Appendice sur la superradiance

Emission spontanée collective d'un système de N atomes à 2 niveaux e, g .

Au lieu d'avoir une décroissance exponentielle de la population de l'état excité, comme c'est le cas s'il y a un seul atome, on a une décroissance de plus en plus rapide, due à une mise en phase des dipôles atomiques qui rayonnent de plus en plus efficacement.

Modèle initial de Dicke

N atomes dans un volume d'extension spatiale petite devant la longueur d'onde λ de la transition $e \leftrightarrow g$.

Modèle un peu plus élaboré

N atomes dans un volume très allongé en forme de cigare le long de z

Modèle simplifié de Dicke

N atomes dans un volume d'extension spatiale petite devant λ .

Si l'on part à $t = 0$ d'un état où les N atomes sont tous dans l'état excité e , on peut montrer que le problème est équivalent à celui de l'émission spontanée pour un moment cinétique $J = N/2$ partant de $M = J$.

Spin fictif associé à l'atome

A tout système à 2 niveaux e, g, on peut associer un spin fictif $1/2$

$$|e\rangle \leftrightarrow |+\rangle \qquad |g\rangle \leftrightarrow |-\rangle$$

$$|e\rangle\langle g| = \hat{S}_+ \qquad |g\rangle\langle e| = \hat{S}_-$$

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2}\left[|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|\right]$$

$$\left[\hat{S}_+, \hat{S}_-\right] = 2\,\hat{S}_z$$

Hamiltonien d'interaction de l'atome avec le champ du vide

$$\hat{H}_I = \sum_\alpha g_\alpha \left(\hat{S}_+ \hat{b}_\alpha + \hat{S}_- \hat{b}_\alpha^+ \right)$$

$\hat{b}_\alpha \left(\hat{b}_\alpha^+ \right)$ opérateur d'annihilation (de création) d'un photon du mode α.

g_α : constante de couplage.

On a remplacé tous les $e^{\pm i \vec{k} \cdot \vec{r}}$ apparaissant dans H_I par 1 car l'atome est supposé dans un petit volume autour de l'origine : $k\, r \ll 1$ pour tous les modes de fréquence voisine de celle de la transition $e \leftrightarrow g$.

Moment cinétique $\vec{J}$ associé aux N atomes

Atome i : $\hat{S}_{+i}, \hat{S}_{-i}, \hat{S}_{zi}$ $\quad \hat{\vec{S}}_i$

$$\hat{\vec{J}} = \sum_{i=1}^{N} \hat{\vec{S}}_i$$

Somme de N spins ½ .

La valeur maximale du nombre quantique J est $N/2$.

Hamiltonien d'interaction des N atomes avec le champ du vide

Pour tous les atomes $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} \simeq 1$

$$\hat{H}_{I\,i} = \sum_{\alpha} g_\alpha \left[\hat{S}_{+i}\hat{b}_\alpha + \hat{S}_{-i}\hat{b}^+_\alpha \right]$$

$$\hat{H}_I = \sum_{i=1}^{N} \hat{H}_{I\,i}$$

$$= \sum_{\alpha} g_\alpha \left[\left(\sum_i \hat{S}_{+i} \right) \hat{b}_\alpha + \left(\sum_i \hat{S}_{-i} \right) \hat{b}^+_\alpha \right]$$

$$= \sum_{\alpha} g_\alpha \left[\hat{J}_+ \hat{b}_\alpha + \hat{J}_- \hat{b}^+_\alpha \right]$$

Etat initial

$$\left|\psi(0)\right\rangle = \left|1e, 2e, 3e, \ldots ie \ldots Ne\right\rangle$$

Tous les atomes excités dans l'état e.

En termes de spin fictif

$$\left|\psi(0)\right\rangle = \left|1+, 2+, 3+, \ldots i+ \ldots N+\right\rangle$$

Etat complètement symétrique avec les valeurs maximales de J et M quand on additionne N spins ½.

$$\left|\psi(0)\right\rangle = \left|J = N/2,\ M = N/2\right\rangle$$

Evolution temporelle

- On part à $t = 0$ d'un état complètement symétrique

$$\left|\psi(0)\right\rangle = \left|J = N/2,\, M = N/2\right\rangle$$

- L'hamiltonien d'interaction H_I, de même que l'hamiltonien propre $\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 \sum_i \hat{S}_{zi} = \hbar\omega_0 \hat{J}_z$, sont eux aussi complètement symétriques.

- L'évolution du système se fera donc à l'intérieur du sous-espace $\{|J,M\rangle\}$ avec $J = N/2$, M variant de $-N/2$ à $+N/2$, dont tous les états sont complètement symétriques (action répétée de $\hat{J}_-$ sur $\left|J = N/2,\, M = N/2\right\rangle$).

- Le problème étudié ici est donc équivalent à celui de l'émission spontanée d'un moment cinétique $J = N/2$ partant de $M = N/2$

Généralisation à des atomes dans un volume en forme de cigare

Les interactions prépondérantes se feront avec les modes du champ de vecteur d'onde parallèle à l'axe z du volume en forme de cigare.

$$\hat{H}_I = \sum_\alpha g_\alpha \sum_i \left[e^{ikz_i} \hat{S}_{+i} \hat{b}_\alpha + e^{-ikz_i} \hat{S}_{-i} \hat{b}_\alpha^+ \right]$$

Posons alors

$$\hat{\tilde{S}}_{+i} = \hat{S}_{+i} e^{ikz_i} \qquad \hat{\tilde{S}}_{-i} = \hat{S}_{-i} e^{-ikz_i}$$

On a toujours les relations

$$\left[\hat{\tilde{S}}_{+i}, \hat{\tilde{S}}_{-i} \right] = 2 \hat{\tilde{S}}_{zi} \text{ ou } \hat{\tilde{S}}_{zi} = \hat{S}_{zi}$$

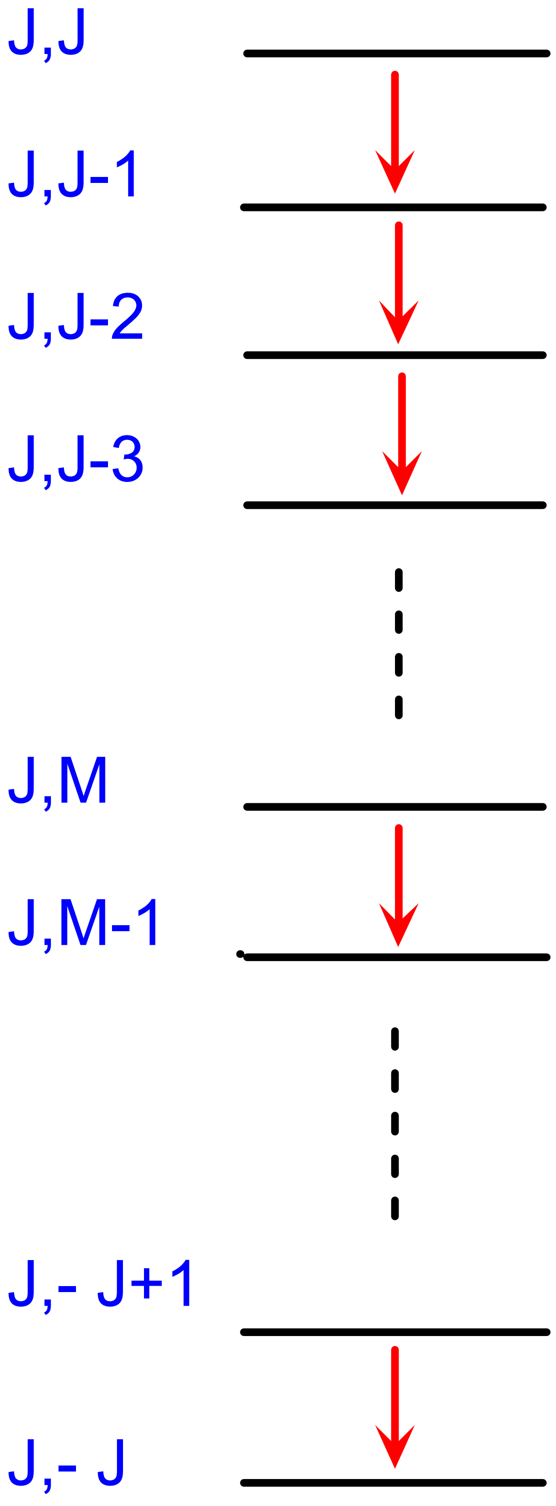
$\hat{H}_I$ peut être mis sous une forme analogue à la précédente

$$\hat{H}_I = \sum_\alpha g_\alpha \left[\hat{\tilde{J}}_+ \hat{b}_\alpha + \hat{\tilde{J}}_- \hat{b}_\alpha^+ \right]$$

avec un nouveau moment cinétique

$$\vec{\tilde{J}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tilde{S}}_i$$

Cascade radiative du moment cinétique



$$\Gamma_{M\to M-1} = C\left|\langle J, M-1 | J_- | J, M\rangle\right|^2$$

$$\Gamma_{M\to M-1} = C\left[J(J+1) - M(M+1)\right] = C(J+M)(J-M+1)$$

C : Constante dépendant des g_α, et de l'élément de matrice du dipôle.

Calcul de C

Emission spontanée d'un atome à 2 niveaux.

$$\Gamma_{e\to g} = \Gamma_{+\to-} = C\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\right] = C$$

C est donc la largeur naturelle Γ du niveau excité de l'atome.

On en déduit

$$\Gamma_{M\to M-1} = \Gamma\left[J\left(J+1\right)-M\left(M-1\right)\right]$$

$$= \Gamma\left(J+M\right)\left(J-M+1\right)$$

$$\Gamma_{J\to J-1} = \Gamma\times 2J = \Gamma N$$

$$\Gamma_{J-1\to J-2} = \Gamma\times\left(2J-1\right)\times 2 = 2\Gamma\left(N-1\right)$$

$$\Gamma_{J-2\to J-3} = \Gamma\times\left(2J-2\right)\times 3 = 3\Gamma\left(N-2\right)$$

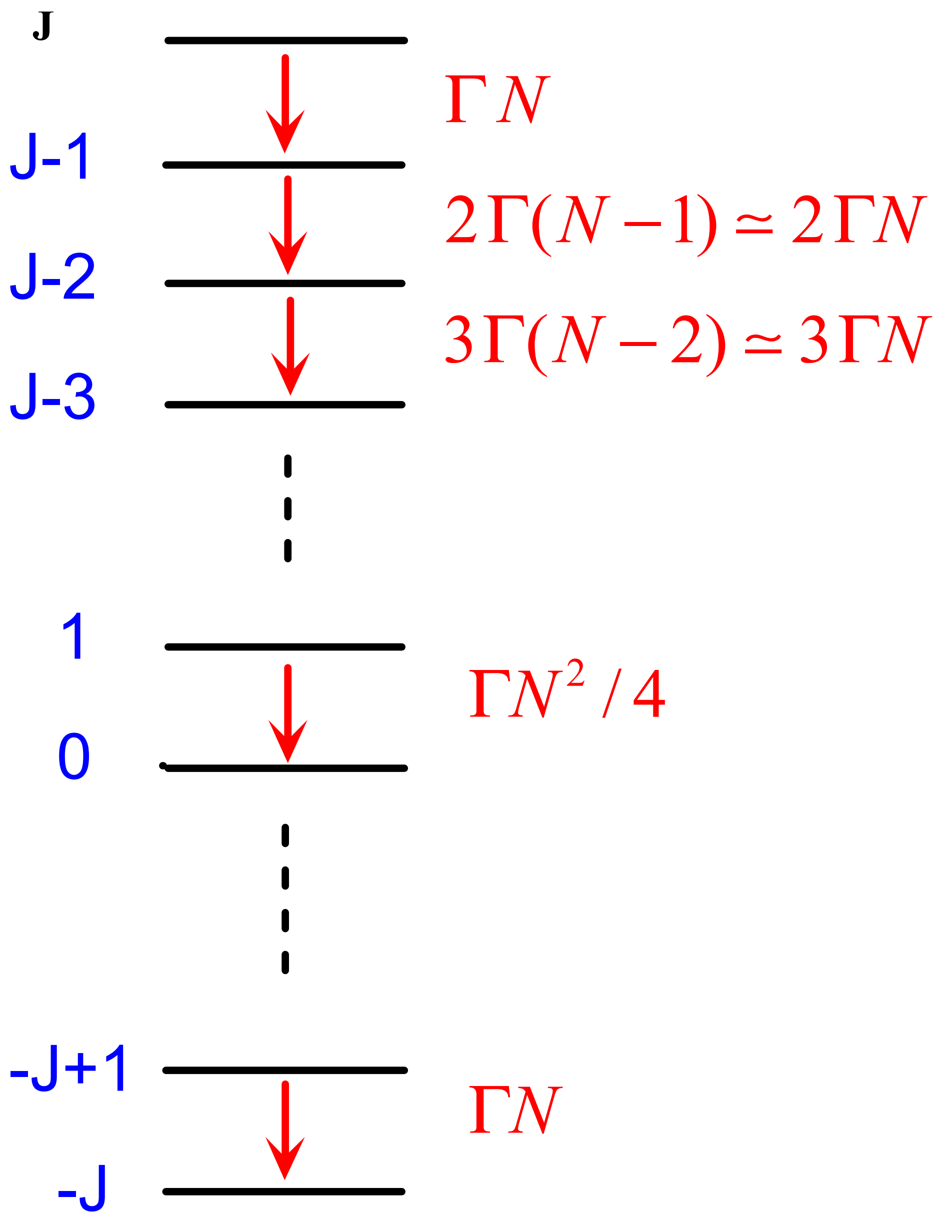
$$\vdots$$

$$\Gamma_{1\to 0} = \Gamma J\left(J+1\right) \simeq \Gamma\frac{N^2}{4} \qquad (J \text{ entier})$$

$$\vdots$$

$$\Gamma_{-J+1\to J} = \Gamma\times 2J = \Gamma N$$

Accélération de la cascade radiative



La cascade radiative est de plus en plus rapide quand M décroît jusqu'à ce que $\Gamma_{M\to M-1}$ atteigne sa valeur maximale, proportionnelle à N^2 pour $M=0$. Puis, elle se ralentit et s'arrête quand $M=-J$.

Autre écriture possible de $\Gamma_{M \to M-1}$

Les états apparaissent dans le développement de $|J, M\rangle$ contiennent

N_+ atomes dans l'état +

N_- atomes dans l'état –

Par ailleurs,

$$N_+ + N_- = N$$

$$\frac{1}{2}(N_+ - N_-) = M$$

Comme $N = 2J$, on a donc

$$N_+ + N_- = 2J$$

$$N_+ - N_- = 2M$$

et donc

$$N_+ = J + M$$

$$N_- = J - M$$

de sorte que

$$\Gamma_{M \to M-1} = \Gamma (J + M)(J - M + 1)$$

$$= \Gamma N_+ (N_- + 1)$$

Discussion physique

Pour passer de M à $M-1$, un atome doit passer de + à -.

$\Gamma_{M \to M-1}$ est proportionnel au nombre N_+ d'atomes dans l'état + et au nombre N_- d'atomes dans l'état -, augmenté d'une unité.

Au fur et à mesure que N_- augmente, le terme $N_- + 1$ augmente et apparaît comme un facteur de stimulation bosonique.

Ce facteur n'a cependant rien à voir avec la statistique des atomes émetteurs qui pourraient bien être des fermions. Il est simplement dû à la symétrie de l'état initial (tous les atomes sont dans e) et à la symétrie de l'hamiltonien d'interaction.

Pourquoi la cascade radiative s'accélère-t-elle ?

Initialement, il n'y a aucune corrélation entre les atomes. Leur état est un état produit.

$$\left|1e, 2e \ldots ie, \ldots Ne\right\rangle$$

Le premier photon émis peut l'être par l'atome 1, par l'atome 2,… ou l'atome N. Après la première émission, l'état des N atomes est donc une superposition linéaire des états $\left|1e, \ldots ig, \ldots Ne\right\rangle$ avec $i = 1, 2 \ldots N$, superposition symétrique à cause de la symétrie de H_I.

Alors que la valeur moyenne de chaque dipôle reste nulle dans un tel état, des corrélations apparaissent entre les dipôles des divers atomes. Une cohérence de phase apparaît entre les oscillations, qui explique l'accélération de l'émission.

<u>Etude du cas simple</u> $N = 2$

<u>Etat initial</u> $|1e, 2e\rangle = |J = 1, M = 1\rangle$

Opérateur dipôle $\hat{d}_i$

$$\hat{d}_i = \delta\left[|ie\rangle\langle ig| + |ig\rangle\langle ie|\right] \qquad i = 1,2$$

δ : Elément de matrice de $\hat{d}$ (réel)

On vérifie alors que

$$\langle 1,1|\hat{d}_1|1,1\rangle = \langle 1,1|\hat{d}_2|1,1\rangle = 0$$

$$\langle 1,1|\hat{d}_1^2|1,1\rangle = \langle 1,1|\hat{d}_2^2|1,1\rangle = \delta^2$$

$$\langle 1,1|\hat{d}_1\hat{d}_2|1,1\rangle = 0$$

Pas de corrélations entre les 2 dipôles.

<u>Après l'émission d'un photon</u>, l'état s'écrit

$$|J = 1, M = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1g, 2e\rangle + |1e, 2g\rangle\right]$$

$$\langle 1,0|\hat{d}_1|1,0\rangle = \langle 1,0|\hat{d}_2|1,0\rangle = 0$$

$$\langle 1,0|\hat{d}_1^2|1,0\rangle = \langle 1,0|\hat{d}_2^2|1,0\rangle = \delta^2$$

$$\langle 1,0|\hat{d}_1\hat{d}_2|1,0\rangle = \delta^2$$

Les 2 dipôles oscillent en phase bien que la phase absolue soit aléatoire.

Retour au cas général

Expression du dipôle total

Pour un atome à 2 niveaux, l'équivalent de $\hat{d}$ en termes de spin fictif est

$$\hat{d} = \delta\,[|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|] = 2\,\delta\,\hat{S}_x$$

Le dipôle total $\hat{D} = \sum_{i=1}^{N} \hat{d}_i$ correspond donc à

$$2\,\delta \sum_{i=1}^{N} \hat{S}_{ix} = 2\,\delta\,\hat{J}_x$$

Valeurs moyennes de $\hat{D}$ et $\hat{D}^2$ dans l'état initial $|J,J\rangle$

$$\langle J,J|\hat{D}|J,J\rangle = 2\,\delta\,\langle J,J|\hat{J}_x|J,J\rangle = 0$$

$$\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 = J\,(J+1) - \hat{J}_z^2$$

$$\langle J,J|\hat{J}_x^2|J,J\rangle = \frac{1}{2}\langle J,J|\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2|J,J\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left[J\,(J+1) - J^2\right] = \frac{J}{2} = \frac{N}{4}$$

$$\langle J,J|\hat{D}^2|J,J\rangle = 4\,\delta^2\,\langle J,J|\hat{J}_x^2|J,J\rangle = N\delta^2$$

Somme des carrés des N dipôle.

Pas de termes croisés- Pas de corrélations

Valeurs moyennes de $\hat{D}$ et $\hat{D}^2$ dans $|J, M\rangle$

$$\langle J, M | \hat{J}_x | J, M \rangle = 0$$

$$\langle J, M | \hat{D} | J, M \rangle = 0$$

$$\langle J, M | \hat{J}_x^2 | J, M \rangle = \frac{1}{2}\left[J(J+1) - M^2\right]$$

$$\langle J, M | \hat{D}^2 | J, M \rangle = 2\delta^2\left[J(J+1) - M^2\right]$$

Pour $M = 0$ (J entier)

$$\langle J, 0 | \hat{D}^2 | J, 0 \rangle = 2\delta^2 J(J+1)$$

$$\simeq 2\delta^2 J^2 = N^2\delta^2 / 2$$

Interprétation

Tous les dipoles oscillent en phase. Le module du dipole total est donc égal à $N\delta$.

Sa phase θ est par contre aléatoire de sorte que

$$\langle D^2 \rangle = N^2\delta^2\overline{\cos^2\theta} = N^2\delta^2 / 2$$

Récapitulation

On part d'un état où les dipôles ne sont pas corrélés.

L'émission successive de photons introduit des corrélations entre les dipôles atomiques, corrélations qui deviennent de plus en plus fortes quand le nombre de photons émis croît.

Les corrélations sont parfaites quand $M=0$, c'est à dire quand la moitié des atomes se sont desexcités. Puis, elles décroissent.

Références

En plus des références aux articles de Dicke, données en T-194, on peut mentionner l'article de revue de B.Gross et S.Haroche, Phys. Reports, **93**, 301 (1982) qui contient également une bibliographie détaillée.