Autre forme plus commode du signal

T-145

- Dans l'expression de $p(x_k t_k \dots x_1 t_1)$, on voit apparaître (voir T-143)

$$\hat\psi(x_k)\dots\hat\psi(x_1)|\chi_i\rangle = \hat\psi(x_k)\dots\hat\psi(x_1)\left|\tfrac{N}{2},\tfrac{N}{2}\right\rangle$$

qui est un état propre de $\hat N = \hat a_1^+\hat a_1 + \hat a_2^+\hat a_2$ de valeur propre $N-k$. On peut donc remplacer l'opérateur $e^{-\Gamma\hat N t}$ par $e^{-\Gamma(N-k)t}$, ce qui donne

$$p(x_k t_k, \dots x_1 t_1) = \Gamma^k e^{-\Gamma(t_1+t_2+\dots+t_k)}\, e^{-\Gamma(N-k)t_k} \times$$
$$\left\langle\tfrac{N}{2},\tfrac{N}{2}\right|\hat\psi^+(x_1)\dots\hat\psi^+(x_k)\,\hat\psi(x_k)\dots\hat\psi(x_1)\left|\tfrac{N}{2},\tfrac{N}{2}\right\rangle$$

Dépendance purement spatiale du signal

Attendons un temps suffisamment long pour que les k premières détections se soient certainement produites.

La probabilité pour que les k premières détections aient eu lieu en $x_1\, x_2 \dots x_k$, quels que soient les instants $t_1 < t_2 \dots < t_k$ auxquels elles se sont produites est égale à

$$\varphi(x_k, \dots x_1) = \int\dots\int_{t_k > t_{k-1} > \dots > t_2 > t_1} dt_1\, dt_2 \dots dt_k \; p(x_k t_k, \dots x_1 t_1)$$

Calcul de l'intégrale

T-146

$$I = \int_0^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^\infty dt_k \; e^{-\Gamma(t_1+t_2+\dots+t_k)}\, e^{-\Gamma(N-k)t_k}$$

$$\int_{t_{k-1}}^\infty dt_k\, e^{-\Gamma(N-k+1)t_k} = \frac{e^{-\Gamma(N-k+1)t_{k-1}}}{\Gamma(N-k+1)}$$

$$\int_{t_{k-2}}^\infty dt_{k-1}\; e^{-\Gamma(N-k+2)t_{k-1}} = \frac{e^{-\Gamma(N-k+2)t_{k-2}}}{\Gamma(N-k+2)}$$

Et ainsi de suite ...

On obtient finalement

$$I = \frac{1}{\Gamma^k}\,\frac{1}{(N-k+1)(N-k+2)\dots N} = \frac{(N-k)!}{\Gamma^k\, N!}$$

On en déduit

$$\varphi(x_k \dots x_2\, x_1) = \frac{(N-k)!}{N!} \times$$
$$\left\langle\tfrac{N}{2},\tfrac{N}{2}\right|\hat\psi^+(x_1)\hat\psi^+(x_2)\dots\hat\psi^+(x_k)\,\hat\psi(x_k)\dots\hat\psi(x_2)\hat\psi(x_1)\left|\tfrac{N}{2},\tfrac{N}{2}\right\rangle$$

On voit réapparaître toutes les fonctions de corrélation spatiales du cours II

Etude de la 1ère détection

T-147

$$\varphi(x_1) = \frac{(N-1)!}{N!}\left\langle\tfrac{N}{2},\tfrac{N}{2}\right|\hat\psi^+(x_1)\hat\psi(x_1)\left|\tfrac{N}{2},\tfrac{N}{2}\right\rangle$$

$$\hat\psi^+(x_1)\hat\psi(x_1) = \hat a_1^+\hat a_1 + \hat a_2^+\hat a_2 + \hat a_1^+\hat a_2\, e^{2i\pi x_1} + \hat a_2^+\hat a_1\, e^{-2i\pi x_1}$$

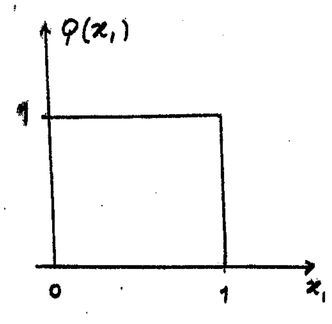
$$\left\langle\tfrac{N}{2},\tfrac{N}{2}\right|\hat a_1^+ a_1 + \hat a_2^+\hat a_2\left|\tfrac{N}{2},\tfrac{N}{2}\right\rangle = \frac{N}{2}+\frac{N}{2} = N$$

$$\left\langle\tfrac{N}{2},\tfrac{N}{2}\right|\hat a_1^+\hat a_2\left|\tfrac{N}{2},\tfrac{N}{2}\right\rangle = \left\langle\tfrac{N}{2},\tfrac{N}{2}\right|\hat a_2^+\hat a_1\left|\tfrac{N}{2},\tfrac{N}{2}\right\rangle = 0$$

On en déduit

$$\varphi(x_1) = \frac{1}{N}\, N = 1$$

$\varphi(x_1)$ est donc uniforme et ne dépend pas de x_1. Il n'y a aucune oscillation spatiale dans la probabilité de détection du 1er atome



On peut se contenter de faire varier x_1 entre 0 et 1 (voir T.135). On vérifie que $\varphi(x_1)$ est bien normalisée

$$\int_0^1 \varphi(x_1)\, dx_1 = 1$$

Saut quantique lors de la 1ère détection

T-148

- La 1ère détection projette le système dans un état proportionnel à

$$|\zeta^{(1)}\rangle = \hat\psi(x_1)\left|\tfrac{N}{2},\tfrac{N}{2}\right\rangle$$
$$= (\hat a_1 + \hat a_2\, e^{2i\pi x_1})\left|\tfrac{N}{2},\tfrac{N}{2}\right\rangle$$
$$= \sqrt{\tfrac{N}{2}}\left[\left|\tfrac{N}{2}-1,\tfrac{N}{2}\right\rangle + e^{2i\pi x_1}\left|\tfrac{N}{2},\tfrac{N}{2}-1\right\rangle\right]$$

- Notons en passant que

$$\langle\zeta^{(1)}|\zeta^{(1)}\rangle = N\,\varphi(x_1) = N$$

- On voit que $|\zeta^{(1)}\rangle$ est une superposition linéaire de $|\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}\rangle$ et $|\frac{N}{2},\frac{N}{2}-1\rangle$, c.à.d de 2 états qui n'ont pas la même valeur de N_1-N_2 (Par contre N_1+N_2 a la même valeur)

Alors que dans l'état initial $|\chi_i\rangle = |\frac{N}{2},\frac{N}{2}\rangle$, N_1-N_2 est parfaitement défini, ce n'est plus le cas après la 1ère détection, car l'atome détecté peut provenir, soit du condensat 1, soit du condensat 2