harmonique $V_{ext}(r) = m\omega_0^2 r^2/2$. Comment les interactions entre atomes modifient-elles la forme du condensat ? Quel est le paramètre qui caractérise l'importance des interactions ? Un condensat stable peut-il exister quand la longueur de diffusion est négative, c'est à dire quand les interactions effectives entre atomes sont attractives ?

Dans une première approche très qualitative, on étudie l'ordre de grandeur des diverses énergies moyennes E_{cin}, $E_{piège}$ et E_{int}, exprimées en fonction du rayon R du condensat, plus précisément en fonction des paramètres sans dimension $w = R/\sigma$ où σ est la largeur de la fonction d'onde de l'état fondamental du piège harmonique. E_{cin} varie comme $N\hbar\omega_0/w^2$, $E_{piège}$ comme $N\hbar\omega_0 w^2$ et E_{int} comme $N\hbar\omega_0\,\chi/w^3$ où χ est un paramètre sans dimension égal à aN/σ. Ce paramètre χ caractérise donc l'importance des interactions qui sont négligeables si $\chi << 1$, et importantes si $\chi >> 1$.

Lorsque la longueur de diffusion a est positive (interactions effectives répulsives), on trouve que l'énergie totale $E = E_{cin} + E_{piège} + E_{int}$ a toujours un minimum quand on fait varier w, ce qui montre qu'un condensat stable existe quelle que soit la valeur de χ. Pour $\chi << 1$, on retrouve que E est minimum pour $w = 1$, ce qui montre que $R = \sigma$ (les atomes sont tous dans l'état fondamental du puits harmonique), alors que pour $\chi >> 1$, la valeur de R qui minimise E est de l'ordre de $\sigma\,\chi^{1/5}$, c'est à dire beaucoup plus grande que σ : les répulsions entre atomes provoquent un "gonflement" du condensat.

Quand a est négatif (interactions effectives attractives) on trouve par contre que les variations de E avec w ne présentent un minimum que pour des valeurs suffisamment basses de χ, inférieures à une valeur critique χ de l'ordre de 1. Des attractions trop fortes entre atomes déstabilisent donc le condensat.

Toutes ces conclusions qualitatives sont confirmées par des résolutions numériques de l'équation de Gross-Pitaevskii.

On montre enfin qu'une telle équation se simplifie considérablement à la limite $\chi >> 1$. Le terme d'énergie cinétique peut être négligé et l'équation aux dérivées partielles non linéaire peut alors être valablement approximée par une équation algébrique d'où l'on déduit une expression analytique pour la fonction d'onde du condensat. Une telle limite est appelée limite de Thomas Fermi. Elle conduit à des expression analytiques simples pour le rayon du condensat, le potentiel