Etude de la 2ème détection

T.149

$\varphi(x_2/x_1)$ = Probabilité conditionnelle de détecter le 2ème atome en x_2 sachant que l'on détecté le 1er en x_1.

$$\varphi(x_2/x_1) = \frac{\varphi(x_2,x_1)}{\varphi(x_1)}$$

$$= \frac{1}{N(N-1)} \langle \xi^{(1)} | \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 | \xi^{(1)} \rangle$$

$$+ \frac{1}{N(N-1)} \left[\langle \xi^{(1)} | \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 | \xi^{(1)} \rangle e^{2i\pi x_2} + c.c. \right]$$

Terme en $\langle \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 \rangle$

$$\frac{1}{N(N-1)} (N-1) \langle \xi^{(1)} | \xi^{(1)} \rangle = \frac{1}{N(N-1)} (N-1) N = 1$$

Termes en $\langle \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 \rangle$ et $\langle \hat{a}_2^+ \hat{a}_1 \rangle$

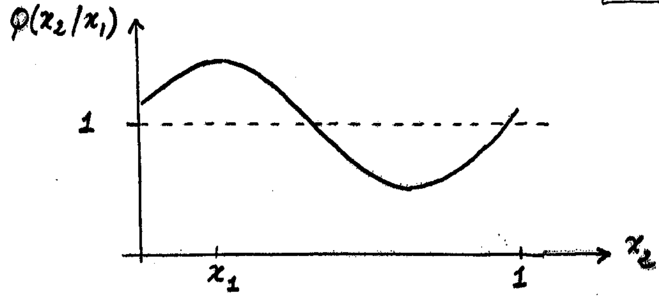
$$\frac{1}{N(N-1)} \frac{N}{2} \left(\langle \tfrac{N}{2}-1, \tfrac{N}{2} | + e^{-2i\pi x_1} \langle \tfrac{N}{2}, \tfrac{N}{2}-1 | \right) \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 \left(| \tfrac{N}{2}-1, \tfrac{N}{2} \rangle + e^{2i\pi x_1} | \tfrac{N}{2}, \tfrac{N}{2}-1 \rangle \right) e^{2i\pi x_2} + c.c.$$

$$= \frac{1}{N(N-1)} \frac{N^2}{4} e^{2i\pi(x_2-x_1)} + c.c.$$

$$= \frac{N}{2(N-1)} \cos 2\pi(x_2-x_1) \simeq \frac{1}{2} \cos 2\pi(x_2-x_1) \quad \text{si } N \gg 1$$

Allure de $\varphi(x_2/x_1) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi(x_2-x_1)$

T.150



Alors que $\varphi(x_1)$ est uniforme, $\varphi(x_2/x_1)$ présente, en fonction de x_2, une oscillation spatiale d'amplitude relative 1/2 par rapport à la moyenne spatiale de $\varphi(x_2/x_1)$ (qui vaut 1) et de phase $\phi_1 = 2\pi x_1$. $\varphi(x_2/x_1)$ est maximal pour $x_2 = x_1$

Alors que les franges ne sont pas visibles sur $\varphi(x_1)$, elles ont une visibilité 1/2 sur $\varphi(x_2/x_1)$ après la 1ère détection

On peut utiliser $\varphi(x_2/x_1)$ pour tirer au sort x_2 suivant cette loi de probabilité

Généralisation

T.151

$$|\xi^{(2)}\rangle = \hat{\psi}(x_2)\hat{\psi}(x_1) | \tfrac{N}{2}, \tfrac{N}{2} \rangle$$

$$\langle \xi^{(2)} | \xi^{(2)} \rangle = \langle \tfrac{N}{2}, \tfrac{N}{2} | \hat{\psi}^+(x_1)\hat{\psi}^+(x_2)\hat{\psi}(x_2)\hat{\psi}(x_1) | \tfrac{N}{2}, \tfrac{N}{2} \rangle = \frac{N!}{(N-2)!} \varphi(x_2,x_1)$$

$$\varphi(x_3/x_2 x_1) = \frac{\varphi(x_3,x_2,x_1)}{\varphi(x_2,x_1)}$$

$$= \frac{(N-3)!}{N!} \frac{1}{\varphi(x_2,x_1)} \times$$

$$\langle \xi^{(2)} | \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 + \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 e^{2i\pi x_3} + \hat{a}_2^+ \hat{a}_1 e^{-2i\pi x_3} | \xi^{(2)} \rangle$$

Terme en $\langle \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 \rangle$

$$\frac{(N-3)!}{N!} \frac{1}{\varphi(x_2,x_1)} (N-2) \langle \xi^{(2)} | \xi^{(2)} \rangle = 1$$

Termes en $\langle \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 \rangle$ et $\langle \hat{a}_2^+ a_1 \rangle$

$$A(x_2,x_1) \cos\left[2\pi x_3 - \phi(x_2,x_1)\right]$$

Et ainsi de suite ...

$$\varphi(x_k / x_{k-1} \cdots x_1) =$$

$$1 + A(x_{k-1} \cdots x_1) \cos\left[2\pi x_k - \phi(x_{k-1} \cdots x_1)\right]$$

Procédure de la simulation

T.152

- On tire au hasard x_1 entre 0 et 1
- On calcule $\varphi(x_2/x_1) = 1 + A(x_1)\cos\left[2\pi x_2 - \phi(x_1)\right]$
  $A(x_1) = \frac{1}{2}$ $\quad \phi(x_1) = 2\pi x_1$
- On tire une valeur de x_2 suivant la loi de probabilité $\varphi(x_2/x_1)$
- On calcule
  $\varphi(x_3/x_2 x_1) = 1 + A(x_2 x_1)\cos\left[2\pi x_3 - \phi(x_2 x_1)\right]$

  Le calcul analytique de $A(x_2 x_1)$ et $\phi(x_2 x_1)$ devient de plus en plus complexe

  Il est plus simple de calculer 2 valeurs de $\varphi(x_3/x_2 x_1)$ numériquement pour 2 valeurs x'_3 et x''_3 de x_3 et d'en déduire les valeurs numériques des 2 paramètres du problème $A(x_2,x_1)$ et $\phi(x_2 x_1)$
- On tire une valeur de x_3 suivant la loi $1 + A(x_2,x_1)\cos\left[2\pi x_3 - \phi(x_2,x_1)\right]$
- Et ainsi de suite ...