T-13

Energie libérée après coupure du piège

$$E^{avant}_{totale} = \cancel{E^{avant}_{cin}} + E^{avant}_{piège} + E^{avant}_{inter}$$

$$E^{après}_{totale} = E^{avant}_{inter}$$

$$\hookrightarrow \quad E_{libérée} = E^{avant}_{inter}$$

$$\begin{cases} E_{totale} = \cancel{E_{cin}} + E_{piège} + E_{inter} \\ \mu = \frac{1}{N}\left(\cancel{E_{cin}} + E_{piège} + 2E_{inter}\right) \\ 2\cancel{E_{cin}} - 2E_{piège} + 3E_{inter} = 0 \end{cases}$$

$$E_{piège} = \frac{3}{2} E_{inter}$$

$$\mu = \frac{1}{N}\left(\frac{3}{2}E_{inter} + 2E_{inter}\right) = \frac{7}{2N} E_{inter}$$

$$E_{libérée} = E_{inter} = \frac{2}{7}\mu N = \frac{\hbar\omega_0}{7}\left(15\frac{aN}{\sigma}\right)^{2/5} \gg \hbar\omega_0$$

En l'absence d'interactions, on aurait $E_{libérée} = \frac{3}{4}\hbar\omega_0$

T-14

Transformation de Bogolubov

Bosons en interaction dans une boite

But : 1ères corrections au champ moyen
- Corrélations entre particules
- Excitations élémentaires

Hamiltonien $\hat{H}$ en seconde quantification

$$\begin{cases} \hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_k \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{k}.\vec{r}}\, \hat{a}_k \\ \hat{\Psi}^+(\vec{r}) = \sum_k \frac{1}{L^{3/2}} e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\, \hat{a}_k^+ \end{cases}$$

$$\hat{H} = \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\hat{a}_k^+\hat{a}_k + H_{int}$$

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{2}\iint d^3r\, d^3r'\, \hat{\Psi}^+(\vec{r})\hat{\Psi}^+(\vec{r}\,')\hat{V}(|\vec{r}-\vec{r}\,'|)\hat{\Psi}(\vec{r}\,')\hat{\Psi}(\vec{r})$$

Si l'on prend $V(\vec{r}-\vec{r}\,') = g\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

$$\hat{H}_{int} = \frac{g}{2L^3}\sum_{k_1 k_2 k} \hat{a}^+_{k_1}\hat{a}^+_{k_2}\hat{a}_{k_2+k}\hat{a}_{k_1-k}$$

Approximations à la base du calcul

$$n_0 = \langle \hat{a}_0^+\hat{a}_0\rangle \gg \sum_{k\neq 0}\langle \hat{a}_k^+\hat{a}_k\rangle$$

- On néglige dans $\hat{H}_{int}$ tous les termes ne contenant pas au moins 2 $\hat{a}_0$ ou $\hat{a}_0^+$
- On remplace $\hat{a}_0$ et $\hat{a}_0^+$ par $\sqrt{n_0} \simeq \sqrt{N}$

T-15

Expression approchée de $\hat{H}$

Dans le sous-espace des états tels que $n_0 \gg \sum_{k\neq 0} n_k$, $\hat{H}$ est approximé par une fonction quadratique $\hat{H}_{eff}$ des $\hat{a}_k$ et $\hat{a}_k^+$ qu'on peut diagonaliser exactement

$$\hat{H}_{eff} = E_0 + \sum_k \hbar\omega(k)\,\hat{b}_k^+\hat{b}_k$$

$$\begin{cases} \hat{b}_{\vec{k}} = u_k\hat{a}_{\vec{k}} + v_k\hat{a}^+_{-\vec{k}} \\ \hat{b}^+_{-\vec{k}} = u_k\hat{a}^+_{-\vec{k}} + v_k\hat{a}_{\vec{k}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_k = \mathrm{ch}\,\theta_k \\ v_k = \mathrm{sh}\,\theta_k \end{cases} \qquad \mathrm{th}\,2\theta_k = \frac{\rho g}{\frac{\hbar^2k^2}{2m} + \rho g}$$

$$\rho = \frac{N}{L^3}$$

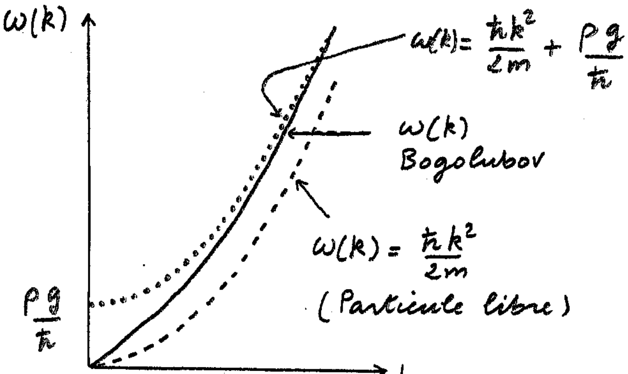
$$\hbar\omega(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2k^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} + 2\rho g\right)}$$

$$\frac{E_0}{N} = \frac{1}{2}\rho g\left[1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}}(\rho a^3)^{1/2}\right]$$

T-16

Relation de dispersion des excitations élémentaires

$$\hbar\omega(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2k^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} + 2\rho g\right)}$$



Limite $\frac{\hbar^2k^2}{2m} \ll \rho g \leftrightarrow k \ll k_0$ ou $k_0 = \frac{1}{\xi_0}$

$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{8\pi a\rho}}$ = Longueur de relaxation

$\omega = ck \qquad c = \sqrt{\frac{\rho g}{m}} \qquad$ Phonons

Limite $\frac{\hbar^2k^2}{2m} \gg \rho g \leftrightarrow k \gg k_0$

$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} + \frac{\rho g}{\hbar} \qquad$ Particule libre + Correction $\frac{\rho g}{\hbar}$