

Diffusion Rayleigh superradiante Sur un condensat de Bose-Einstein

Référence 18

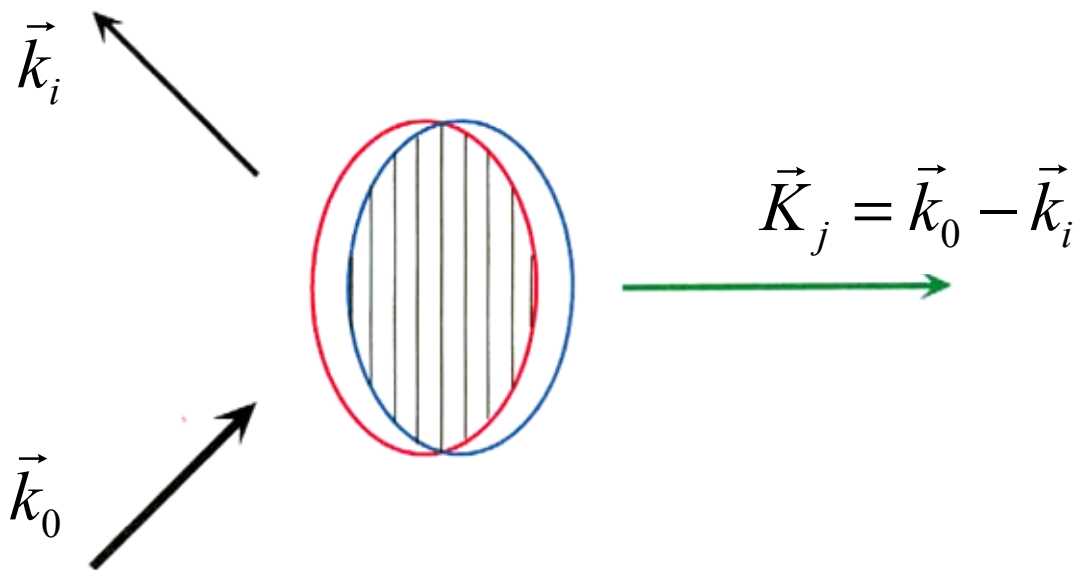
Explication qualitative

Dans un processus de diffusion Rayleigh un photon incident \vec{k}_0 est diffusé par le condensat. Ce photon disparaît et un photon diffusé \vec{k}_i apparaît.

La conservation de l'impulsion globale entraîne qu'une impulsion $\hbar \vec{K}_j = \hbar (\vec{k}_0 - \vec{k}_i)$ est transférée au condensat.

Une onde de matière de vecteur d'onde $\vec{K}_j = \vec{k}_0 - \vec{k}_i$ est donc créée au cours du processus de diffusion. Elle interfère avec le condensat (qui est au repos) pour donner un réseau de densité de vecteur d'onde \vec{K}_j .

Réseau de densité



Le photon diffusé a tout le temps de s'échapper du condensat avant que le réseau de densité ne se soit amorti.

Le processus de diffusion va donc laisser une "empreinte" dans le condensat qui va influencer les diffusions suivantes des photons \vec{k}_0 du faisceau incident.

Mécanisme d'amplification

Le réseau de densité créé par la diffusion $\vec{k}_0 \rightarrow \vec{k}_i$ diffracte le faisceau incident dans la direction $\vec{k}_0 - \vec{K}_j = \vec{k}_i$.

L'apparition d'un premier photon diffusé \vec{k}_i renforce donc la diffusion dans la direction \vec{k}_i . L'onde de matière qui recule dans la direction $\vec{K}_j = \vec{k}_0 - \vec{k}_i$ se trouve alors augmentée, ce qui accroît d'autant la modulation du réseau de densité.

Ce renforcement du réseau de densité augmente la diffraction du faisceau laser dans la direction \vec{k}_i .

Et ainsi de suite...

Anisotropie de l'amplification

Si le condensat est très anisotrope (forme de cigare allongé), le gain apparaissant sur la diffusion Rayleigh par suite de la création d'un réseau de densité peut être très anisotrope.

Comme nous le verrons plus loin, ce gain est maximal quand la direction de \vec{k}_i coïncide avec le grand axe du condensat.

Il se produit alors une émission amplifiée le long de ce grand axe, analogue à la super-radiance d'un milieu allongé.

Cette émission amplifiée est accompagnée d'un recul d'atomes dans la direction $\vec{K}_j = \vec{k}_0 - \vec{k}_i$.

Calcul semiclassique du gain

Expression du réseau de densité

N_0 atomes dans le condensat

N_j atomes reculant avec une impulsion

$$\hbar K_j = \hbar (\vec{k}_0 - \vec{k}_i) .$$

Densité spatiale $\rho_I(\vec{r})$

$$\rho_I(\vec{r}) = \left| \sqrt{N_0} + \sqrt{N_j} e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}} \right|^2 \tilde{\rho}(\vec{r})$$

$\tilde{\rho}(\vec{r})$: Densité normalisée représentant la forme du condensat.

$$\int d^3r \tilde{\rho}(\vec{r}) = 1$$

Enveloppe lentement variable du réseau de densité.

$$\rho_I(\vec{r}) = \tilde{\rho}(\vec{r}) \left\{ N_0 + N_j + \sqrt{N_0 N_j} \left[e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}} + e^{-i(\vec{k}_0 - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}} \right] \right\}$$

Nombre de photons incidents \vec{k}_0 diffusés
par seconde par le réseau de densité
dans la direction \vec{k}

Le réseau est considéré comme statique ($|\vec{k}_0| = |\vec{k}_i|$) et on utilise l'expression du taux de diffusion élastique R_N d'un système à N corps.

$$R_N = R_1 \times \left| \left(\int d^3r \rho_I(\vec{r}) e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{r}} \right)_{k=k_0} \right|^2$$

R_1 : Taux de diffusion élastique pour un seul atome (diffusion Rayleigh).

Nombre de photons diffusés par seconde dans l'angle solide $d^2\Omega_k$ autour de la direction de \vec{k} faisant un angle θ_j avec la polarisation (linéaire) du faisceau laser \vec{k}_0 .

$$R_N \sin^2 \theta_j \frac{d^2\Omega_k}{8\pi/3}$$

Calcul du terme

$$\left| \left(\int d^3 r \rho_I(\vec{r}) e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{r}} \right)_{k=k_0} \right|^2$$

Reportons dans ce terme l'expression de $\rho_I(\vec{r})$ obtenue en T-171.

Le terme intéressant, qui donne une contribution importante pour $\vec{k} = \vec{k}_i$, et qui représente la diffraction du faisceau incident par le réseau de densité, est le terme en $\exp[-i(k_0 - k_i) \cdot \vec{r}]$ de $\rho_I(\vec{r})$. Sa contribution est

$$N_0 N_j \left| \left(\int d^3 \tilde{\rho}(\vec{r}) e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}) \cdot \vec{r}} \right)_{k=k_0=k_i} \right|^2$$

Pour $\vec{k} = \vec{k}_i$ ce terme est maximal et vaut $N_0 N_j$. Tous les atomes rayonnent en phase dans la direction \vec{k}_i .

Angle solide Ω_i dans lequel est concentrée l'émission autour de \vec{k}_i

Dès que $\vec{k} \neq \vec{k}_i$, l'exponentielle $\exp i(\vec{k}_i - \vec{k}) \cdot \vec{r}$ diminue l'intégrale.

La T.F. spatiale de $\tilde{\rho}(\vec{r})$ est concentrée autour de $\vec{k} = \vec{k}_i$, dans un angle solide au delà duquel les interférences entre les champs rayonnés par les divers atomes sont destructives.

Définition précise de Ω_i

Nombre total de photons diffusés par seconde autour de la direction \vec{k}_i

$$R_1 \frac{\sin^2 \theta_j}{8\pi/3} N_0 N_j \Omega_i$$

On en déduit

$$\Omega_i = \int d^3\Omega_{\vec{k}} \left| \left(\int d^3k \tilde{\rho}(\vec{r}) e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}) \cdot \vec{r}} \right)_{k=k_i=k_0} \right|^2$$

Evaluation simple de Ω_i

Les plans d'égale densité du réseau de densité sont perpendiculaires à \vec{K}_j . Tous les atomes d'un tel plan rayonnent en phase dans la direction \vec{k}_i .

Soit S_i la surface de la section du condensat par un plan perpendiculaire à \vec{k}_i . L'angle solide autour de \vec{k}_i à l'intérieur duquel les interférences ne sont pas destructives est déterminé par la diffraction à partir de la surface S_i .

On a donc

$$\Omega_i \simeq \frac{\lambda^2}{S_i}$$

λ : Longueur d'onde du rayonnement diffusé.

Anisotrope de la diffusion

Si le condensat à la forme d'un cigare allongé d'axe Oz la section de surface S_i la plus petite est perpendiculaire à Ox .

C'est donc dans la direction de l'axe du condensat que l'angle solide Ω_i d'émission est le plus grand, et donc le taux de diffusion Rayleigh du condensat le plus important.

Un condensat allongé, excité par un faisceau incident, diffusera donc préférentiellement ces photons dans la direction de son grand axe.

Expression simple pour le gain

S_i : Surface de la section du condensat par un plan perpendiculaire à \vec{k}_i .

l_i : Longueur du condensat dans une direction parallèle à \vec{k}_i .

V : Volume du condensat $V \approx l_i S_i$

$$\Omega_i \approx \frac{\lambda^2}{S_i} \quad N_0 \approx \rho_0 V \approx \rho_0 l_i S_i$$

Taux de diffusion le long de \vec{k}_i

$$R_1 \frac{\sin^2 \theta_j}{2\pi/3} N_0 N_j \Omega_i \approx R_1 \frac{\sin^2 \theta_j}{2\pi/3} \rho_0 \lambda^2 l_i N_j$$

Le gain est d'autant plus élevé que l_i est plus grand.

$\rho_0 \lambda^2 l_i$ est l'épaisseur optique (à résonance) du condensat le long de la direction de \vec{k}_i .

Traitement plus précis

Défauts du traitement précédent

- La diffusion n'est pas entièrement élastique
- Pour calculer le réseau de densité (voir T-171), on fait interférer 2 ondes $\sqrt{N_0} \psi_0(\vec{r})$ et $\sqrt{N_j} e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}} \psi_0(\vec{r})$ avec $|\psi_0(\vec{r})|^2 = \tilde{\rho}(\vec{r})$.

En fait, ces 2 ondes sont associées à des nombres de bosons bien définis, N_0 pour la première, N_1 pour la seconde.

La phase relative entre ces deux ondes n'est donc pas bien définie

Il n'y a pas à proprement parler de réseau de densité sur la densité spatiale à 1 corps $\rho_I(\vec{r})$

Taux de diffusion global dans la direction \vec{k}_i

Ce taux de diffusion global (élastique et inélastique) fait intervenir la T.F. spatiale de la densité à 2 corps $\rho_{II}(\vec{r}, \vec{r}')$ (voir T-31 et T-32).

Sur la densité à 2 corps apparaissent des corrélations avec des modulations spatiales de vecteur d'onde $\vec{K}_j = \vec{k}_0 - \vec{k}_i$.

Le calcul correct devrait en fait prendre un mélange statistique de paires d'ondes interférant comme plus haut, mais avec une phase relative θ équipartie entre 0 et 2π .

Comme le taux de diffusion ne dépend pas de θ , on retrouve le même résultat que plus haut.

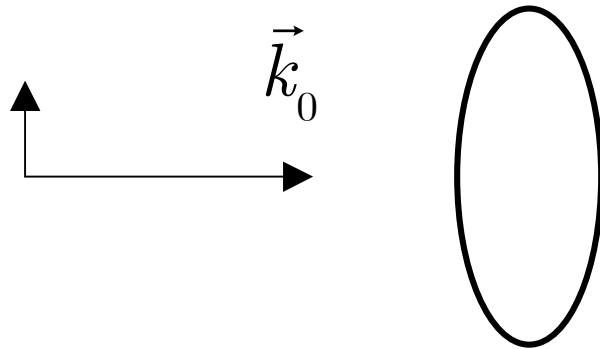
Description de l'expérience

(référence 18)

- Condensat d'atomes de sodium en forme de cigare allongé horizontal.
Diamètre : $20\mu\text{m}$ Longueur : $200\mu\text{m}$
- Excité par un faisceau laser désaccordé de résonance de 1.7 GHz, perpendiculaire au grand axe du condensat et se propageant dans un direction faisant 45° avec la verticale
Durée de l'impulsion : 10 à $800\mu\text{s}$
Intensité : 1 à $100\text{mW}/\text{cm}^2$
R1 variant de $4,5 \cdot 10^1/\text{s}$ à $4,5 \cdot 10^3/\text{s}$
- L'impulsion des atomes subissant le recul $\hbar \vec{K}_j$ est mesurée sur une image de temps de vol après 20 à 50m/s d'expansion balistique.

Effets de polarisation

Polarisation parallèle à l'axe du condensat



L'angle θ_j entre la polarisation du laser et l'axe du condensat est nul. On a alors $\sin^2 \theta_j = 0$ et il ne peut pas y avoir de diffusion Rayleigh le long de l'axe du condensat.

L'effet de superradiance discuté plus haut est inhibé.

Polarisation perpendiculaire à l'axe du condensat

On a alors $\theta_j = \pi / 2$ et $\sin^2 \theta_j = 1$.

L'effet de superradiance n'est plus inhibé.

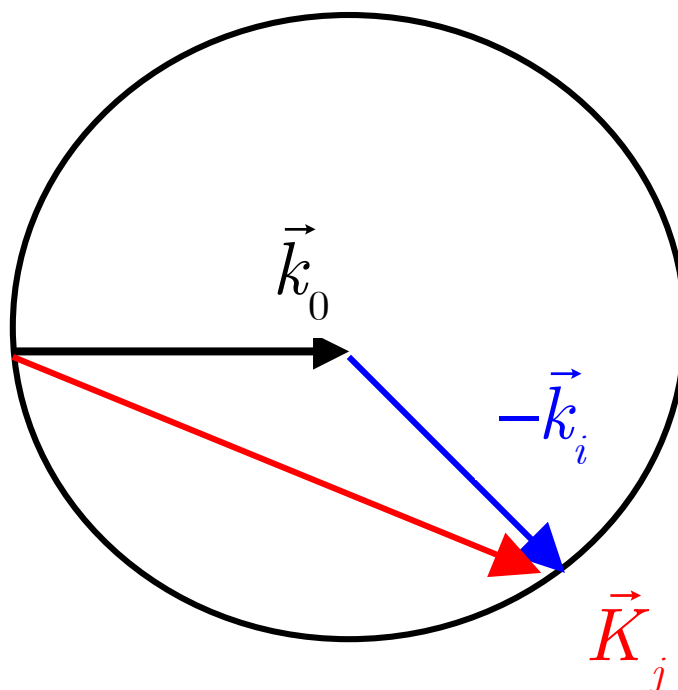
Résultats expérimentaux en l'absence de superradiance

Pour bloquer la superradiance, on prend la polarisation du laser parallèle à l'axe du condensat.

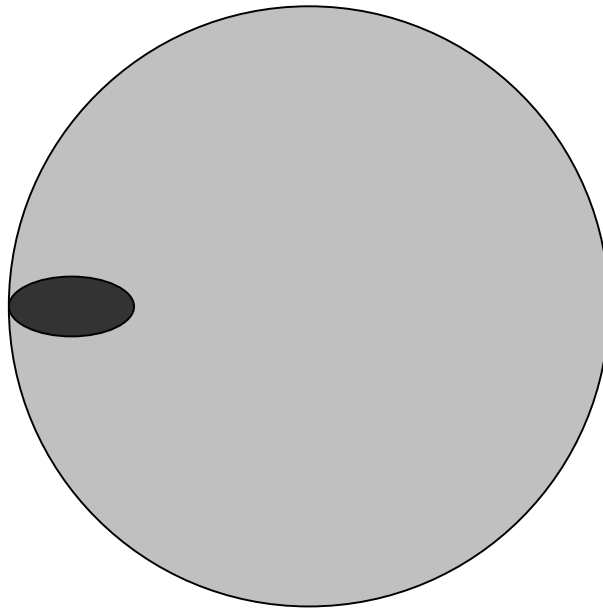
Remarque : c'est ce qui était fait aussi dans les expériences décrites dans le cours VI pour ne pas perturber les effets étudiés alors.

La diffusion Rayleigh se fait alors dans toutes les directions possibles.

L'extrémité de $\vec{K}_j = \vec{k}_0 - \vec{k}_i$ décrit un cercle
(car $|\vec{k}_0| \approx |\vec{k}_i|$)



Allure de l'image de temps de vol en l'absence de superradiance



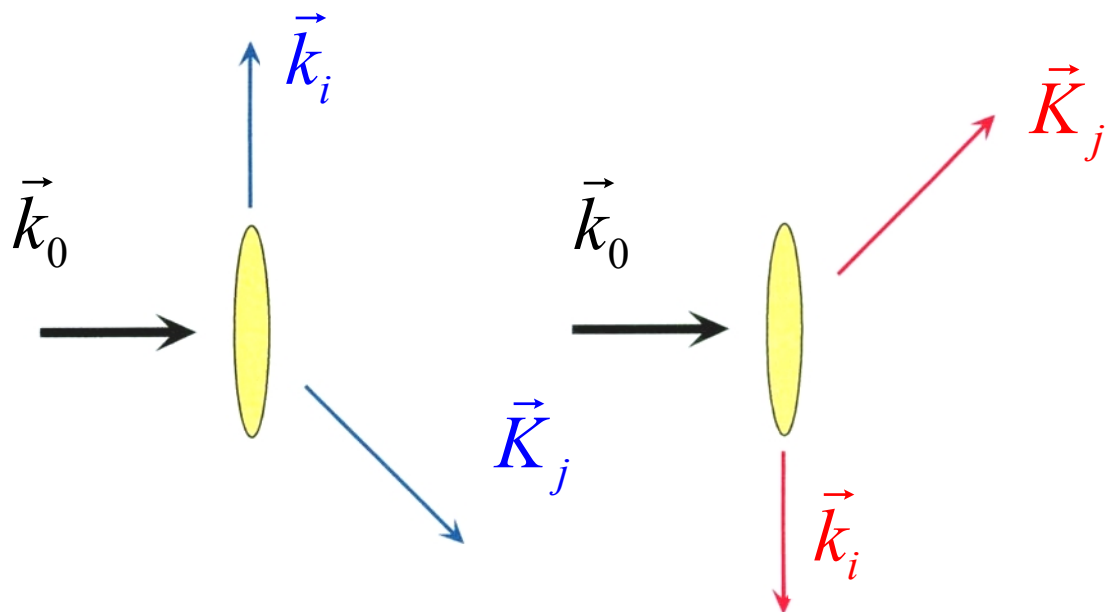
Halo circulaire correspondant aux atomes reculant avec toutes les valeurs possibles de l'impulsion $\hbar \vec{K}_j = \hbar (\vec{k}_0 - \vec{k}_i)$, à droite de l'image des atomes restés dans le condensat.

Voir figures 1C et 1D de la référence 18.

Résultats expérimentaux en présence de superradiance

Polarisation du laser perpendiculaire à l'axe du condensat.

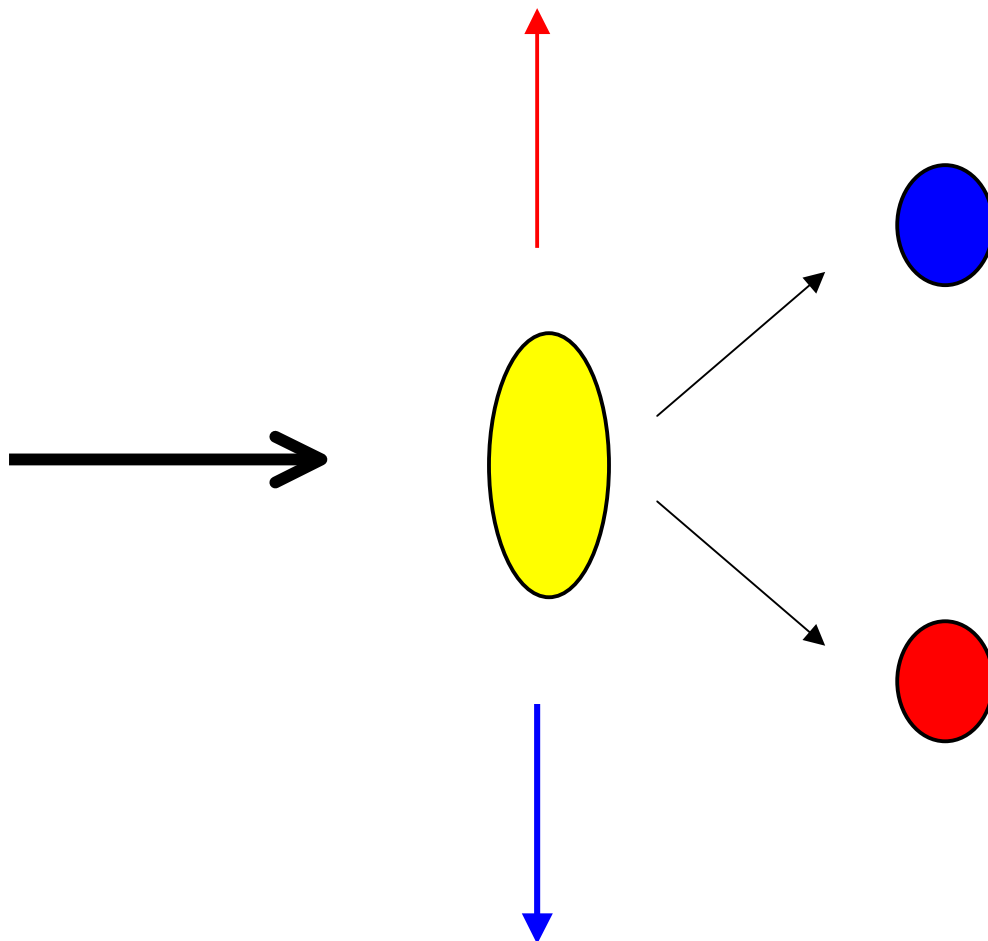
La diffusion Rayleigh superradiante se fait le long de l'axe, d'un côté ou de l'autre.



Les atomes reculent à 45° de l'axe du condensat, d'un côté ou de l'autre.

Les images de temps de vol donnent donc, en plus de l'image du condensat, 2 images de nuages d'atomes reculant à 45° de part et d'autre de l'axe.

Allure de l'image de temps de vol



Voir la figure 1E de la référence 18

Cascade de diffusions

Prenons l'axe Oz suivant l'axe du condensat et l'axe Ox suivant la direction des photons incidents \vec{k}_0 .

Si la durée de l'impulsion laser est suffisamment longue, une seconde diffusion Rayleigh peut se produire sur les 2 nuages d'atomes qui reculent après la première diffusion avec les impulsions $p_x = \hbar k$,
 $p_z = \pm \hbar k$.

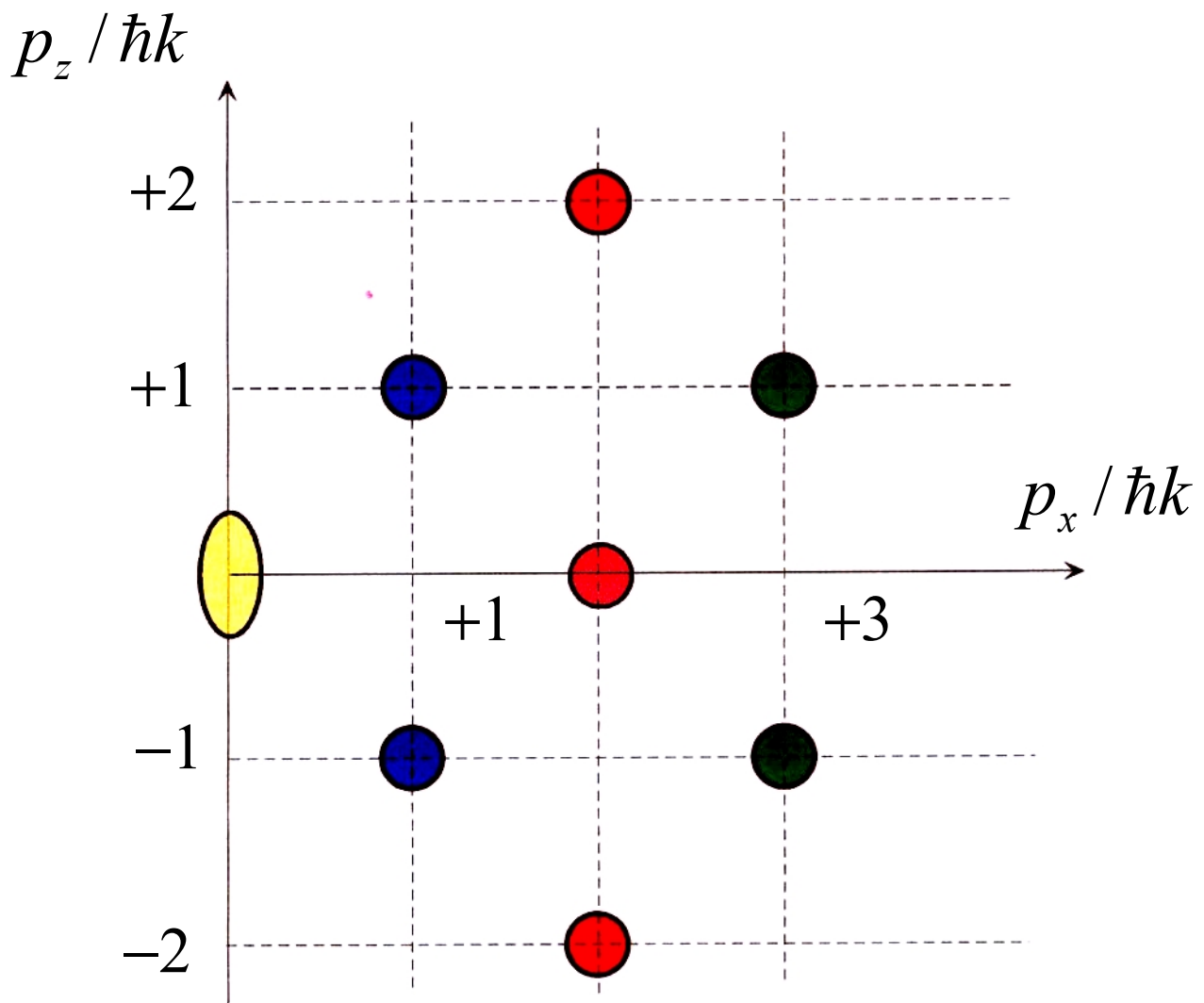
Comme il y a déjà des photons émis dans les directions $\pm \vec{e}_z$, la seconde diffusion Rayleigh se fera préférentiellement dans ces mêmes directions et l'impulsion transférée aux 2 nuages vaudra $\hbar k$ suivant \vec{e}_x , $\pm \hbar k$ suivant \vec{e}_z . La seconde diffusion sur les 2 premiers nuages qui reculent fait donc apparaître 3 nuages en $p_x = 2\hbar k$,
 $p_z = 0, \pm 2\hbar k$.

Et ainsi de suite...

Impulsion des différents nuages obtenus au cours de la cascade de diffusions

Axe Oz : Axe du condensat

Axe Ox : Direction des photons laser \vec{k}_0



Cette figure donne aussi l'allure de l'image de temps de vol.

Voir les figures 1F et 1G de la référence 18

Vitesse de variation de N_j

Le nombre N_j d'atomes reculant dans la direction \vec{K}_j est égale au nombre de photons diffusés autour de la direction \vec{k}_i de l'axe de condensat.

A partir du taux de diffusion obtenu en T-177, on peut donc écrire

$$\dot{N}_j = G_j N_j$$

avec

$$G_j = R_1 \frac{\sin^2 \theta_j}{2\pi/3} N_0 \Omega_i$$

A cette vitesse de variation "stimulée" par la présence du réseau de densité formé par les N_j atomes reculant, il faut ajouter le taux de diffusion "spontanée" dans le même angle solide Ω_i

$$R_1 \frac{\sin^2 \theta_j}{2\pi/3} N_0 \Omega_i$$

On a donc finalement

$$\dot{N}_j = G_j (N_j + 1)$$

Vitesse de dépletion du condensat

En l'absence de superradiance

(polarisations parallèles)

L'excès de diffusion dû au réseau de densité est négligeable.

On peut donc négliger le terme $G_j N_j$ dans \dot{N}_j et écrire

$$\dot{N}_0 = -\sum_j \dot{N}_j = -\sum_j G_j$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \sum_j G_j &= R_1 N_0 \sum_{\Omega_i} \frac{\sin^2 \theta_j}{2\pi/3} \Omega_i \\ &= R_1 N_0 \int d^2\Omega \frac{\sin^2 \theta}{2\pi/3} = R_1 N_0 \end{aligned}$$

Le condensat se vide donc avec un taux constant R_1 .

Voir la courbe avec des rondes vides sur la figure 2 de la référence 18.

Vitesse de dépletion du condensat

(suite)

En présence de superradiance

(polarisations perpendiculaires)

$$\dot{N}_j = G_j (N_j + 1)$$

Au début ($N_j \ll 1$), N_j commence par croître sous l'effet des processus de diffusion spontanés.

Puis quand N_j est devenu supérieur à 1, on peut écrire $\dot{N}_j = G_j N_j$, ce qui montre que N_j croît exponentiellement.

Le condensat se vide donc de plus en plus vite, cette décroissance se ralentissant bien sûr quand N_0 a suffisamment diminué

$$(G_j \propto N_0).$$

Comportement caractéristique d'un phénomène de superradiance (refs. 19, 20) amortissement de plus en plus rapide de l'état initial.

Voir courbe avec des ronds pleins sur la figure 2 de la référence 18.

Observation de la lumière diffusée le long de l'axe du condensat

On observe effectivement que le recul des atomes dans la direction \vec{K}_j est accompagné d'une émission de lumière dans la direction de l'axe du condensat.

Cette lumière est émise dans un angle solide correspondant à la diffraction d'une source de $14\mu\text{m}$ de diamètre (diamètre de la section du condensat par un plan perpendiculaire à son axe).

La lumière est émise sous forme d'une impulsion avec un flanc de montée très raide, qui reflète la décroissance de plus en plus rapide de N_0 dans la phase initiale du processus.

Voir figures A et B de la figure 3 de la référence 18

Existence d'un seuil pour la super-radiance

Le réseau de densité a un temps de vie fini. En effet, l'onde de matière associée aux atomes qui reculent quitte le condensat avec lequel elle interfère au bout d'un temps $\tau \simeq l / (\hbar k / m)$, où l est la dimension typique du condensat.

On peut écrire $\tau \simeq 1 / k \delta v$ avec $\delta v = \delta p / m$ et $\delta p = \hbar / l$

On retrouve ainsi l'inverse de la largeur Doppler des spectres de diffusion étudiés dans le cours V. La largeur due aux interactions intervient elle aussi dans l'amortissement du réseau de densité.

Il faut donc remplacer $\dot{N}_j = G_j N_j$ par $\dot{N}_j = (G_j - L_j) N_j$, où L_j est le taux d'amortissement du réseau de densité.

La diffusion superradiante n'est donc possible que si l'intensité laser (R_1) est suffisamment grande pour que $G_j > L_j$

Observation expérimentale du seuil

Voir la figure 3C de la référence 18

Importance d'avoir un condensat pour observer ces phénomènes de superradiance

La longueur de cohérence d'un condensat est très grande, de l'ordre de son extension spatiale (voir Cours 1999-2000).

Le temps de vie du réseau de densité est donc très long. L'empreinte laissée dans le condensat par les premiers processus de diffusion demeure présente assez longtemps pour influencer les processus de diffusion suivants.

Avec un nuage thermique, cette durée de vie du réseau de densité est beaucoup trop courte pour faire apparaître des corrélations entre diffusions de Rayleigh successives.

Références

18. S.Inouye,A.Chikkatur, D.Stamper-Kurn, J.Stenger, D.Pritchard, W.Ketterle, Science **285**, 571 (1999).
19. R.H.Dicke, Phys.Rev. **93**, 93 (1954).
20. R.H.Dicke, in Proceedings of the Third International Conference on Quantum Electronics, ed. by P.Grivet and N.Bloembergen, Columbia University Press, 1964, p.35.