du nombre total N de particules, très grande devant les populations n_k des autres états individuels k ? 0. Comme a_0 et a_0^+ sont de l'ordre de $\sqrt{n_0}$, il semble légitime de négliger dans H_{int} les termes ne contenant pas au moins deux a_0 ou a_0^+. Par ailleurs, comme le commutateur entre a_0 et a_0^+, de l'ordre de 1 est négligeable devant $\sqrt{n_0}$, on peut également oublier le caractère opératoriel de a_0 et a_0^+ et les remplacer par $\sqrt{n_0}$. On obtient ainsi un Hamiltonien H qui n'est plus qu'une fonction quadratique des a_k et a_k^+ avec k ? 0 et qui peut donc être diagonalisé par une transformation canonique. Cette transformation n'est autre que la transformation de Bogolubov. Elle revient à introduire des nouveaux opérateurs de destruction b_k qui sont des combinaisons linéaires de a_k et a_{-k}^+, ainsi que leurs adjoints b_k^+, de telle sorte que H puisse se réexprimer sous la forme

$$H = E_0 + \sum_{k \neq 0} \hbar\omega\,(k)\, b_k^+ b_k$$

E_0 est l'énergie du nouvel état fondamental, alors que $b_k \left(et\ b_k^+\right)$détruisent (et créent) une excitation élémentaire d'énergie $\hbar\omega\,(k)$.

L'expression analytique obtenue pour $\omega\,(k)$ décrit la relation de dispersion des excitations élémentaires. Pour $k >> 1/\xi_0$, où ξ_0 est la longueur de relaxation introduite plus haut, on trouve $\hbar\omega\,(k) = \hbar^2 k^2/2m$, qui n'est autre que la relation de dispersion d'une particule libre de masse m. Par contre, pour $k << 1/\xi_0$, on trouve $\hbar\omega\,(k) = ck$, qui correspond à des excitations élémentaires de type phonon, c étant la vitesse de propagation du son.

Par rapport à la valeur donnée par la théorie de champ moyen, E_0 contient des termes correctifs en $\left(\rho\, a^3\right)^{1/2}$, où ρ est la densité spatiale de particules et a la longueur de diffusion. Le paramètre infiniment petit, exprimant le caractère dilué du gaz et justifiant l'approximation de Bogolubov est donc le nombre $\rho\, a^3$ de particules dans un volume a^3.

L'approximation de Bogolubov permet également d'obtenir des informations intéressantes sur la fonction d'onde ψ_0 du nouvel état fondamental, satisfaisant à $b_k\left|\psi_0\right\rangle = 0$ pour tout k ? 0. On peut calculer analytiquement les valeurs dans $\left|\psi_0\right\rangle$ des nombres moyens d'occupation $n_k = \left\langle\psi_0\right|a_k^+ a_k\left|\psi_0\right\rangle$ des divers états individuels k et comparer