Posons $\hat{\Psi}(x,t) = e^{i\hat{H}_{eff}t/\hbar}\,\hat{\Psi}(x)\,e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar}$ T.141

$$\hat{\Psi}^+(x,t) = e^{i\hat{H}^+_{eff}t/\hbar}\,\hat{\Psi}^+(x)\,e^{-i\hat{H}^+_{eff}t/\hbar}$$

On obtient

$$P(x_2t_2,x_1t_1) = \Gamma^2 \langle\chi_i|\hat{\Psi}(x,t_1)e^{+i\hat{H}^+_{eff}t_2/\hbar}\hat{\Psi}^+(x_2)\hat{\Psi}(x_2)e^{-i\hat{H}_{eff}t_2/\hbar}\hat{\Psi}(x,t_1)|\chi_i\rangle$$

Le saut quantique associé à la 2ème détection projette le système dans l'état

$$|\chi_i(t_2+\varepsilon)\rangle = \frac{\hat{\Psi}(x_2)|\chi_i(t_2)\rangle}{\sqrt{\langle\chi_i(t_2)|\hat{\Psi}^+(x_2)\hat{\Psi}(x_2)|\chi_i(t_2)\rangle}}$$

Dénominateur : $\sqrt{P(x_2t_2/x_1t_1)/\Gamma}$

Numérateur :

$$\frac{\hat{\Psi}(x_2)\,e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar}\,\hat{\Psi}(x_1)\,e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar}|\chi_i\rangle}{\sqrt{P(x_1t_1)/\Gamma}}$$

On en déduit

$$|\chi_i(t_2+\varepsilon)\rangle = \sqrt{\frac{\Gamma^2}{P(x_2t_2,x_1t_1)}}\times \hat{\Psi}(x_2)e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar}\hat{\Psi}(x_1)e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar}|\chi_i\rangle$$

A l'instant t_3, cet état est devenu T.142

$$|\chi_i(t_3)\rangle = e^{-i\hat{H}_{eff}(t_3-t_2)/\hbar}\,|\chi_i(t_2+\varepsilon)\rangle$$

$\boxed{\text{3ème détection}}$

$$P(x_3t_3,x_2t_2,x_1t_1) = P(x_3t_3/x_2t_2,x_1t_1)\;P(x_2t_2,x_1t_1)$$

$$P(x_3t_3/x_2t_2,x_1t_1) = \Gamma\langle\chi_i(t_3)|\hat{\Psi}^+(x_3)\hat{\Psi}(x_3)|\chi_i(t_3)\rangle$$

On déduit alors de l'expression de $\chi_i(t_3)$ et $|\chi_i(t_2+\varepsilon)\rangle$

$$P(x_3t_3,x_2t_2,x_1t_1) = \Gamma^3 \langle\chi_i|\hat{\Psi}^+(x_1t_1)\hat{\Psi}^+(x_2t_2)\,e^{i\hat{H}^+_{eff}t_3/\hbar}\,\hat{\Psi}^+(x_3)\hat{\Psi}(x_3)\,e^{-i\hat{H}_{eff}t_3/\hbar}\,\hat{\Psi}(x_2t_2)\hat{\Psi}(x_1t_1)|\chi_i\rangle$$

Et ainsi de suite

$$P(x_kt_k,x_{k-1}t_{k-1},\dots x_2t_2,x_1t_1) = \Gamma^k \langle\chi_i|\hat{\Psi}^+(x_1t_1)\hat{\Psi}^+(x_2t_2)\dots\hat{\Psi}^+(x_{k-1}t_{k-1})\,e^{i\hat{H}^+_{eff}t_k/\hbar}\,\hat{\Psi}^+(x_k)\hat{\Psi}(x_k)\,e^{-i\hat{H}_{eff}t_k/\hbar}\,\hat{\Psi}(x_{k-1}t_{k-1})\dots\hat{\Psi}(x_2t_2)\hat{\Psi}(x_1t_1)|\chi_i\rangle$$

On a vu plus haut (voir T-137) que T.143

$$\hat{\Psi}(x,t) = e^{i\hat{H}_{eff}t/\hbar}\,\hat{\Psi}(x)\,e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar} = e^{-i\omega_0t}e^{-\Gamma\frac{t}{2}}\,\hat{\Psi}(x)$$

$$\hat{\Psi}^+(x,t) = e^{i\hat{H}^+_{eff}t/\hbar}\,\hat{\Psi}^+(x)\,e^{-i\hat{H}^+_{eff}t/\hbar} = e^{i\omega_0t}e^{-\Gamma\frac{t}{2}}\,\hat{\Psi}^+(x)$$

Calcul de $\hat{A} = e^{i\hat{H}^+_{eff}t/\hbar}\,\hat{\Psi}^+(x)\hat{\Psi}(x)\,e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar}$

$$\hat{A} = e^{i\hat{H}^+_{eff}t/\hbar}\,\hat{\Psi}^+(x)\,e^{-i\hat{H}^+_{eff}t/\hbar}\times e^{i\hat{H}^+_{eff}t/\hbar}\,e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar}\times e^{i\hat{H}_{eff}t/\hbar}\,\hat{\Psi}(x)\,e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar}$$

$$= \hat{\Psi}^+(x,t)\,e^{i(\hat{H}^+_{eff}-\hat{H}_{eff})t/\hbar}\,\hat{\Psi}(x,t)$$

D'après (T-   )

$$\hat{H}^+_{eff}-\hat{H}_{eff} = i\Gamma(\hat{a}_1^+\hat{a}_1+\hat{a}_2^+\hat{a}_2) = i\Gamma\hat{N}$$

On en déduit que

$$e^{i\hat{H}^+_{eff}t/\hbar}\,\hat{\Psi}^+(x)\hat{\Psi}(x)\,e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar} = \hat{\Psi}^+(x,t)\,e^{-\Gamma\hat{N}t}\,\hat{\Psi}(x,t)$$

Finalement,

$$P(x_kt_k,x_{k-1}t_{k-1},\dots x_2t_2,x_1t_1) = \Gamma^k \langle\chi_i|\hat{\Psi}^+(x_1t_1)\dots\hat{\Psi}^+(x_kt_k)e^{-\Gamma\hat{N}t_k}\hat{\Psi}(x_kt_k)\dots\hat{\Psi}(x_1t_1)|\chi_i\rangle$$

$$= \Gamma^k e^{-\Gamma(t_1+t_2+\dots+t_k)}\times \langle\chi_i|\hat{\Psi}^+(x_1)\dots\hat{\Psi}^+(x_k)e^{-\Gamma\hat{N}t_k}\hat{\Psi}(x_k)\dots\hat{\Psi}(x_1)|\chi_i\rangle$$

Simulations Monte-Carlo de la figure d'interférence (Refs 8 à 10) T.144

But de ces simulations

- Montrer que, même si l'on part initialement d'un état de Fock $|\chi_i\rangle = |\frac{N}{2},\frac{N}{2}\rangle$ où chaque condensat contient un nombre bien défini d'atomes (ici égal à $N/2$), une figure d'interférence très visible peut apparaître au cours d'une réalisation expérimentale.
- Simulation basée sur la description des processus de détection en termes de sauts quantiques et permettant de prédire les positions où les atomes sont detectés les uns après les autres
- Des calculs plus analytiques, utilisant les états cohérents relatifs, seront ensuite présentés dans le § 5 suivant pour comprendre l'évolution de la distribution de la phase relative