

Emergence d'une phase relative
sous l'effet des processus de détections

- ① Introduction T.125 - T.127
- Objet de ce cours
 - Idée physique
 - Démarche suivie
- ② Processus dissipatifs et sauts quantiques T.128 - T.133
- Exemples de processus dissipatifs
 - Description usuelle par équations piloté
 - Description en termes de sauts quantiques
 - Un exemple simple : cascade radiative de l'atome habillé
 - Généralisation
- ③ Probabilité d'une séquence donnée de processus de détection
- Modèle choisi - Notations - Hamiltonien effectif ^{T.134 -} T.143
 - Construction pas à pas du signal de détection dans une réalisation expérimentale donnée
 - Etat initial du condensat
 - Etude des 3 premières détections - Généralisations
- ④ Simulation Monte Carlo de la figure d'interférence T.144 - T.156
- But de ces simulations
 - Dépendance spatiale du signal de détection
 - Tirage au sort des positions des atomes détectés
 - Etude des 3 premières détections - Généralisations
 - Visibilité conditionnelle et phase conditionnelle
 - Quelques exemples de résultats de simulation

Références p. V-10

Emergence d'une phase relative entre 2 condensats

T-125

Problème posé

2 condensats indépendants n'ont pas en général une phase relative bien définie.

Peut-on néanmoins observer des franges d'interférence dans la zone de recouvrement de ces condensats ?

Objet de ce cours

Montrer que au fur et à mesure que les atomes sont détectés, une phase relative s'établit, de sorte qu'une figure d'interférence peut être observée.

C'est le processus de détection qui fait apparaître une phase relative.

D'une réalisation expérimentale à l'autre, la valeur de la phase relative obtenue change aléatoirement.

Idée physique

T-126

L'exemple le plus simple d'état quantique de 2 condensats sans phase relative bien définie est un produit d'états de Fock $|N_1\rangle \otimes |N_2\rangle = |N_1, N_2\rangle$

Dans un tel état, la dispersion sur $N_1 - N_2$ est nulle, et la variable conjuguée de $N_1 - N_2$, φ , est très mal définie.

Chaque atome détecté a une certaine amplitude de provenir du condensat 1, et une autre de provenir du condensat 2.

Chaque détection fait donc apparaître une dispersion sur $N_1 - N_2$.

L'augmentation progressive de cette dispersion au fur et à mesure que les atomes sont détectés, diminue donc corrélativement la dispersion sur φ .

Démarche suivie

T-127

Calcul de la probabilité de détecter, au cours d'une réalisation expérimentale, un atome en x_1 , puis un atome en x_2 , ... puis un atome en x_k .

$$W(x_k, x_{k-1}, \dots, x_2, x_1)$$

Ensuite, 2 manières différentes d'utiliser un tel résultat.

- ① Simulation numérique de type Monte-Carlo basée sur la probabilité $W(x_k, \dots, x_1)$.

Constatation que la figure formée par les positions des atomes détectés fait apparaître des franges.

- ② Etude à partir de W de la manière dont la distribution des valeurs possibles de la phase relative évolue au cours du temps et s'affine de plus en plus autour d'une valeur donnée.

Description quantique d'un processus dissipatif

T-128

Exemples de processus dissipatifs

- Emission spontanée de photons par des atomes excités
- Ionisation d'un atome par un rayonnement incident
- Détection optique d'un atome d'un condensat. L'atome disparaît de l'état dans lequel il était condensé, est transféré dans un autre état et quitte très vite la zone d'observation.

Existence de 2 échelles de temps $\tau_c, \tau_R \gg \tau_c$

τ_R est le "temps de relaxation" décrivant l'amortissement des grandeurs physiques.

τ_c est le "temps de corrélation" caractérisant la mémoire des processus microscopiques responsables de la relaxation.

Par exemple, pour l'émission spontanée, τ_R est la durée de vie de l'état excité, τ_c le temps de corrélation des fluctuations du vide.

Description par équation pilote T-129

Description quantique la plus courante d'un processus dissipatif

La condition $T_R \gg T_c$ permet de faire une approximation de Markov et d'obtenir une équation différentielle pour l'opérateur densité réduit $\hat{\rho}$ décrivant le système subissant la relaxation

Exemple : Oscillateur harmonique amorti [Ref. 1 - Complément Biv)

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = -i\omega_0 [\hat{b}^\dagger \hat{b}, \hat{\rho}] - \frac{\Gamma}{2} [\hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{b}^\dagger \hat{b}] + \Gamma \hat{b}^\dagger \hat{\rho} \hat{b}$$

1^{ère} ligne : Evolution libre de fréquence ω_0

\hat{b}^\dagger (\hat{b}) : Opérateurs de création (destruction) de l'oscillateur

2^{ème} ligne : Amortissement avec un taux Γ

Par exemple pour $\hat{\rho}_{nn} = \langle n | \hat{\rho} | n \rangle$, on a

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_{nn} = -n\Gamma \hat{\rho}_{nn} + (n+1)\Gamma \hat{\rho}_{n+1, n+1}$$

Description en termes de sauts quantiques T-130

- L'équation pilote décrit l'évolution moyenne d'un ensemble statistique de systèmes préparés tous dans les mêmes conditions
- L'observation de sauts quantiques sur la lumière de fluorescence émise par un ion unique piégé a stimulé le développement d'autres approches théoriques permettant de décrire l'évolution d'un seul système
- Description de l'évolution de ce système comme formée d'une suite de périodes d'évolution cohérente, où l'évolution de la fonction d'onde est régie par un hamiltonien effectif non hermitique, séparées par des sauts quantiques se produisant à des instants aléatoires

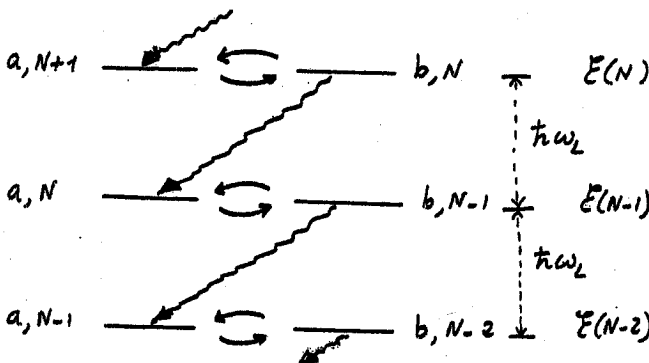
Fonction délai, Wave Function Monte Carlo, Stochastic wave functions, Quantum trajectories, Voir Refs. 2 à 7

Un exemple simple : Cascade radiative de l'atome habillé (Ref. 1, Chap. VI) T-131

- Atome à 2 niveaux a, b, dans un champ laser monomode de fréquence ω_L .

N : Nombre de photons laser

- Les états non couplés du système se groupent en multiplicités $E(N)$ de 2 états très proches $\{|a, N+1\rangle, |b, N\rangle\}$, la distance entre 2 multiplicités adjacentes étant $\hbar\omega_L$



Couplages $\hbar\Omega_1/2$ entre $|a, N+1\rangle$ et $|b, N\rangle$ (Ω_1 : fréquence de Rabi) décrivant les processus d'absorption et d'émission stimulée de photons laser

Description de la cascade radiative T-132

- L'atome entre dans $E(N)$ à un certain instant ($t=0$) après émission spontanée d'un photon qui le projette dans $|a, N+1\rangle$
- Il évolue ensuite pendant un certain temps dans $E(N)$ en oscillant entre $|a, N+1\rangle$ et $|b, N\rangle$ (précession de Rabi)

Evolution décrite par l'opérateur d'évolution restreint à l'intérieur de E_N
 $P_N e^{-i\hat{H}t/\hbar} P_N$ P_N : Projecteur sur E_N

Equivalence avec l'évolution régie par un hamiltonien effectif \hat{H}_{eff} non hermitique (la norme n'est pas conservée car le système ne reste pas indéfiniment dans $E(N)$)

$$\hat{H}_{eff} = \hbar \begin{pmatrix} \omega_L - \omega_A & \Omega_1/2 \\ \Omega_1/2 & -i\Gamma/2 \end{pmatrix} \quad \Gamma : \text{Taux de départ de } |b, N\rangle \text{ par émission spontanée}$$

- Probabilité d'effectuer un saut quantique vers $|a, N\rangle$ par émission spontanée à partir de $|b, N\rangle$

$$K(t) dt = \Gamma | \langle b, N | e^{-i\hat{H}_{eff} t/\hbar} | a, N+1 \rangle |^2$$

$K(t)$: Fonction délai

- On peut tirer l'instant t où se produit le saut $|b, N\rangle \rightarrow |a, N\rangle$ à partir de $K(t)$ T-133
- Après le saut $|b, N\rangle \rightarrow |a, N\rangle$, l'atome commence une nouvelle période d'évolution cohérente dans $E(N-1)$ jusqu'au prochain saut quantique $|b, N-1\rangle \rightarrow |a, N-1\rangle$
Et ainsi de suite
- La fonction délai $K(\tau)$ donne la distribution des intervalles de temps τ séparant 2 émissions spontanées successives
- A partir de $K(\tau)$, on peut simuler la suite aléatoire de processus d'émission et interpréter toutes les propriétés statistiques des signaux des détecteurs observant les photons de fluorescence
- Généralisation possible à des systèmes plus complexes (atomes à plusieurs niveaux) et interprétation d'effets variés comme la fluorescence intermittente, le piégeage cohérent de populations...

Probabilité d'une séquence donnée de processus de détection $P(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)$ T-134

Modèle choisi

- 2 condensats indépendants
- Les états ψ_1 et ψ_2 dans lesquels les atomes sont condensés sont approximatés par 2 ondes planes de vecteurs d'onde opposés le long de Ox : $k_1 = -k$ $k_2 = +k$
- Le recouvrement des condensats est déjà réalisé
- Pour simplifier, on néglige l'effet de la gravité le long de Oz
- La détection des atomes fait disparaître les atomes des 2 condensats avec un taux Γ supposé être le même pour les 2 condensats. Détecteurs supposés parfaits
- On néglige dans une première étape les interactions entre atomes

Calcul de N T-135

En prenant la moyenne spatiale du signal précédent, on obtient

$$\overline{P(x)} dx dt = N [P_1(x) + P_2(x)] dx dt$$

$$P_1(x) = \langle \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \rangle \quad P_2(x) = \langle \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 \rangle$$

D'après l'hypothèse faite plus haut sur le taux de disparition des atomes dû à la détection, on a

$$N = \Gamma$$

Changement d'unités

On prend λ pour unité de longueur

$$k = \frac{\pi}{\lambda} = \pi$$

On peut alors écrire

$$\hat{\Psi}(x) = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 e^{i\varphi(x)} \quad \hat{\Psi}^+(x) = \hat{a}_1^+ + \hat{a}_2^+ e^{-i\varphi(x)}$$

avec $\varphi(x) = 2\pi x$

On peut se contenter de faire varier x entre 0 et 1, ce qui revient à faire varier $\varphi(x)$ entre 0 et 2π

A chaque x correspond un $\varphi(x)$

Opérateurs champ T-136

$$\hat{\Psi}(x) = \hat{a}_1 e^{ik_1 x} + \hat{a}_2 e^{ik_2 x}$$

$$= e^{-ikx} [\hat{a}_1 + \hat{a}_2 e^{2ikx}]$$

$$\hat{\Psi}^+(x) = e^{ikx} [\hat{a}_1^+ + \hat{a}_2^+ e^{-2ikx}]$$

Dans toutes les expressions qui suivent, chaque $\hat{\Psi}(x)$ est associé à un $\hat{\Psi}^+(x)$, de sorte qu'on peut ignorer les $e^{\pm ikx}$ en facteur

$$\hat{\Psi}(x) = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 e^{2ikx}$$

$$\hat{\Psi}^+(x) = \hat{a}_1^+ + \hat{a}_2^+ e^{-2ikx}$$

Probabilité $P(x) dx dt$ de détecter un atome dans l'intervalle dx et pendant dt

$$P(x) = N \langle \hat{\Psi}^+(x) \hat{\Psi}(x) \rangle$$

N : Constante de normalisation

$$P(x) = N \langle (\hat{a}_1^+ + \hat{a}_2^+ e^{-2ikx}) (\hat{a}_1 + \hat{a}_2 e^{2ikx}) \rangle$$

Signal périodique en x de période spatiale

$$\lambda = \frac{\pi}{k}$$

Hamiltonien effectif Heff T-137

- L'évolution libre d'un état de base $|N_1, N_2\rangle$ est de la forme $\exp[-i(N_1+N_2)\omega_0 t]$ où $\hbar\omega_0$ est l'énergie individuelle des états k_1 et k_2 , supposée la même pour k_1 et k_2 (on néglige les interactions)
- Le taux de départ Γ , identique pour les 2 condensats, entraîne également une décroissance exponentielle de l'amplitude d'être dans $|N_1, N_2\rangle$, de la forme $\exp[-\Gamma(N_1+N_2)t]$

On en déduit que

$$\hat{H}_{eff} = \hbar(\omega_0 - i\frac{\Gamma}{2})(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2)$$

- En comparant les éléments de matrice des 2 membres de chaque identité dans la base $\{|N_1\rangle\}$ ou $\{|N_2\rangle\}$, on déduit aisément les identités

$$e^{i\hat{H}_{eff}t/\hbar} \hat{a}_1 e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar} = e^{-i\omega_0 t} e^{-\frac{\Gamma t}{2}} \hat{a}_1$$

$$e^{i\hat{H}_{eff}t/\hbar} \hat{a}_1^\dagger e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar} = e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{\Gamma t}{2}} \hat{a}_1^\dagger$$

et des identités équivalentes pour \hat{a}_2 et \hat{a}_2^\dagger

Construction pas à pas du signal T-138

de détection pour une réalisation donnée

Etat initial des 2 condensats

Mélange statistique d'états $|X_i\rangle$ avec des poids statistiques p_i : $\hat{\rho} = \sum_i p_i |X_i\rangle \langle X_i|$

Le calcul sera fait pour chaque état $|X_i\rangle$ du mélange, puis moyenné au niveau des probabilités sur les $|X_i\rangle$

On se limite ici à la contribution d'un état $|X_i\rangle$ du mélange

1^{ère} détection

- On part de $|X_i\rangle$ à $t=0$
- A l'instant t_1 , cet état est devenu $|X_i(t_1)\rangle = e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar} |X_i\rangle$
- Aucune détection n'a encore eu lieu
- La probabilité de détecter un atome en x_1 à l'instant t_1 vaut $P(x_1, t_1) = \Gamma \langle X_i(t_1) | \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \hat{\Psi}(x_1) | X_i(t_1) \rangle = \Gamma \langle X_i | e^{i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar} \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \hat{\Psi}(x_1) e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar} | X_i \rangle$

Etat du système à $t_1 + \epsilon$, c.-à-d T-139

immédiatement après la 1^{ère} détection

- Le saut quantique correspondant à la disparition d'un atome en x_1 à l'instant t_1 porte le système dans l'état

$$|X_i(t_1 + \epsilon)\rangle \propto \hat{\Psi}(x_1) |X_i(t_1)\rangle$$

- Pour normer cet état, il faut le diviser par la racine carrée de sa norme

$$|X_i(t_1 + \epsilon)\rangle = \frac{\hat{\Psi}(x_1) |X_i(t_1)\rangle}{\sqrt{\langle X_i(t_1) | \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \hat{\Psi}(x_1) | X_i(t_1) \rangle}}$$

- D'après T-138, le dénominateur du 2^{ème} membre vaut $\sqrt{P(x_1, t_1)/\Gamma}$, de sorte que

$$|X_i(t_1 + \epsilon)\rangle = \sqrt{\frac{\Gamma}{P(x_1, t_1)}} \hat{\Psi}(x_1) |X_i(t_1)\rangle = \sqrt{\frac{\Gamma}{P(x_1, t_1)}} \hat{\Psi}(x_1) e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar} |X_i\rangle$$

A l'instant $t_2 > t_1$, et s'il n'y a pas eu d'autre détection après la 1^{ère}, cet état est devenu

$$|X_i(t_2)\rangle = e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar} |X_i(t_1 + \epsilon)\rangle$$

2^{ème} détection T-140

$P(x_2, t_2, x_1, t_1)$ = Probabilité de détecter un atome en x_1, t_1 et un autre atome en x_2, t_2

$$P(x_2, t_2, x_1, t_1) = P(x_2, t_2 | x_1, t_1) P(x_1, t_1)$$

$P(x_2, t_2 | x_1, t_1)$ = Probabilité conditionnelle de détecter un atome en x_2, t_2 sachant qu'on a détecté un atome en x_1, t_1

Si l'on a détecté un atome en x_1, t_1 , l'état du système à l'instant t_2 est (voir T-139)

$$|X_i(t_2)\rangle = e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar} |X_i(t_1 + \epsilon)\rangle$$

On a donc

$$P(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \Gamma \langle X_i(t_2) | \hat{\Psi}^\dagger(x_2) \hat{\Psi}(x_2) | X_i(t_2) \rangle = \Gamma \langle X_i(t_1 + \epsilon) | e^{i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar} \hat{\Psi}^\dagger(x_2) \hat{\Psi}(x_2) e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar} | X_i(t_1 + \epsilon) \rangle = \frac{\Gamma^2}{P(x_1, t_1)} \langle X_i | e^{i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar} \hat{\Psi}^\dagger(x_1) e^{i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar} \hat{\Psi}^\dagger(x_2) \hat{\Psi}(x_2) e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar} \hat{\Psi}(x_1) e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar} | X_i \rangle$$

Prenons $\hat{\Psi}(x, t) = e^{i\hat{H}_{eff}t/\hbar} \hat{\Psi}(x) e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar}$ [T.141]
 $\hat{\Psi}^+(x, t) = e^{i\hat{H}_{eff}^+t/\hbar} \hat{\Psi}^+(x) e^{-i\hat{H}_{eff}^+t/\hbar}$

On obtient

$P(x_2, t_2, x_1, t_1) = \Gamma^2$
 $\langle \chi_i | \hat{\Psi}(x, t_1) e^{i\hat{H}_{eff}^+t_2/\hbar} \hat{\Psi}^+(x_2) \hat{\Psi}(x_2) e^{-i\hat{H}_{eff}t_2/\hbar} \hat{\Psi}(x, t_1) | \chi_i \rangle$

Le saut quantique associé à la 2^{ème} détection projette le système dans l'état

$|\chi_i(t_2 + \epsilon)\rangle = \frac{\hat{\Psi}(x_2) |\chi_i(t_2)\rangle}{\sqrt{\langle \chi_i(t_2) | \hat{\Psi}^+(x_2) \hat{\Psi}(x_2) | \chi_i(t_2) \rangle}}$

Dénominateur : $\sqrt{P(x_2, t_2, x_1, t_1) / \Gamma}$

Numérateur : $\frac{\hat{\Psi}(x_2) e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar} \hat{\Psi}(x_1) e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar} |\chi_i\rangle}{\sqrt{P(x_1, t_1) / \Gamma}}$

On en déduit

$|\chi_i(t_2 + \epsilon)\rangle = \sqrt{\frac{\Gamma^2}{P(x_2, t_2, x_1, t_1)}} \times$
 $\hat{\Psi}(x_2) e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar} \hat{\Psi}(x_1) e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar} |\chi_i\rangle$

On a vu plus haut (voir T.137) que [T.143]

$\hat{\Psi}(x, t) = e^{i\hat{H}_{eff}t/\hbar} \hat{\Psi}(x) e^{-i\omega_0 t} e^{-\Gamma \frac{t}{2}} \hat{\Psi}(x)$
 $\hat{\Psi}^+(x, t) = e^{i\hat{H}_{eff}^+t/\hbar} \hat{\Psi}^+(x) e^{-i\omega_0 t} e^{-\Gamma \frac{t}{2}} \hat{\Psi}^+(x)$

Calcul de $\hat{A} = e^{i\hat{H}_{eff}^+t/\hbar} \hat{\Psi}^+(x) \hat{\Psi}(x) e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar}$

$\hat{A} = e^{i\hat{H}_{eff}^+t/\hbar} \hat{\Psi}^+(x) e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar} \times$
 $e^{i\hat{H}_{eff}^+t/\hbar} e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar} \times$
 $e^{i\hat{H}_{eff}^+t/\hbar} \hat{\Psi}(x) e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar}$
 $= \hat{\Psi}^+(x, t) e^{i(\hat{H}_{eff}^+ - \hat{H}_{eff})t/\hbar} \hat{\Psi}(x, t)$

D'après (T.)

$\hat{H}_{eff}^+ - \hat{H}_{eff} = i\Gamma(\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_2) = i\Gamma \hat{N}$

On en déduit que

$e^{i\hat{H}_{eff}^+t/\hbar} \hat{\Psi}^+(x) \hat{\Psi}(x) e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar} =$
 $= \hat{\Psi}^+(x, t) e^{-\Gamma \hat{N} t} \hat{\Psi}(x, t)$

Finalement,

$P(x_k, t_k, x_{k-1}, t_{k-1}, \dots, x_2, t_2, x_1, t_1) = \Gamma^k$
 $\langle \chi_i | \hat{\Psi}^+(x, t_1) \dots \hat{\Psi}^+(x_k, t_k) e^{-\Gamma \hat{N} t_k} \hat{\Psi}(x_k, t_k) \dots \hat{\Psi}(x, t_1) | \chi_i \rangle$
 $= \Gamma^k e^{-\Gamma(t_1 + t_2 + \dots + t_k)} \times$
 $\langle \chi_i | \hat{\Psi}^+(x_1) \dots \hat{\Psi}^+(x_k) e^{-\Gamma \hat{N} t_k} \hat{\Psi}(x_k) \dots \hat{\Psi}(x_1) | \chi_i \rangle$

A l'instant t_3 , cet état est devenu [T.142]

$|\chi_i(t_3)\rangle = e^{-i\hat{H}_{eff}(t_3-t_2)/\hbar} |\chi_i(t_2 + \epsilon)\rangle$

3^{ème} détection

$P(x_3, t_3, x_2, t_2, x_1, t_1) =$
 $P(x_3, t_3, x_2, t_2, x_1, t_1) P(x_2, t_2, x_1, t_1)$

$P(x_3, t_3, x_2, t_2, x_1, t_1) = \Gamma \langle \chi_i(t_3) | \hat{\Psi}^+(x_3) \hat{\Psi}(x_3) | \chi_i(t_3) \rangle$

On déduit alors de l'expression de $|\chi_i(t_3)\rangle$ et $|\chi_i(t_2 + \epsilon)\rangle$

$P(x_3, t_3, x_2, t_2, x_1, t_1) = \Gamma^3$
 $\langle \chi_i | \hat{\Psi}^+(x, t_1) \hat{\Psi}^+(x_2, t_2) e^{i\hat{H}_{eff}^+t_3/\hbar} \hat{\Psi}^+(x_3) \hat{\Psi}(x_3) e^{-i\hat{H}_{eff}t_3/\hbar} \hat{\Psi}(x_2, t_2) \hat{\Psi}(x_1, t_1) | \chi_i \rangle$

Et ainsi de suite

$P(x_k, t_k, x_{k-1}, t_{k-1}, \dots, x_2, t_2, x_1, t_1) = \Gamma^k$
 $\langle \chi_i | \hat{\Psi}^+(x, t_1) \hat{\Psi}^+(x_2, t_2) \dots \hat{\Psi}^+(x_k, t_k) e^{i\hat{H}_{eff}^+t_k/\hbar} \hat{\Psi}^+(x_k) \hat{\Psi}(x_k) e^{-i\hat{H}_{eff}t_k/\hbar} \hat{\Psi}(x_{k-1}, t_{k-1}) \dots \hat{\Psi}(x_2, t_2) \hat{\Psi}(x_1, t_1) | \chi_i \rangle$

Simulations Monte-Carlo de la [T.144]

figure d'interférence (Refs 8 à 10)

But de ces simulations

- Montrer que, même si l'on part initialement d'un état de Fock $|\chi_i\rangle = |\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle$ où chaque condensat contient un nombre bien défini d'atomes (ici égal à $N/2$), une figure d'interférence très visible peut apparaître au cours d'une réalisation expérimentale.
- Simulation basée sur la description des processus de détection en termes de sauts quantiques et permettant de prédire les positions où les atomes sont détectés les uns après les autres
- Des calculs plus analytiques, utilisant les états cohérents relatifs, seront ensuite présentés dans le § 5 suivant pour comprendre l'évolution de la distribution de la phase relative

Autre forme plus commode du signal T-145

- Dans l'expression de $p(x_k, t_k, \dots, x_1, t_1)$, on voit apparaître (voir T-143)
 $\hat{\psi}(x_k) \dots \hat{\psi}(x_1) | \chi_i \rangle = \hat{\psi}(x_k) \dots \hat{\psi}(x_1) | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle$
 qui est un état propre de $\hat{N} = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2$
 de valeur propre $N-k$. On peut donc remplacer l'opérateur $e^{-\Gamma \hat{N} t}$ par $e^{-\Gamma(N-k)t}$, ce qui donne
 $p(x_k, t_k, \dots, x_1, t_1) = \Gamma^k e^{-\Gamma(t_1+t_2+\dots+t_k)} e^{-\Gamma(N-k)t_k} \times$
 $\langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} | \hat{\psi}^\dagger(x_1) \dots \hat{\psi}^\dagger(x_k) \hat{\psi}(x_k) \dots \hat{\psi}(x_1) | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle$

Dépendance purement spatiale du signal

Attendons un temps suffisamment long pour que les k premières détections se soient certainement produites.

La probabilité pour que les k premières détections aient eu lieu en x_1, x_2, \dots, x_k , quels que soient les instants t_1, t_2, \dots, t_k auxquels elles se sont produites est égale à

$$\varphi(x_k, \dots, x_1) = \int \dots \int_{t_k > t_{k-1} > \dots > t_2 > t_1} dt_1 dt_2 \dots dt_k p(x_k, t_k, \dots, x_1, t_1)$$

Calcul de l'intégrale T-146

$$I = \int_0^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^\infty dt_k e^{-\Gamma(t_1+t_2+\dots+t_k)} e^{-\Gamma(N-k)t_k}$$

$$\int_{t_{k-1}}^\infty dt_k e^{-\Gamma(N-k+1)t_k} = \frac{e^{-\Gamma(N-k+1)t_{k-1}}}{\Gamma(N-k+1)}$$

$$\int_{t_{k-2}}^\infty dt_{k-1} e^{-\Gamma(N-k+2)t_{k-1}} = \frac{e^{-\Gamma(N-k+2)t_{k-2}}}{\Gamma(N-k+2)}$$

Et ainsi de suite ...
 On obtient finalement

$$I = \frac{1}{\Gamma^k} \frac{1}{(N-k+1)(N-k+2)\dots N} = \frac{(N-k)!}{\Gamma^k N!}$$

On en déduit

$$\varphi(x_k, \dots, x_2, x_1) = \frac{(N-k)!}{N!} \times$$

$$\langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} | \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}^\dagger(x_2) \dots \hat{\psi}^\dagger(x_k) \hat{\psi}(x_k) \dots \hat{\psi}(x_2) \hat{\psi}(x_1) | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle$$

On voit réapparaître toutes les fonctions de corrélation spatiales du cours II

Etude de la 1^{ère} détection T-147

$$\varphi(x_1) = \frac{(N-1)!}{N!} \langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} | \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}(x_1) | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle$$

$$\hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}(x_1) = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 e^{2i\pi x_1} + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 e^{-2i\pi x_1}$$

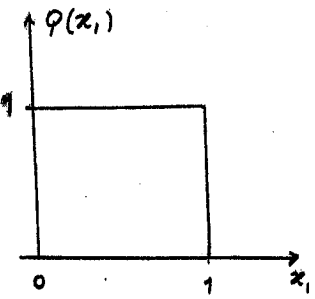
$$\langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle = \frac{N}{2} + \frac{N}{2} = N$$

$$\langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle = \langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle = 0$$

On en déduit

$$\varphi(x_1) = \frac{1}{N} N = 1$$

$\varphi(x_1)$ est donc uniforme et ne dépend pas de x_1 . Il n'y a aucune oscillation spatiale dans la probabilité de détection du 1^{er} atome



On peut se contenter de faire varier x_1 entre 0 et 1 (voir T-135). On vérifie que $\varphi(x_1)$ est bien normalisé

$$\int_0^1 \varphi(x_1) dx_1 = 1$$

Saut quantique lors de la 1^{ère} détection T-148

- La 1^{ère} détection projette le système dans un état proportionnel à

$$|\xi^{(1)}\rangle = \hat{\psi}(x_1) | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle$$

$$= (\hat{a}_1 + \hat{a}_2 e^{2i\pi x_1}) | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle$$

$$= \sqrt{\frac{N}{2}} [| \frac{N}{2}-1, \frac{N}{2} \rangle + e^{2i\pi x_1} | \frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1 \rangle]$$

- Notons en passant que

$$\langle \xi^{(1)} | \xi^{(1)} \rangle = N \varphi(x_1) = N$$

- On voit que $|\xi^{(1)}\rangle$ est une superposition linéaire de $| \frac{N}{2}-1, \frac{N}{2} \rangle$ et $| \frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1 \rangle$, c.-à-d. de 2 états qui n'ont pas la même valeur de $N_1 - N_2$ (Par contre $N_1 + N_2$ a la même valeur)

Alors que dans l'état initial $|\chi_i\rangle = | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle$, $N_1 - N_2$ est parfaitement défini, ce n'est plus le cas après la 1^{ère} détection, car l'atome détecté peut provenir, soit du condensat 1, soit du condensat 2

Etude de la 2^{ème} détection T-149

$\Phi(x_2/x_1)$ = Probabilité conditionnelle de détecter le 2^{ème} atome en x_2 sachant que l'on détecte le 1^{er} en x_1 .

$$\Phi(x_2/x_1) = \frac{\varphi(x_2, x_1)}{\varphi(x_1)}$$

$$= \frac{1}{N(N-1)} \langle \zeta^{(1)} | \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 | \zeta^{(1)} \rangle$$

$$+ \frac{1}{N(N-1)} \left[\langle \zeta^{(1)} | \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 | \zeta^{(1)} \rangle e^{2i\pi x_2} + c.c. \right]$$

Terme en $\langle \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 \rangle$

$$\frac{1}{N(N-1)} (N-1) \langle \zeta^{(1)} | \zeta^{(1)} \rangle = \frac{1}{N(N-1)} (N-1)N = 1$$

Termes en $\langle \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 \rangle$ et $\langle \hat{a}_2^+ \hat{a}_1 \rangle$

$$\frac{1}{N(N-1)} \frac{N}{2} \left(\langle \frac{N}{2}-1, \frac{N}{2} | + e^{-2i\pi x_1} \langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1 | \right)$$

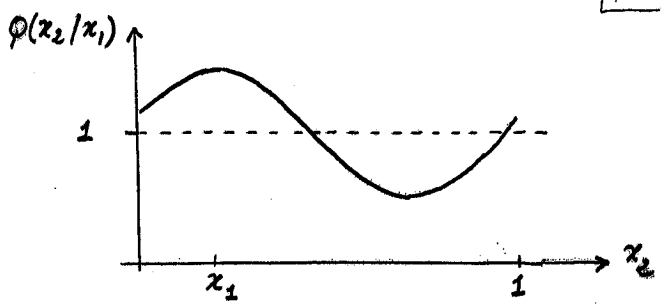
$$\hat{a}_1^+ \hat{a}_2 \left(| \frac{N}{2}-1, \frac{N}{2} \rangle + e^{2i\pi x_1} | \frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1 \rangle \right) e^{2i\pi x_2} + c.c.$$

$$= \frac{1}{N(N-1)} \frac{N^2}{4} e^{2i\pi(x_2-x_1)} + c.c.$$

$$= \frac{N}{2(N-1)} \cos 2\pi(x_2-x_1) \approx \frac{1}{2} \cos 2\pi(x_2-x_1)$$

si $N \gg 1$

Allure de $\Phi(x_2/x_1) = 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi(x_2-x_1)$ T-150



Alors que $\Phi(x_1)$ est uniforme, $\Phi(x_2/x_1)$ présente, en fonction de x_2 , une oscillation spatiale d'amplitude relative 1/2 par rapport à la moyenne spatiale de $\Phi(x_2/x_1)$ (qui vaut 1) et de phase $\varphi_1 = 2\pi x_1$. $\Phi(x_2/x_1)$ est maximal pour $x_2 = x_1$.
Alors que les franges ne sont pas visibles sur $\Phi(x_1)$, elles ont une visibilité 1/2 sur $\Phi(x_2/x_1)$ après la 1^{ère} détection.
On peut utiliser $\Phi(x_2/x_1)$ pour tirer au sort x_2 suivant cette loi de probabilité.

Généralisation T-151

$$|\zeta^{(2)}\rangle = \hat{\Psi}(x_2) \hat{\Psi}(x_1) | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle$$

$$\langle \zeta^{(2)} | \zeta^{(2)} \rangle = \langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} | \hat{\Psi}^+(x_1) \hat{\Psi}^+(x_2) \hat{\Psi}(x_2) \hat{\Psi}(x_1) | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle$$

$$= \frac{N!}{(N-2)!} \varphi(x_2, x_1)$$

$$\Phi(x_3/x_2, x_1) = \frac{\varphi(x_3, x_2, x_1)}{\varphi(x_2, x_1)}$$

$$= \frac{(N-3)!}{N!} \frac{1}{\varphi(x_2, x_1)} \times$$

$$\langle \zeta^{(2)} | \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 + \hat{a}_3^+ \hat{a}_3 e^{2i\pi x_3} + \hat{a}_2^+ \hat{a}_3 e^{-2i\pi x_3} | \zeta^{(2)} \rangle$$

Terme en $\langle \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 \rangle$

$$\frac{(N-3)!}{N!} \frac{1}{\varphi(x_2, x_1)} (N-2) \langle \zeta^{(2)} | \zeta^{(2)} \rangle = 1$$

Termes en $\langle \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 \rangle$ et $\langle \hat{a}_2^+ \hat{a}_1 \rangle$

$$A(x_2, x_1) \cos[2\pi x_3 - \varphi(x_2, x_1)]$$

Et ainsi de suite ...

$$\Phi(x_k/x_{k-1} \dots x_1) =$$

$$1 + A(x_{k-1} \dots x_1) \cos[2\pi x_k - \varphi(x_{k-1} \dots x_1)]$$

Procédure de la simulation T-152

- On tire au hasard x_1 , entre 0 et 1
- On calcule $\Phi(x_2/x_1) = 1 + A(x_1) \cos[2\pi x_2 - \varphi(x_1)]$
 $A(x_1) = \frac{1}{2}$ $\varphi(x_1) = 2\pi x_1$
- On tire une valeur de x_2 suivant la loi de probabilité $\Phi(x_2/x_1)$
- On calcule
 $\Phi(x_3/x_2, x_1) = 1 + A(x_2, x_1) \cos[2\pi x_3 - \varphi(x_2, x_1)]$
 Le calcul analytique de $A(x_2, x_1)$ et $\varphi(x_2, x_1)$ devient de plus en plus complexe
 Il est plus simple de calculer 2 valeurs de $\Phi(x_3/x_2, x_1)$ numériquement pour 2 valeurs x_3' et x_3'' de x_3 et d'en déduire les valeurs numériques des 2 paramètres du problème $A(x_2, x_1)$ et $\varphi(x_2, x_1)$
- On tire une valeur de x_3 suivant la loi $1 + A(x_2, x_1) \cos[2\pi x_3 - \varphi(x_2, x_1)]$
- Et ainsi de suite ...

Présentation des résultats

T-153

- La simulation donne ainsi les valeurs successives de x_1, x_2, \dots, x_k correspondant à une certaine réalisation
- On divise l'intervalle $[0, 1]$ des valeurs possibles de x en p intervalles et on construit l'histogramme du nombre de tirages tombant dans chaque intervalle
- A chaque étape de la simulation, on obtient 2 nombres A et φ [par exemple $A(x_2, x_1)$ et $\varphi(x_2, x_1)$] qui donnent la visibilité et la phase de la courbe donnant la dépendance spatiale de la probabilité de la détection suivante [dans cet exemple, x_3].

A et φ peuvent donc être considérés comme des visibilités et des phases conditionnelles pour une détection, connaissant les positions de toutes les détections qui la précèdent

Histogramme donnant la répartition des valeurs tirées pour x dans une simulation

T-154

Intervalle $[0, 1]$ divisé en 50 parties
 $N = 10000$ 5000 Detections

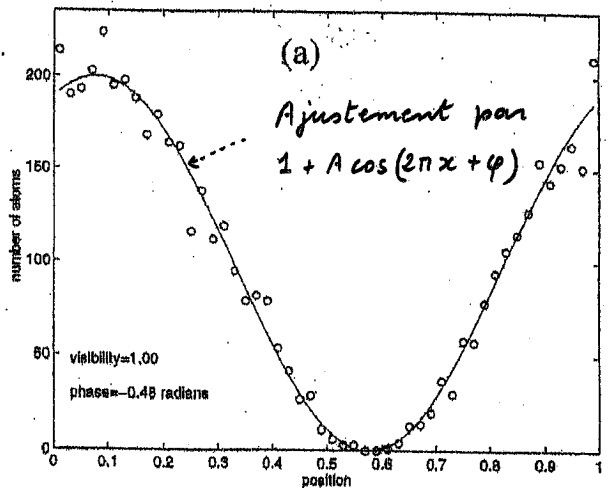


Figure extraite de la référence 9

Evolution de la phase conditionnelle en fonction du nombre de détections

T-155

(a), (b) : 2 simulations différentes
 La phase se stabilise après un certain nombre de détections à une valeur qui varie avec la simulation

$N = 200$

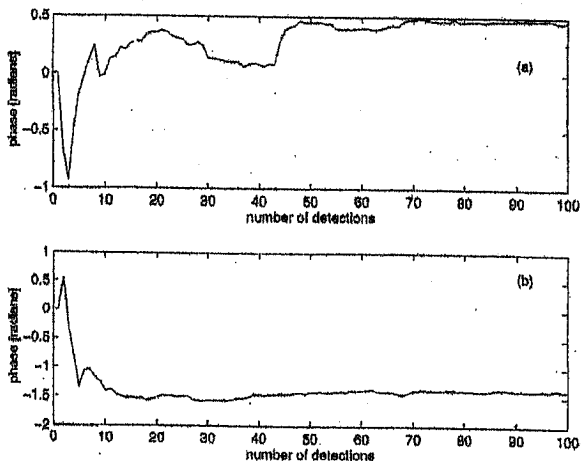


Figure extraite de la référence 9

Evolution de la visibilité conditionnelle en fonction du nombre de détections

T-156

Courbe moyennée sur 1000 simulations différentes

Après la 1^{ère} détection, on a $A = \frac{1}{2}$

$N = 200$

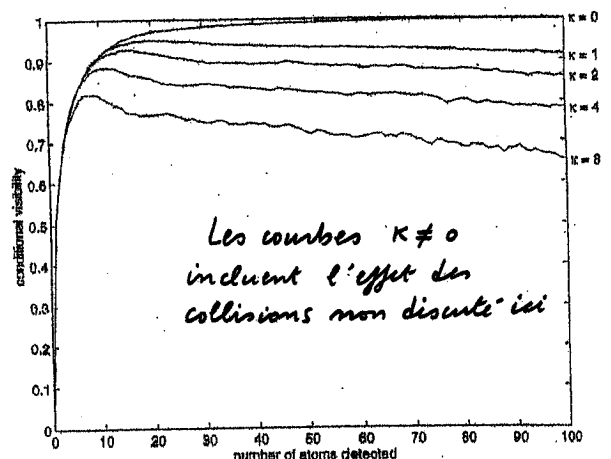


Figure extraite de la référence 9

Références

- (1) C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg
"Processus d'interaction entre photons et atomes"
(InterEditions et Editions du CNRS, Paris, 1988)
Traduction anglaise: "Atom-Photon Interactions"
(Wiley, 1992)
- (2) C. Cohen-Tannoudji, J. Dalibard, Europhys. Lett. 1, 441 (1986)
- (3) S. Reynaud, J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji,
IEEE J. Quant. Electron. 24, 1395 (1988)
- (4) K. Mølmer, Y. Castin, J. Dalibard, J. Opt. Soc. Am.
B10, 524 (1993)
- (5) R. Dum, P. Zoller, H. Ritsch, Phys. Rev. A45, 4879 (1992)
- (6) H. Carmichael, "An Open System Approach to
Quantum Optics", Lecture Notes in Physics, Vol 18
(Springer Verlag, Berlin, 1993)
- (7) C.W. Gardiner, Quantum Noise, (Springer Verlag, 1991)
- (8) J. Javanainen, S.M. Yoo, Phys. Rev. Lett. 76, 161 (1996)
- (9) T. Wong, M.J. Collett, D. Walls, Phys. Rev. A54, R3718 (1996)
- (10) A.S. Parkins, D. Walls, Phys. Reports 303, 1, (1998)