Hamiltonien effectif H_{eff}

T-137

- L'évolution libre d'un état de base $|N_1, N_2>$ est de la forme $\exp[-i(N_1+N_2)\omega_0 t]$ où $\hbar\omega_0$ est l'énergie individuelle des états k_1 et k_2, supposée la même pour k_1 et k_2 (on néglige les interactions)
- Le taux de départ Γ identique pour les 2 condensats, entraine également une décroissance exponentielle de l'amplitude d'être dans $|N_1, N_2>$, de la forme $\exp\{-\Gamma(N_1+N_2)t\}$

On en déduit que

$$\hat{H}_{eff} = \hbar\left(\omega_0 - i\frac{\Gamma}{2}\right)\left(\hat{a}_1^+\hat{a}_1 + \hat{a}_2^+\hat{a}_2\right)$$

- En comparant les éléments de matrice des 2 membres de chaque identité dans la base $\{|N_1>\}$ ou $\{|N_2>\}$, on déduit aisément les identités

$$e^{i\hat{H}_{eff}t/\hbar}\,\hat{a}_1\,e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar} = e^{-i\omega_0 t}e^{-\Gamma\frac{t}{2}}\,\hat{a}_1$$

$$e^{i\hat{H}_{eff}^+t/\hbar}\,\hat{a}_1^+\,e^{-i\hat{H}_{eff}^+t/\hbar} = e^{i\omega_0 t}e^{-\Gamma\frac{t}{2}}\,\hat{a}_1^+$$

et des identités équivalentes pour $\hat{a}_2$ et $\hat{a}_2^+$

Construction pas à pas du signal de détection pour une réalisation donnée

T-138

Etat initial des 2 condensats

Mélange statistique d'états $|\chi_i>$ avec des poids statistiques p_i : $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\chi_i><\chi_i|$

Le calcul sera fait pour chaque état $|\chi_i>$ du mélange, puis moyenné au niveau des probabilités sur les $|\chi_i>$

On se limite ici à la contribution d'un état $|\chi_i>$ du mélange

$\boxed{1^{\text{ère}}\text{ détection}}$

- On part de $|\chi_i>$ à $t=0$
- A l'instant t_1, cet état est devenu

$$|\chi_i(t_1)> = e^{-iH_{eff}t_1/\hbar}|\chi_i>$$

Aucune détection n'a encore eu lieu
- La probabilité de détecter un atome en x_1 à l'instant t_1 vaut

$$P(x_1 t_1) = \Gamma<\chi_i(t_1)|\hat{\Psi}^+(x_1)\hat{\Psi}(x_1)|\chi_i(t_1)>$$

$$= \Gamma<\chi_i|e^{i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar}\hat{\Psi}^+(x_1)\hat{\Psi}(x_1)e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar}|\chi_i>$$

Etat du système à $t_1+\varepsilon$, c-à-d immédiatement après la $1^{\text{ère}}$ detection

T-139

- Le saut quantique correspondant à la disparition d'un atome en x_1 à l'instant t_1 porte le système dans l'état

$$|\chi_i(t_1+\varepsilon)> \;\propto\; \hat{\Psi}(x_1)|\chi_i(t_1)>$$

- Pour normer cet état, il faut le diviser par la racine carrée de sa norme

$$|\chi_i(t_1+\varepsilon)> = \frac{\hat{\Psi}(x_1)|\chi_i(t_1)>}{\sqrt{<\chi_i(t_1)|\hat{\Psi}^+(x_1)\hat{\Psi}(x_1)|\chi_i(t_1)>}}$$

- D'après T- , le dénominateur du $2^{\text{ème}}$ membre vaut $\sqrt{P(x_1t_1)/\Gamma}$, de sorte que

$$|\chi_i(t_1+\varepsilon)> = \sqrt{\frac{\Gamma}{P(x_1t_1)}}\;\hat{\Psi}(x_1)|\chi_i(t_1)>$$

$$= \sqrt{\frac{\Gamma}{P(x_1t_1)}}\;\hat{\Psi}(x_1)e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar}|\chi_i>$$

A l'instant $t_2 > t_1$, et s'il n'y a pas eu d'autre détection après la $1^{\text{ère}}$, cet état est devenu

$$|\chi_i(t_2)> = e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar}|\chi_i(t_1+\varepsilon)>$$

$\boxed{2^{\text{ème}}\text{ détection}}$

T-140

$P(x_2t_2, x_1t_1)$ = Probabilité de détecter un atome en x_1t_1 et un autre atome en x_2t_2

$$P(x_2t_2, x_1t_1) = P(x_2t_2/x_1t_1)\;P(x_1t_1)$$

$P(x_2t_2/x_1t_1)$ = Probabilité conditionnelle de détecter un atome en x_2t_2 sachant qu'on a detecté un atome en x_1t_1

Si l'on a detecté un atome en x_1t_1, l'état du système à l'instant t_2 est (voir T-139)

$$|\chi_i(t_2)> = e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar}|\chi_i(t_1+\varepsilon)>$$

On a donc

$$P(x_2t_2/x_1t_1) = \Gamma<\chi_i(t_2)|\hat{\Psi}^+(x_2)\hat{\Psi}(x_2)|\chi_i(t_2)> =$$

$$= \Gamma<\chi_i(t_1+\varepsilon)|e^{i\hat{H}_{eff}^+(t_2-t_1)/\hbar}\hat{\Psi}^+(x_2)\Psi(x_2)\,e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar}|\chi_i(t_1+\varepsilon)>$$

$$= \frac{\Gamma^2}{P(x_1t_1)}<\chi_i|e^{i\hat{H}_{eff}^+t_1/\hbar}\hat{\Psi}^+(x_1)\,e^{i\hat{H}_{eff}^+(t_2-t_1)/\hbar}\,\hat{\Psi}^+(x_2)\hat{\Psi}(x_2)e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar}\hat{\Psi}(x_1)e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar}|\chi_i>$$