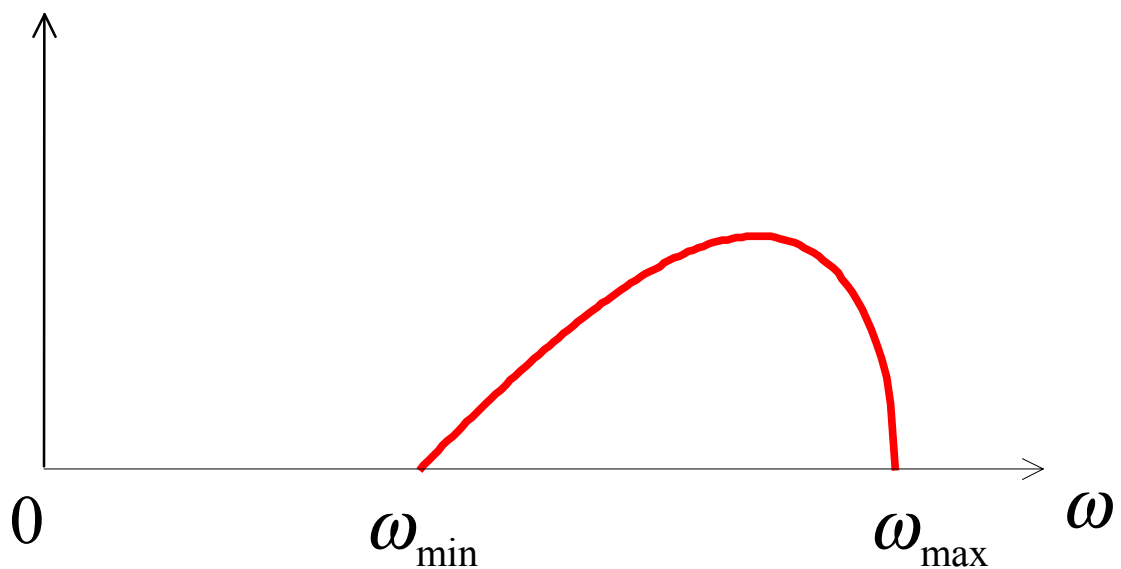
Propriétés de $S_{LDA}(\vec{q}, \omega)$

- Homogène à l'inverse d'une fréquence.
- Proportionnel au nombre d'atomes N
- Ne dépend pas de la direction de \vec{q} même si le piège est anisotrope
- N'est différent de 0 que pour

$$\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$$

- Forme asymétrique

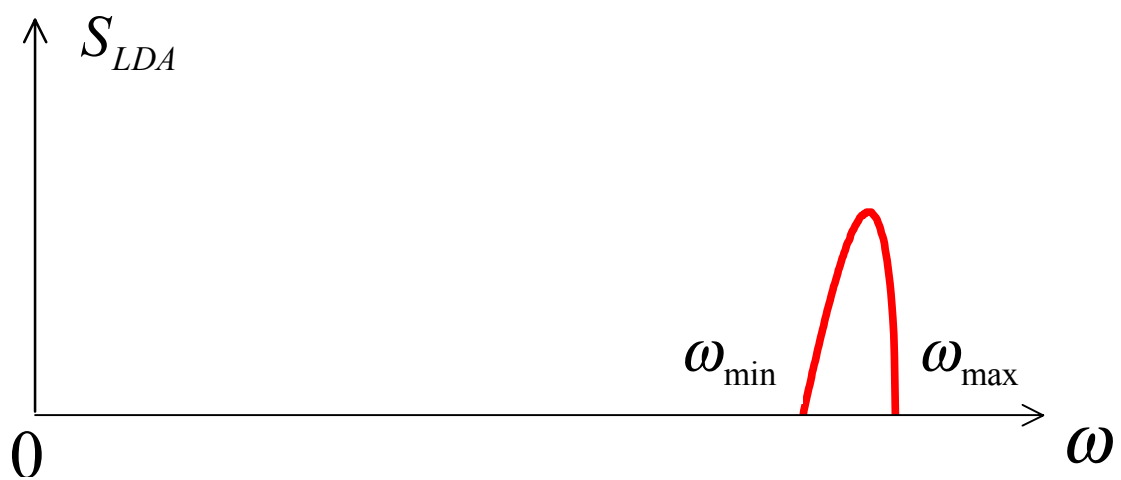
$$S_{LDA}(\vec{q}, \omega)$$



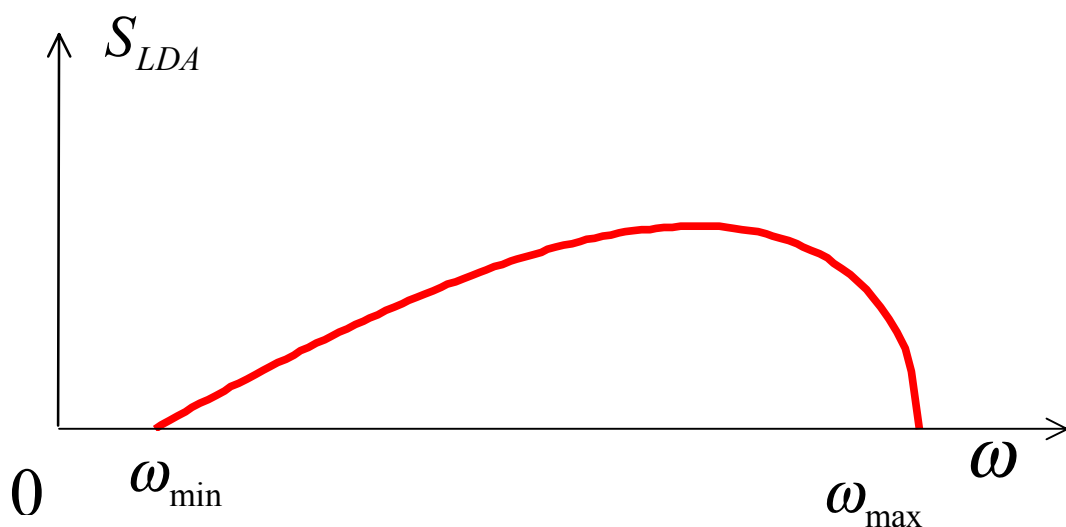
Limites $\omega_q^0 \gg \tilde{\mu}$ et $\omega_q^0 \ll \tilde{\mu}$

$$\frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{\omega_{\min}^2} = \frac{2\tilde{\mu}\omega_q^0}{\omega_{\min}^2} = 2\frac{\tilde{\mu}}{\omega_q^0}$$

$\omega_q^0 \gg \tilde{\mu}$ La largeur du spectre est très petite devant l'abscisse de son barycentre



$\omega_q^0 \ll \tilde{\mu}$ La largeur du spectre est de l'ordre de l'abscisse de son barycentre



Autre écriture de $S_{LDA}(\vec{q}, \omega)$

Posons :

$$\frac{\omega^2 - \omega_{\min}^2}{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2} = u$$

On a alors :

$$\frac{\omega_{\max}^2 - \omega^2}{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2} = 1 - u$$

$$S_{LDA}(\vec{q}, \omega) = \frac{15N}{4\tilde{\mu}} u \sqrt{1-u}$$

Quand ω varie de ω_{\min} à ω_{\max} , u varie de 0 à 1.

Autres relations utiles.

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_{\min}^2 + (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2)u \\ &= (\omega_q^0)^2 + 2\tilde{\mu}\omega_q^0 u\end{aligned}$$

$$\omega^2 = (\omega_q^0)^2 [1 + \alpha]u$$

avec

$$\alpha = 2\tilde{\mu} / \omega_q^0$$

Facteur de structure statique à l'approximation de densité locale

$$S_{LDA}(\vec{q}) = \frac{1}{N} \int d\omega S_{LDA}(\vec{q}, \omega)$$

$$S_{LDA}(\vec{q}, \omega) = \frac{15N}{4\tilde{\mu}} u \sqrt{1-u}$$

$$\omega^2 = (\omega_q^0)^2 [1 + \alpha u] \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{2\tilde{\mu}}{\omega_q^0}$$

$$2\omega d\omega = \alpha (\omega_q^0)^2 du$$

$$d\omega = \alpha \frac{(\omega_q^0)^2}{2\omega} du = \alpha \omega_q^0 \frac{1}{2\sqrt{1+\alpha u}} du$$

$$S_{LDA}(\vec{q}) = \frac{15}{4} \int_0^1 du \frac{u \sqrt{1-u}}{\sqrt{1+\alpha u}}$$

$S_{LDA}(\vec{q})$ ne dépend de q que par l'intermédiaire de

$$\alpha = \frac{2\tilde{\mu}}{\omega_q^0} = \frac{4m\tilde{\mu}}{\hbar q^2}$$

Facteur de structure statique $S_{LDA}(\vec{q})$

à la limite $\omega_q^0 \gg \tilde{\mu}$

On a alors $\alpha \ll 1$ et par suite

$$\sqrt{1 + \alpha u} \simeq 1 + (\alpha/2)u$$

$$\begin{aligned} S_{LDA}(\vec{q}) &\simeq \frac{15}{4} \int_0^1 du \frac{u\sqrt{1-u}}{1 + (\alpha/2)u} \\ &\simeq \frac{15}{4} \int_0^1 du \left[u\sqrt{1-u} - (\alpha/2)u^2\sqrt{1-u} \right] \end{aligned}$$

Des intégrations par parties donnent :

$$\int_0^1 du u \sqrt{1-u} = 4/15$$

$$\int_0^1 du u^2 \sqrt{1-u} = 16/105$$

de sorte que

$$S_{LDA}(\vec{q}) \simeq \frac{15}{4} \left[\frac{4}{15} - \frac{\alpha}{2} \frac{16}{105} \right] = 1 - \frac{4}{7} \frac{\tilde{\mu}}{\omega_q^0}$$

$$\tilde{\mu} \ll \omega_q^0 \quad \Rightarrow \quad S_{LDA}(\vec{q}) \simeq 1 - \frac{4}{7} \frac{\tilde{\mu}}{\omega_q^0}$$

Barycentre du spectre

à la limite $\omega_q^0 \gg \tilde{\mu}$

D'après (T-47), $\langle \omega \rangle = m_1(\vec{q}) / m_0(\vec{q})$

Par, ailleurs, d'après (T-43) et (T-46)

$$m_0(\vec{q}) = N S(\vec{q})$$

$$m_1(\vec{q}) = N \hbar q^2 / 2m = N \omega_q^0$$

En remplaçant $S(\vec{q})$ par l'expression de $S_{LDA}(\vec{q})$ trouvée plus haut, on obtient :

$$\langle \omega \rangle = \frac{\omega_q^0}{1 - \frac{4}{7} \frac{\tilde{\mu}}{\omega_q^0}} \simeq \omega_q^0 \left[1 + \frac{4}{7} \frac{\tilde{\mu}}{\omega_q^0} \right] = \omega_q^0 + \frac{4}{7} \tilde{\mu}$$

Pour un condensat homogène dont la densité spatiale serait égale à la densité ρ_0 au centre du piège, on aurait (voir T-61) :

$$\langle \omega \rangle = \omega_q^B \underset{\omega_q^0 \gg \tilde{\mu}}{\simeq} \omega_q^0 + g \rho_0 / \hbar = \omega_q^0 + \tilde{\mu}$$

Le facteur 4/7 trouvé plus haut provient de la moyenne spatiale de ρ inférieure à ρ_0 .

Largeur du spectre

à la limite $\omega_q^0 \gg \tilde{\mu}$

De l'ordre de $\omega_{\max} - \omega_{\min}$ (voir première figure de T-111)

Or, d'après (T-109), quand $\omega_q^0 \gg \tilde{\mu}$,

$$\omega_{\max} - \omega_{\min} \simeq \omega_q^0 + \tilde{\mu} - \omega_q^0 = \tilde{\mu}$$

La largeur du spectre est donc de l'ordre de $\tilde{\mu}$. Un calcul plus précis du second moment de ω est possible à partir de l'expression de $S_{LDA}(\vec{q}, \omega)$ et donne :

$$\Delta\omega = \sqrt{8/147} \tilde{\mu}$$

Finalem^{ent}, par rapport à un condensat homogène, l'inhomogénéité spatiale de la densité spatiale $\rho(\vec{r})$ conduit à un spectre qui n'est pas infiniment étroit, mais qui a une largeur de l'ordre de $\tilde{\mu}$. De plus, le déplacement du barycentre par rapport à ω_q^0 est inférieur à la valeur $\tilde{\mu}$ obtenue pour la valeur maximale ρ_0 de ρ .

Facteur de structure statique $S_{LDA}(\vec{q})$

à la limite $\omega_q^0 \ll \tilde{\mu}$

On a alors $\alpha \gg 1$ et par suite

$$\sqrt{1 + \alpha u} \simeq \sqrt{\alpha u}$$

$$\begin{aligned} S_{LDA}(\vec{q}) &\simeq \frac{15}{4} \int_0^1 du \frac{u \sqrt{1-u}}{\sqrt{\alpha u}} \\ &\simeq \frac{15}{4\sqrt{\alpha}} \int_0^1 du \sqrt{u(1-u)} \end{aligned}$$

Un changement de variables $u = \cos^2 \theta$ et une intégration par parties permet d'obtenir

$$\int_0^1 du \sqrt{u(1-u)} = \pi / 8$$

de sorte que l'on obtient finalement

$$S_{LDA}(\vec{q}) \simeq \frac{15}{4} \frac{\hbar q}{2m} \sqrt{\frac{m}{\mu}} \frac{\pi}{8} = \frac{\hbar q}{2m \bar{c}}$$

où

$$\bar{c} = \frac{32}{15\pi} \sqrt{\frac{\mu}{m}} = \frac{32}{15\pi} c < c$$

Barycentre du spectre ($\omega_q^0 \ll \bar{\mu}$)

La même méthode de calcul donne :

$$\langle \omega \rangle = \frac{m_1(\vec{q})}{m_0(\vec{q})} = \frac{\omega_q^0}{S_{LDA}(\vec{q})} = \bar{c}q$$

Pour un condensat homogène dont la densité spatiale serait égale à la densité ρ_0 au centre du piège, on aurait (voir T-60) :

$$\langle \omega \rangle = \omega_q^B \underset{\omega_q^0 \ll \bar{\mu}}{\simeq} cq$$

La moyenne spatiale de ρ est inférieure à ρ_0 dans un piège inhomogène, d'où le facteur $32/15\pi$ de réduction de \bar{c} par rapport à c .

Largeur du spectre

La deuxième figure de T-111 montre que cette largeur est de l'ordre de l'abscisse du barycentre, c'est à dire de l'ordre de $\bar{c}q$.

Récapitulation des résultats pour un condensat inhomogène

Par rapport à un condensat homogène, le spectre de diffusion a une largeur non nulle.

1. Pour les très grandes valeurs de q

($q \gg q_D$) le spectre est essentiellement un spectre Doppler.

Le rayon fini R_0 du condensat entraîne une dispersion de vitesses liée au confinement spatial et donc un élargissement Doppler.

La vitesse moyenne est par contre nulle et le barycentre du spectre n'est pas déplacé par rapport à la fréquence de recul ω_q^0 .

2. Pour des valeurs plus faibles de q

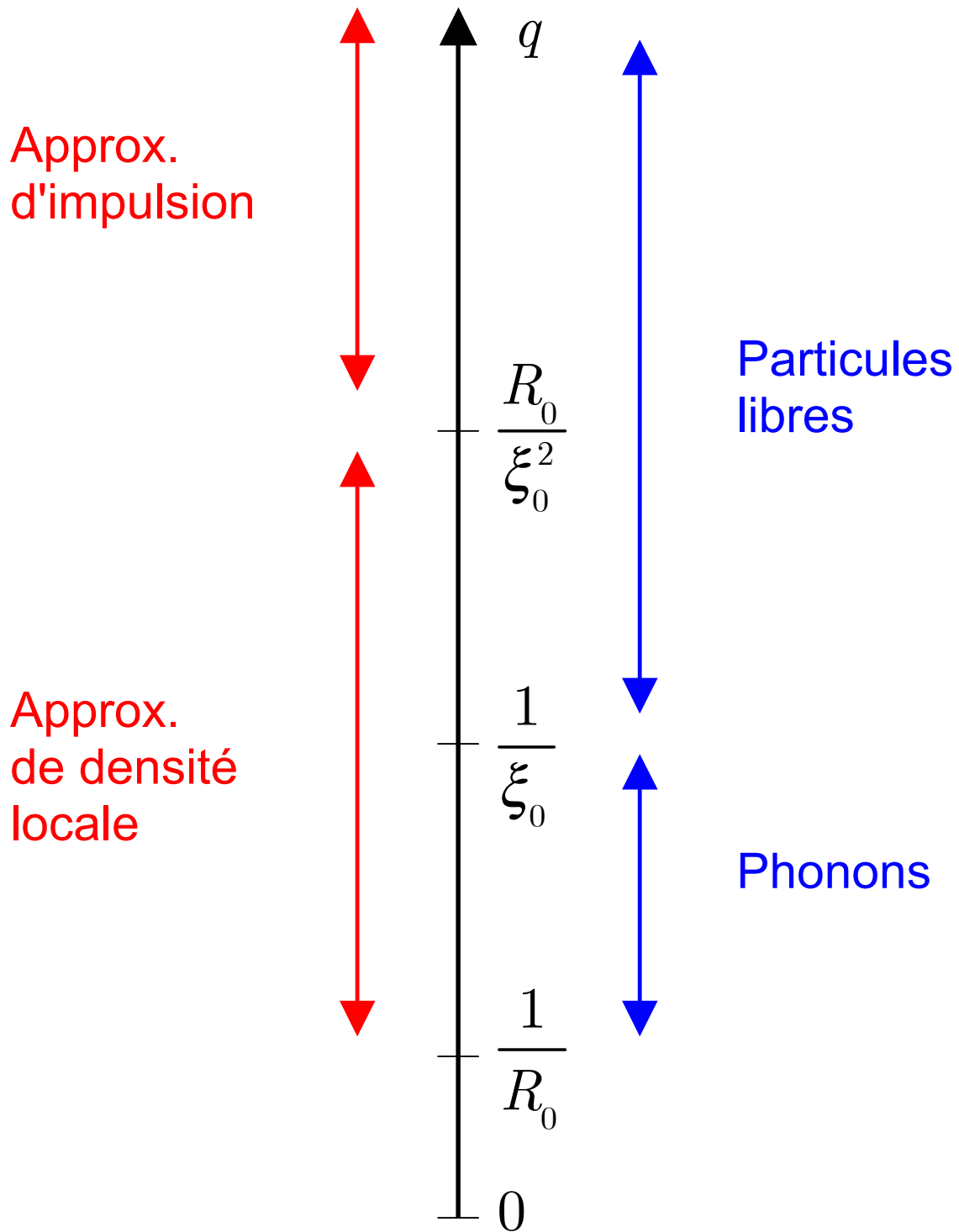
($1 / R_0 \ll q \ll q_D$), la forme du spectre est essentiellement déterminée par les interactions.

Chaque zone du condensat est le siège d'excitations élémentaires dont la fréquence dépend de la densité spatiale au point considéré.

L'inhomogénéité spatiale de la densité d'atomes entraîne une inhomogénéité spatiale de la fréquence du spectre correspondant aux diverses zones du condensat.

Le barycentre du spectre est donné par la moyenne spatiale de ces fréquences, la largeur du spectre par la dispersion de ces fréquences autour de la valeur moyenne.

Récapitulation des approximations



Etude du domaine $q \simeq q_D = \frac{R_0}{\xi_0^2}$

La largeur Doppler et la largeur due aux interactions sont du même ordre de grandeur.

Situation rencontrée expérimentalement.

Les approximations d'impulsion et de densité locale sont inapplicables car elles négligent l'un ou l'autre effet.

2 méthodes

- Etude des moments d'ordre 1 et 2 du spectre de diffusion à partir d'un Hamiltonien approché décrivant les excitations élémentaires (réf.12)
- Approximation eikonale effectuée sur une expression du spectre déduite de la généralisation du traitement de Bogolubov à un condensat inhomogène (réf.9).

Seule, la 1ère méthode sera présentée ici.
Méthode des moments

Fonction d'onde de l'état fondamental

Solution de l'équation de G-P

Fonctions propres $\psi_0(\vec{r})$ du
"Hamiltonien" \hat{H}_0

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}) + g\rho(\hat{r})$$

$$\rho(\hat{r}) = N |\psi_0(\hat{r})|^2$$

Excitations élémentaires

La condition $q \simeq q_D$ implique $q \gg 1/\xi_0$
puisque $q_D \gg 1/\xi_0$.

On a donc $\hbar\omega_q^0 \gg \mu$ et les excitations
élémentaires sont de type particule libre.

Si $\rho(\vec{r})$ était uniforme et égal à ρ_0 , les
énergies de ces excitations élémentaires
seraient égales aux valeurs propres de \hat{H}_0
augmentées de $g\rho_0$ (voir T-61)

Hamiltonien approché décrivant les excitations élémentaires

Dans l'esprit de l'approximation de densité locale, il semble raisonnable d'ajouter à \hat{H}_0 la perturbation $g\rho(\hat{\vec{r}})$ dépendant maintenant de $\hat{\vec{r}}$ pour décrire l'effet des interactions.

Par contre, on ne néglige pas le terme d'énergie cinétique $\hat{p}^2 / 2m$ pour garder dans la théorie l'effet du mouvement des atomes.

L'hamiltonien approché \hat{H}_{exc} utilisé pour décrire les excitations est donc

$$\hat{H}_{\text{exc}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{\vec{r}}) + 2g\rho(\hat{\vec{r}})$$

avec toujours $\rho(\vec{r}) = N |\psi_0(\vec{r})|^2$

$\psi_0(\vec{r})$ étant la solution de l'équation G-P.

Poids de la transition reliant

ψ_0 à l'état excité ψ_f

Utilisant l'expression de $\hat{\rho}_{\vec{q}}$ en première quantification

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{i=1}^N e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}_i}$$

On trouve que ce poids est proportionnel à

$$\left| \langle \psi_f | e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}} | \psi_0 \rangle \right|^2$$

Moment d'ordre k de l'énergie E_f de l'état excité ψ_f

$$\begin{aligned} m_k(E_f) &= \sum_f E_f^k \left| \langle \psi_f | e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}} | \psi_0 \rangle \right|^2 \\ &= \sum_f \left| \langle \psi_0 | e^{-i\vec{q}\cdot\hat{r}} | \psi_f \rangle \langle \psi_f | e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}} | \psi_0 \rangle \right| E_f^k \\ &= \langle \psi_0 | e^{-i\vec{q}\cdot\hat{r}} \left(\hat{H}_{\text{exc}} \right)^k e^{+i\vec{q}\cdot\hat{r}} | \psi_0 \rangle \end{aligned}$$

On a utilisé

$$\hat{H}_{\text{exc}} | \psi_f \rangle = E_f | \psi_f \rangle$$

Calcul de $e^{-i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}}\hat{H}_{\text{exc}}e^{i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}}$

Le seul terme de \hat{H}_{exc} qui ne commute pas avec $\hat{\vec{r}}$ est le terme d'énergie cinétique. En utilisant les relations de commutations entre $\hat{\vec{p}}$ et $\hat{\vec{r}}$, on obtient

$$\begin{aligned}e^{-i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}}\hat{\vec{p}}e^{i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}} &= \hat{\vec{p}} + e^{-i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}}\left[\hat{\vec{p}}, e^{i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}}\right] \\ &= \hat{\vec{p}} + \hbar\vec{q}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{-i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}}\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}e^{i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}} &= \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}} + \hbar\vec{q}\right]^2 \\ &= \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + \frac{\hbar^2q^2}{2m} + \hbar\vec{q}\cdot\frac{\hat{\vec{p}}}{m}\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}e^{-i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}}\hat{H}_{\text{exc}}e^{i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}} &= \hat{H}_0 + g\rho(\hat{\vec{r}}) \\ &\quad + \frac{\hbar^2q^2}{2m} + \hbar\vec{q}\cdot\frac{\hat{\vec{p}}}{m}\end{aligned}$$

Moment d'ordre 1 de l'énergie

$E_f - E_0$ de la transition $\psi_0 \leftrightarrow \psi_f$

$$m_1(E_f - E_0) = m_1(E_f) - m_1(E_0)$$

$$\begin{aligned} m_1(E_f) &= \langle \psi_0 | e^{-i\vec{q}\cdot\hat{r}} \hat{H}_{\text{exc}} e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}} | \psi_0 \rangle \\ &= E_0 + \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \langle g \rho(\hat{r}) \rangle + \left\langle \hbar \vec{q} \cdot \frac{\hat{p}}{m} \right\rangle \end{aligned}$$

Les symboles $\langle \rangle$ signifient valeur moyenne dans l'état ψ_0 . Comme $\langle \hat{p} \rangle = \vec{0}$ le dernier terme est nul

$$m_1(E_f) = E_0 + \hbar^2 q^2 / 2m + \langle g \rho(\hat{r}) \rangle$$

$$m_1(E_0) = \sum_f E_0 \left| \langle \psi_f | e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}} | \psi_0 \rangle \right|^2 = E_0$$

$$m_1(E_f - E_0) = \hbar^2 q^2 / 2m + \langle g \rho(\hat{r}) \rangle$$

$\hbar^2 q^2 / 2m =$ Energie de recul

$\langle g \rho(\hat{r}) \rangle =$ Moyenne spatiale dans ψ_0 du déplacement dû aux interactions.

Moment d'ordre 2 de l'énergie $E_f - E_0$ de la transition $\psi_0 \leftrightarrow \psi_f$

$$\begin{aligned} m_2(E_f - E_0) &= \sum_f (E_f - E_0)^2 \left| \langle \psi_f | e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}} | \psi_0 \rangle \right|^2 \\ &= m_2(E_f) + E_0^2 - 2E_0 m_1(E_f) \end{aligned}$$

Calcul de $m_2(E_f)$

$$\begin{aligned} m_2(E_f) &= \langle \psi_0 | e^{-i\vec{q}\cdot\hat{r}} \hat{H}_{\text{exc}}^2 e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}} | \psi_0 \rangle \\ &= \langle \psi_0 | \left[e^{-i\vec{q}\cdot\hat{r}} \hat{H}_{\text{exc}} e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}} \right]^2 | \psi_0 \rangle \end{aligned}$$

Utilisons les résultats de T-126 pour

$$e^{-i\vec{q}\cdot\hat{r}} \hat{H}_{\text{exc}} e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}}$$

Par ailleurs, comme ψ_0 a une parité bien définie, les valeurs moyennes dans ψ_0 de tous les termes linéaires en \hat{p} (termes impairs) sont nulles.

Expression de $m_2(E_f)$

$$m_2(E_f) = \left(E_0 + \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \right)^2 + g^2 \left\langle \left[\rho(\hat{r}) \right]^2 \right\rangle \\ + \left\langle \left[\hbar \vec{q} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \right]^2 \right\rangle + 2 \left(E_0 + \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \right) \left\langle g \rho(\hat{r}) \right\rangle$$

Par ailleurs, d'après (T-127)

$$2E_0 m_1(E_f) = 2E_0 \left(E_0 + \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \right) + 2E_0 \left\langle g \rho(\hat{r}) \right\rangle$$

Expression de $m_2(E_f - E_0)$

$$m_2(E_f - E_0) = m_2(E_f) + E_0^2 - 2E_0 m_1(E_f) \\ = \frac{\hbar^4 q^4}{4m^2} + g^2 \left\langle \left[\rho(\hat{r}) \right]^2 \right\rangle + \left\langle \left[\hbar \vec{q} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \right]^2 \right\rangle \\ + 2 \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \left\langle g \rho(\hat{r}) \right\rangle$$

Variance de $E_f - E_0$

$$\left[\Delta(E_f - E_0) \right]^2 = m_2(E_f - E_0) - \left[m_1(E_f - E_0) \right]^2$$

D'après (T-127)

$$\begin{aligned} \left[m_1(E_f - E_0) \right]^2 &= \frac{\hbar^4 q^4}{4m^2} + \left[\langle g\rho(\hat{r}) \rangle \right]^2 \\ &\quad + 2 \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \langle g\rho(\hat{r}) \rangle \end{aligned}$$

On en déduit finalement, compte tenu de T-129

$$\begin{aligned} \left[\Delta(E_f - E_0) \right]^2 &= g^2 \left\{ \left\langle \left[\rho(\hat{r}) \right]^2 \right\rangle - \left[\langle \rho(\hat{r}) \rangle \right]^2 \right\} \\ &\quad + \hbar^2 \left\langle \left[\vec{q} \cdot \frac{\hat{p}}{m} \right]^2 \right\rangle \end{aligned}$$

1^{ère} ligne : Carré de la dispersion des déplacements dûs aux interactions.

2^{ème} ligne : Carré de l'élargissement Doppler

Conclusion de l'approche utilisant la méthode des moments

Dans la région $q \approx q_D$ où l'effet Doppler et l'effet des interactions sont comparables, il est légitime :

- D'ajouter les déplacements moyens du spectre dûs à chacun des 2 effets. En fait, le déplacement Doppler moyen est nul.
- D'ajouter les carrés des largeurs spectrales dues à chacun des 2 effets.

La largeur Doppler et la largeur due aux interactions s'ajoutent quadratiquement.

Références (reprise et suite de T-106)

9. F. Zambelli, L. Pitaevskii, D.M. Stamper-Kurn, S. Stringari, Phys.Rev. **A61**, 063608 (2000).
10. P. Hohenberg, P.Platzman, Phys.Rev. **152**, 198 (1966).
11. P. Platzman, N.Tzoar, Phys.Rev. **139**, A410, (1965).
12. W. Ketterle, Spinor Condensates and Light Scattering from Bose-Einstein Condensates, in Les Houches Summer School 1999, Session LXXII, eds. R.Kaiser, C. Westbrook (cond-mat/0005001)