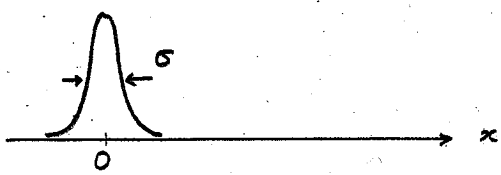
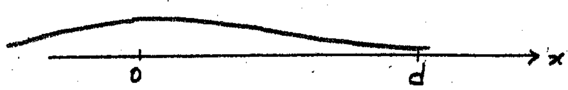
Etude des franges d'interférence

Propagation d'un paquet d'ondes

T-101



- A $t=0$, paquet d'ondes de largeur σ, centré en $x=0$, de vitesse moyenne nulle
- Au cours de l'évolution libre ultérieure, ce paquet d'ondes s'étale. Pour t suffisamment grand, il atteint un point situé à une distance $d \gg \sigma$



Peut-on définir une longueur d'onde de de Broglie locale au voisinage de $x=d$?

Paquet d'ondes Gaussien

T-102

- Etat initial à $t=0$

$$\psi(x,0) = \left(\frac{2}{\pi\sigma^2}\right)^{1/4} e^{-x^2/\sigma^2}$$

Fonction d'onde réelle

- A l'instant t, ce paquet d'ondes est devenu (voir Ref. 3), à un facteur de phase global près, indépendant de x

$$\psi(x,t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{\exp\left\{-\dfrac{x^2}{\sigma^2 + \frac{4\hbar^2t^2}{m^2\sigma^2}}\right\}}{\left(\sigma^2 + \frac{4\hbar^2t^2}{m^2\sigma^2}\right)^{1/4}} \times$$

$$\times \exp\left\{ i\,\frac{2\hbar t/m}{\sigma^4 + \frac{4\hbar^2t^2}{m^2}}\, x^2 \right\}$$

1ère ligne : Enveloppe réelle décrivant l'étalement du paquet d'ondes

2ème ligne : Fonction oscillante de x permettant de définir une longueur d'onde locale

- On supposera t assez grand pour que le paquet d'ondes atteigne $x = d \gg \sigma$

$$\frac{2\hbar t}{m\sigma} \gg \sigma \quad \longrightarrow \quad \sigma^2 + \frac{4\hbar^2t^2}{m^2\sigma^2} \simeq \frac{4\hbar^2t^2}{m^2\sigma^2}$$

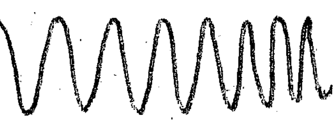
Calcul de la longueur d'onde locale

Terme oscillant de $\psi(x,t)$

T-103

$$\exp\left\{i\frac{2\hbar t/m}{\sigma^4 + \frac{4\hbar^2t^2}{m^2}}\, x^2\right\} \simeq \exp\left\{\frac{im}{2\hbar t}x^2\right\}$$

Fonction oscillante de x, oscillant de plus en plus rapidement avec x quand x croît



Vecteur d'onde local au voisinage de $x=d$

Posons $x = d + \xi \qquad |\xi| \ll d$

$$\exp\left\{\frac{im}{2\hbar t}x\right\} = \exp\left\{\frac{im}{2\hbar t}(d+\xi)^2\right\}$$

$$\simeq \exp\left\{\frac{im}{2\hbar t}d^2\right\} \exp\left(\frac{imd}{\hbar t}\xi\right)$$

↳ Vecteur d'onde local $\quad k = \dfrac{md}{\hbar t}$

Longueur d'onde locale

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{md/t}$$

Interprétation physique

T-104

Une particule classique, partant de $x=0$ à $t=0$, doit avoir une vitesse $v = d/t$ pour arriver en $x=d$ à l'instant

La longueur d'onde locale au voisinage de $x=d$ est la longueur d'onde de de Broglie associée à cette vitesse $\quad \lambda = \dfrac{h}{mv} = \dfrac{h}{md/t}$

Origine physique

La relation de dispersion des ondes de de Broglie

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

n'est pas linéaire. La vitesse de phase $\dfrac{\hbar k}{2m}$ croît avec k