Condensat inhomogène

Piège harmonique anisotrope

Potentiel de piégeage

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2} m \left[\omega_{0x}^2 x^2 + \omega_{0y}^2 y^2 + \omega_{0z}^2 z^2 \right]$$

Limite de Thomas-Fermi

On suppose le nombre N d'atomes suffisamment grand pour que

$$\frac{Na}{\sigma} \gg 1$$

a : Longueur de diffusion

$$\sigma = \sqrt{\hbar / m\,\bar{\omega}_0} \qquad \bar{\omega}_0 = \left[\omega_{0x} \omega_{0y} \omega_{0z} \right]^{1/3}$$

σ : Extension moyenne de la fonction d'onde de l'état fondamental du piège.

On peut alors négliger le terme d'énergie cinétique dans l'équation de $G-P$ qui devient une équation algébrique (voir Cours 1988-99)

Equation de G-P approchée

$$V(\vec{r})\psi(\vec{r}) + g\left|\psi(\vec{r})\right|^2 \psi(\vec{r}) = \mu\,\psi(\vec{r})$$

$$g = 4\pi\hbar^2 a / m$$

μ = Potentiel chimique $= g\rho_0$

$\rho_0 = \left|\psi\left(\vec{r} = \vec{0}\right)\right|^2$ Densité spatiale au centre du piège $\vec{r} = \vec{0}$ où $V = 0$

Densité spatiale $\rho(\vec{r})$

Compte tenu de l'expression de V l'équation de G-P approchée conduit à l'expression suivante pour $\rho(\vec{r})$

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0\left[1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]$$

où x_0, y_0, z_0 sont définis par

$$\frac{1}{2}m\,\omega_{0x}^2 x_0^2 = \frac{1}{2}m\,\omega_{0y}^2 y_0^2 = \frac{1}{2}m\,\omega_{0z}^2 z_0^2 = \mu$$

Changement de variables

$$\tilde{x} = x / x_0 \qquad \tilde{y} = y / y_0 \qquad \tilde{z} = z / z_0$$

$\vec{\tilde{r}}$: Vecteur de composantes $\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$

$$\rho\left(\vec{\tilde{r}}\right) = \rho_0 \left(1 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2\right)$$

$$= \rho_0 \left(1 - \tilde{r}^2\right)$$

$\rho\left(\vec{\tilde{r}}\right)$ ne dépend que de $\tilde{r}^2$

$\tilde{r}$ varie entre 0 et 1 ($\rho \geqslant 0$)

Expression de N

$$N = \iiint \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\;\; \rho\,(x, y, z)$$

$$= x_0 y_0 z_0 \iiint \mathrm{d}\tilde{x}\, \mathrm{d}\tilde{y}\, \mathrm{d}\tilde{z}\;\; \rho_0 \left(1 - \tilde{r}^2\right)$$

$$= 4\pi\, x_0 y_0 z_0\, \rho_0 \int_0^1 \tilde{r}^2 \left(1 - \tilde{r}^2\right) \mathrm{d}\tilde{r}$$

$$= \frac{8\pi}{15} \rho_0\, x_0 y_0 z_0$$

Quelques repères importants sur l'échelle des valeurs de q

Inverse du rayon du condensat $1/R_0$

Un rayon moyen peut être défini pour le condensat par

$$R_0 = \left(x_0 \, y_0 \, z_0\right)^{1/3}$$

On se limite ici à des excitations du condensat de longueur d'onde grande devant R_0

$$q \gg \frac{1}{R_0}$$

Les excitations ayant des valeurs de q de l'ordre de $1/R_0$ correspondent aux premiers modes propres de vibration du condensat étudiés dans le cours 1998-99.

Inverse de la longueur de relaxation ξ_0

("Healing length")

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{8\pi\rho_0 a}}$$

$$q \gg \frac{1}{\xi_0} \quad \Leftrightarrow \quad \hbar\omega_q^0 \gg \mu$$

$$q \ll \frac{1}{\xi_0} \quad \Leftrightarrow \quad \hbar\omega_q^0 \ll \mu$$

Pour un condensat homogène ces 2 limites correspondent respectivement à des excitations de type particule libre pour la première, de type phonon pour la deuxième.

Pour la plupart des condensats

$$\xi_0 \ll R_0$$

Donc,

$$\frac{1}{\xi_0} \gg \frac{1}{R_0}$$

Comparaison du déplacement Doppler et de celui dû aux interactions

(pour $q \gg 1/\xi_0$)

Dans un condensat homogène,

l'énergie des excitations élémentaires de vecteur d'onde q vaut (pour $q \gg 1/\xi_0$)

$$\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \mu$$

(voir T-81)

Le déplacement dû aux interactions vaut donc

$$(\delta E)_{\mathrm{int}} \simeq \mu$$

Par ailleurs, dans un condensat homogène, les particules sont condensées dans un état de vitesse nulle.

Il n'y a pas alors d'effet Doppler lors de la diffusion d'une particule sonde.

Dans un condensat inhomogène,

il y a une dispersion de vitesses liée à l'extension spatiale finie R_0 du condensat

$$\delta v \simeq \frac{\hbar}{m\, R_0}$$

Le spectre de diffusion subit donc, pour un transfert d'impulsion $\hbar\vec{q}$, un déplacement Doppler de l'ordre de

$$(\delta E\,)_{Doppler} \simeq \hbar q\, \delta\, v \simeq \frac{\hbar^2 q}{m\, R_0}$$

Valeur q_D de q pour laquelle

$$(\delta E\,)_{int} \simeq (\delta E\,)_{Doppler}$$

$$\frac{\hbar^2\, q_D}{m\, R_0} \simeq \mu = g\, \rho_0 = \frac{4\pi\, \hbar^2}{m} a\, \rho_0$$

$$q_D \simeq 4\pi\, a\, \rho_0\, R_0 \simeq R_0 \,/\, \xi_0^2$$

$$q_D = \frac{R_0}{\xi_0^2} = \frac{1}{\xi_0}\frac{R_0}{\xi_0} \gg \frac{1}{\xi_0}$$

Récapitulation

q

Particule libre

$$(\delta E)_{\text{int}} \ll (\delta E)_{\text{Doppler}}$$

$$\frac{R_0}{\xi_0^{\,2}}$$

Particule libre

$$(\delta E)_{\text{int}} \gg (\delta E)_{\text{Doppler}}$$

$$\hbar\omega_q^0 \gg \mu$$

$$\frac{1}{\xi_0}$$

Phonons

$$\hbar\omega_q^0 \ll \mu$$

Modes propres de vibration

$$\frac{1}{R_0}$$

0

Limite des grands vecteurs d'onde

$$q \gg R_0 / \xi_0^2$$

Autre interprétation de $q \gg R_0 / \xi_0^2$

Comme $\hbar\omega_q^0 \gg \mu$, l'excitation créée par la particule sonde est de type particule et a une énergie $\left(\hbar q^2 / 2m\right) + \mu$.

Le second terme μ, dû aux interactions est plus petit que le premier.

L'atome cible ainsi excité a une vitesse de l'ordre de $\hbar q / m$ et quitte le condensat de rayon R_0 au bout d'un temps

$$\tau \simeq \frac{R_0}{\hbar q / m} = \frac{m R_0}{\hbar q}$$

L'effet des interactions décrit par μ n'est ressenti par cet atome que durant le temps τ passé à l'intérieur du condensat.

Déphasage ϕ dû aux interactions

L'atome cible excité par la particule sonde acquiert donc un déphasage ϕ dû aux interactions de l'ordre de

$$\phi = \frac{\mu\,\tau}{\hbar} \simeq \frac{m\,R_0}{\hbar^2\,q}\,\mu$$

Remplaçons μ par $g\,\rho_0 = 4\pi\,\hbar^2\,a\,\rho_0 / m$

Il vient

$$\phi \simeq \frac{4\pi\,a\,\rho_0 R_0}{q} \simeq \frac{R_0}{q\,\xi_0^2}$$

La condition $q \gg R_0 / \xi_0^2$ est donc équivalente à $\phi \ll 1$.

$$q \gg R_0 / \xi_0^2 \;\Leftrightarrow\; \phi \ll 1$$

Conclusion

Quand $q \gg R_0 / \xi_0^2$, l'excitation créée par la particule sonde peut être considérée comme libre. L'effet des interactions sur son évolution est négligeable.

Déphasages absolu et relatif

Dans tout le domaine $q \gg 1/\xi_0$

On a $\omega_q^0 \tau \gg \mu\,\tau/\hbar$

Le déphasage dû aux interactions, $\mu\,\tau/\hbar$, est beaucoup plus petit que celui dû à l'évolution libre $\omega_q^0 \tau$.

Si en plus $q \gg R_0/\xi_0^2 \gg 1/\xi_0$

Le déphasage dû aux interactions est non seulement petit en valeur relative par rapport à celui dû aux interactions.

Il est aussi petit en valeur absolue.

Par contre, pour $R_0/\xi_0^2 \gg q \gg 1/\xi_0$

Le déphasage $\mu\,\tau/\hbar$, tout en étant petit devant $\omega_q^0 \tau$, est grand en valeur absolue.

Transformée de Fourier de $S(\vec{q},\omega)$

(par rapport à ω)

Rappelons que (voir T-24)

$$S(\vec{q},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau e^{-i\omega t} \left\langle \psi_0 \middle| \hat{\rho}_{\vec{q}}^{+}(\tau=0)\,\hat{\rho}_{\vec{q}} \middle| (\tau)\psi_0 \right\rangle$$

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}+\vec{q}}^{+}\,\hat{a}_{\vec{k}} \qquad \hat{\rho}_{\vec{q}}^{+} = \sum_{\vec{k}'} \hat{a}_{\vec{k}'}^{+}\,\hat{a}_{\vec{k}'+\vec{q}}$$

$$\hat{\rho}_{\vec{q}}(\tau) = e^{i\hat{H}\tau/\hbar}\,\hat{\rho}_{\vec{q}}\;e^{-i\hat{H}\tau/\hbar}$$

Dans l'expression précédente $\hat{H}$ est l'hamiltonien total.

τ est le temps de corrélation des fluctuations de $\hat{\rho}$, de l'ordre du temps mis par l'excitation créée par la sonde pour quitter le condensat.

Comme $\mu\tau/\hbar \ll 1$, on peut donc dans $\hat{\rho}_{\vec{q}}(\tau)$ remplacer $\hat{H}$ par l'hamiltonien $\hat{H}_0$ sans interactions.

Une telle approximation est appelée « approximation d'impulsion »

(« impulse approximation »)

Calcul de $e^{i\hat{H}_0\tau/\hbar}\hat{\rho}_{\vec{q}}\, e^{-i\hat{H}_0\tau/\hbar}$

$$\hat{H}_0 = \sum_{\vec{k}} \hbar\,\omega_k^0\, \hat{a}_{\vec{k}}^+\, \hat{a}_{\vec{k}} \qquad \omega_k^0 = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

$$e^{i\hat{H}_0\tau/\hbar}\, \hat{a}_{\vec{k}}\, e^{-i\hat{H}_0\tau/\hbar} = \hat{a}_k e^{-i\omega_k^0\tau}$$

$$e^{i\hat{H}_0\tau/\hbar}\hat{\rho}_{\vec{q}} e^{-i\hat{H}_0\tau/\hbar} = \sum_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}+\vec{q}}^+\, \hat{a}_{\vec{k}}\, e^{i\left(\omega_{\vec{k}+\vec{q}}^0 - \omega_k^0\right)\tau}$$

$$\omega_{\vec{k}+\vec{q}}^0 - \omega_k^0 = \frac{\hbar\left(\vec{k}+\vec{q}\right)^2}{2m} - \frac{\hbar k^2}{2m}$$

$$= \frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\hbar \vec{k}}{m}\cdot\vec{q}$$

$S(\vec{q},\omega)$ est donc la transformée de Fourier temporelle de

$$\sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \exp\left\{ i \left[\frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\hbar \vec{k}}{m}\cdot\vec{q} \right] \tau \right\} \times$$

$$\left\langle \psi_0 \middle| \hat{a}_{\vec{k}'}^+\, \hat{a}_{\vec{k}'+\vec{q}}\ \ \hat{a}_{\vec{k}+\vec{q}}^+\, \hat{a}_{\vec{k}} \middle| \psi_0 \right\rangle$$

Calcul de $\langle \psi_0 | \hat{a}^+_{\vec{k}'} \hat{a}_{\vec{k}'+\vec{q}} \hat{a}^+_{\vec{k}+\vec{q}} \hat{a}_{\vec{k}} | \psi_0 \rangle$

$$\hat{a}_{\vec{k}'+\vec{q}} \hat{a}^+_{\vec{k}+\vec{q}} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} + \hat{a}^+_{\vec{k}+\vec{q}} \hat{a}_{\vec{k}'+\vec{q}}$$

Considérons alors le terme

$$\langle \psi_0 | \hat{a}^+_{\vec{k}'} \hat{a}^+_{\vec{k}+\vec{q}} \hat{a}_{\vec{k}'+\vec{q}} \hat{a}_{\vec{k}} | \psi_0 \rangle$$

$|\psi_0\rangle$ décrit l'état du condensat.

$\hat{a}_{\vec{k}} |\psi_0\rangle$ n'est différent de zéro que si k n'est pas trop grand devant $1/R_0$, largeur en q de ψ_0.

De même, $\langle \psi_0 | \hat{a}^+_{\vec{k}'}$ n'est non nul que si $k' \lesssim 1/R_0$. On a alors nécessairement $|\vec{k}' + \vec{q}| \gg 1/R_0$.

$\hat{a}_{\vec{k}'+\vec{q}}$ commute avec $\hat{a}_{\vec{k}}$. Agissant sur $|\psi_0\rangle$ il donne 0 car ψ_0 ne contient pas d'état de vecteur d'onde $\gg 1/R_0$.

Le terme considéré plus haut est donc négligeable.

Finalement, seul subsiste le terme $\delta_{\vec{k}\vec{k}'}$ dans

$$\left\langle \psi_0 \left| \hat{a}^+_{\vec{k}'} \hat{a}_{\vec{k}'+\vec{q}} \; \hat{a}^+_{\vec{k}+\vec{q}} \; \hat{a}_{\vec{k}} \right| \psi_0 \right\rangle$$

$S(\vec{q},\omega)$ est donc la T.F. temporelle de

$$\sum_{\vec{k}} \exp\left\{ i \left[\frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\hbar \vec{k}}{m} \cdot \vec{q} \right] \tau \right\} \times$$

$$\left\langle \psi_0 \left| \hat{a}^+_{\vec{k}} \; \hat{a}_{\vec{k}} \right| \psi_0 \right\rangle$$

et s'écrit

$$S(\vec{q},\omega) = \sum_{\vec{k}} \delta \left[\omega - \frac{\hbar q^2}{2m} - \frac{\hbar \vec{k}}{m} \cdot \vec{q} \right] \left\langle \psi_0 \left| \hat{a}^+_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} \right| \psi_0 \right\rangle$$

Spectre Doppler

- centré à la fréquence de recul

$$\omega_q^0 = \hbar q^2 / 2m$$

- de largeur déterminée par la répartition des vitesses $\vec{v} = \hbar \vec{k} / m$ dans le condensat

$$\left(\hbar \vec{k} / m \right) \cdot \vec{q} = \vec{q} \cdot \vec{v}$$ = Déplacement Doppler

Conclusion pour le domaine $q \gg R_0 / \xi_0^2$

A suffisamment haute énergie, plus précisément quand $q \gg R_0 / \xi_0^2$, le spectre de diffusion $S(\vec{q},\omega)$ donne la répartition des vitesses dans le condensat et n'est pas affecté par les interactions.

Vélocimétrie Doppler

Remarque

Le calcul précédent ne suppose pas que l'état fondamental $|\psi_0\rangle$ du système est calculé en négligeant les interactions.

$\langle\psi_0|\hat{a}^+_{\vec{k}}\,\hat{a}_{\vec{k}}|\psi_0\rangle$ donne la répartition des valeurs de $\vec{k}$, donc de $\vec{v} = \hbar\vec{k}/m$, dans l'état fondamental exact $|\psi_0\rangle$

Référence **(suite de T-90)**

9. F. Zambelli, L. Pitaevskii, D.M. Stamper-Kurn, S. Stringari, Phys.Rev. **A61**, 063608 (2000) et references in.