

Interférences entre 2 condensats

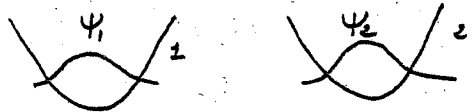
- ① Introduction T-93
 - ② Notations - Hypothèses T.94 - T.98
 - Etat initial
 - Evolution temporelle
 - Opérateurs champs
 - ③ Calcul du signal de détection T.99 - T.100
 - ④ Etude des franges d'interférence T.101 - T.108
 - Propagation d'un paquet d'ondes gaussien
 - Calcul de la longueur d'onde locale
 - Calcul de l'interfrange
 - Structure spatiale de la figure d'interférence
 - ⑤ L'expérience de M.I.T. T.109 - T.114
 - Réalisation des 2 condensats
 - Principe de l'expérience
 - Résultats
 - ⑥ Analyse plus quantitative T.115 - T.120
 - Résultats théoriques
 - Comparaison théorie - expérience
 - ⑦ Conclusions T.121 - T.123
- Références T.124

Interférences entre 2 condensats

T.93

Principe de l'expérience

- 2 condensats différents



Bosons piégés dans 2 puits 1 et 2 et condensés dans 2 états ψ_1 et ψ_2

- On coupe les pièges

Les 2 condensats subissent une expansion balistique et se recouvrent

On place un détecteur d'atomes dans la zone de recouvrement

Problèmes abordés

- Observe-t-on des franges d'interférence c.-à-d des oscillations spatiales dans la probabilité de détection?
- Quelles sont les caractéristiques de ces franges?
- Description d'une expérience récente faite à MIT (Refs. 1, 2)

Etat initial des 2 condensats

T.95

- On suppose que l'état initial des 2 condensats est un état cohérent relatif de phase relative φ [Voir T.87]

- C'est donc un mélange statistique de produits de 2 états cohérents

$$|\alpha_1\rangle_{\psi_1(0)} \otimes |\alpha_2\rangle_{\psi_2(0)}$$

$$\alpha_1 = |\alpha_1| e^{i\varphi_1} \quad \alpha_2 = |\alpha_2| e^{i\varphi_2}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi = \text{Phase relative}$$

où $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \varphi$ sont fixés et

où φ est équipartie entre 0 et 2π

- Les calculs seront faits pour un état produit $||\alpha_1| e^{i\varphi_1}\rangle_{\psi_1(0)} \otimes ||\alpha_2| e^{i(\varphi_2 - \varphi)}\rangle_{\psi_2(0)}$ puis les probabilités obtenues seront moyennées sur φ ,

- Pour simplifier, on suppose $\psi_1(0)$ et $\psi_2(0)$ orthogonaux

$$\int d^3r \psi_1^*(\vec{r}, 0) \psi_2(\vec{r}, 0) = 0$$

Notations - Hypothèses

T.94

$\psi_1(0)$: Etat individuel normé dans lequel sont condensés les bosons du piège 1 à l'instant initial $t=0$

$|N\rangle_{\psi_1(0)}$: Etat de Fock à N bosons dans l'état $\psi_1(0)$

$$|N\rangle_{\psi_1(0)} = \frac{1}{\sqrt{N!}} [\hat{a}_{\psi_1(0)}^+]^N |0\rangle$$

$\hat{a}_{\psi_1(0)}^+$: Opérateur de création d'un boson dans l'état $\psi_1(0)$

$|\alpha_1\rangle_{\psi_1(0)}$: Etat cohérent α_1 du "mode" $\psi_1(0)$

$$|\alpha_1\rangle_{\psi_1(0)} = e^{-|\alpha_1|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle_{\psi_1(0)}$$

$$\alpha_1 = |\alpha_1| e^{i\varphi_1} = \sqrt{\bar{N}_1} e^{i\varphi_1}$$

\bar{N}_1 : Nombre moyen de bosons dans le mode 1

Notations analogues pour le condensat 2 avec l'indice 1 remplacé par 2

Evolution temporelle après coupure du piège

T.96

- Pour simplifier, on néglige dans une première étape les interactions entre atomes, aussi bien dans l'état initial que dans la phase d'expansion

- $\psi_1(0)$ et $\psi_2(0)$ sont les états fondamentaux des hamiltoniens des pièges 1 et 2

- Soit $\psi_i(t)$ la solution de l'équation de Schrödinger à 1 particule avec $\psi_i(0)$ pour état initial

- L'état de Fock $|N\rangle_{\psi_1(0)}$ se transforme au bout d'un temps t en l'état $|N\rangle_{\psi_1(t)}$ où N bosons sont condensés dans l'état $\psi_1(t)$

$$|N\rangle_{\psi_1(t)} = \frac{1}{\sqrt{N!}} [\hat{a}_{\psi_1(t)}^+]^N |0\rangle$$

$\hat{a}_{\psi_1(t)}^+$: Opérateur de création d'un boson dans l'état $\psi_1(t)$

- L'état cohérent $|\alpha_1\rangle_{\psi_1(0)}$, superposition linéaire d'états $|N\rangle_{\psi_1(0)}$ [voir T.94], T.97 devient à l'instant t

$$|\alpha_1\rangle_{\psi_1(t)} = e^{-|\alpha_1|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle_{\psi_1(t)}$$

$$= e^{-|\alpha_1|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^N}{N!} [\hat{a}_{\psi_1(t)}^+]^N |0\rangle$$

Etat cohérent de même α_1 que $|\alpha_1\rangle_{\psi_1(0)}$ mais relatif au mode $\psi_1(t)$ au lieu de $\psi_1(0)$

- Résultats analogues pour $|\alpha_2\rangle_{\psi_2(t)}$

$$|\alpha_2\rangle_{\psi_2(t)} = e^{-|\alpha_2|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha_2^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle_{\psi_2(t)}$$

$$= e^{-|\alpha_2|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha_2^N}{N!} [\hat{a}_{\psi_2(t)}^+]^N |0\rangle$$

- L'évolution unitaire entre 0 et t conserve l'orthogonalité de ψ_1 et ψ_2

$$\int d^3r \psi_1^*(\vec{r}, t) \psi_2(\vec{r}, t) = 0$$

Opérateurs champs $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ et $\hat{\Psi}^+(\vec{r}, t)$ T.98

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \hat{a}_{\psi_1(t)} \psi_1(\vec{r}, t) + \hat{a}_{\psi_2(t)} \psi_2(\vec{r}, t)$$

$$+ \sum_{i \neq 1, 2} \hat{a}_{\psi_i(t)} \psi_i(\vec{r}, t)$$

Les $\psi_i(\vec{r}, t)$ avec $i \neq 1, 2$ sont supposés former avec $\psi_1(\vec{r}, t)$ et $\psi_2(\vec{r}, t)$ une base orthonormée d'états à 1 particule

Si on se limite à des états où seuls les modes $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$ sont peuplés et si on s'intéresse à des valeurs moyennes dans ces états de produits d'opérateurs $\hat{\Psi}$ et $\hat{\Psi}^+$ rangés dans l'ordre normal, on peut ignorer les termes $i \neq 1, 2$ qui ont une contribution nulle et écrire

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \hat{a}_{\psi_1(t)} \psi_1(\vec{r}, t) + \hat{a}_{\psi_2(t)} \psi_2(\vec{r}, t)$$

$$\hat{\Psi}^+(\vec{r}, t) = \hat{a}_{\psi_1(t)}^+ \psi_1^*(\vec{r}, t) + \hat{a}_{\psi_2(t)}^+ \psi_2^*(\vec{r}, t)$$

Expression du signal de détection

Probabilité $P(\vec{r}, t)$ de détecter un boson au point \vec{r} à l'instant t T.95

$$P(\vec{r}, t) = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{\Psi}^+(\vec{r}, t) \hat{\Psi}(\vec{r}, t)]$$

Contribution de l'état $|\alpha_1\rangle_{\psi_1(t)} \otimes |\alpha_2\rangle_{\psi_2(t)}$ du mélange statistique $\hat{\rho}$

$$\langle \alpha_1 | \otimes \langle \alpha_2 | \hat{\Psi}^+(\vec{r}, t) \hat{\Psi}(\vec{r}, t) | \alpha_1 \rangle_{\psi_1(t)} \otimes | \alpha_2 \rangle_{\psi_2(t)} =$$

$$= \sum_{i, j \neq 1, 2} \psi_i^*(\vec{r}, t) \psi_j(\vec{r}, t) \times$$

$$\langle \alpha_1 | \otimes \langle \alpha_2 | \hat{a}_{\psi_1(t)}^+ \hat{a}_{\psi_j(t)} | \alpha_1 \rangle_{\psi_1(t)} \otimes | \alpha_2 \rangle_{\psi_2(t)}$$

Comme $|\alpha_1\rangle_{\psi_1(t)}$ et $|\alpha_2\rangle_{\psi_2(t)}$ sont états propres de $\hat{a}_{\psi_1(t)}$ et $\hat{a}_{\psi_2(t)}$ de valeurs propres α_1 et α_2 , on en déduit que la contribution de $|\alpha_1\rangle_{\psi_1(t)} \otimes |\alpha_2\rangle_{\psi_2(t)}$ à $P(\vec{r}, t)$ vaut

$$\sum_{i, j \neq 1, 2} \alpha_i^* \alpha_j \psi_i^*(\vec{r}, t) \psi_j(\vec{r}, t)$$

$$= |\alpha_1 \psi_1(\vec{r}, t) + \alpha_2 \psi_2(\vec{r}, t)|^2$$

$$= |\sqrt{N_1} e^{i\varphi_1} \psi_1(\vec{r}, t) + \sqrt{N_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \psi_2(\vec{r}, t)|^2$$

Calcul de $P(\vec{r}, t)$ pour le mélange statistique T.100

Le facteur de phase $e^{i\varphi_1}$ apparaît comme un facteur de phase global dans l'amplitude associée à $|\alpha_1\rangle_{\psi_1(t)} \otimes |\alpha_2\rangle_{\psi_2(t)}$ et disparaît dans la probabilité

- La moyenne sur φ équipartie entre 0 et 2π ne change donc rien et l'expression finale de $P(\vec{r}, t)$ s'écrit

$$P(\vec{r}, t) = |\sqrt{N_1} \psi_1(\vec{r}, t) + \sqrt{N_2} e^{-i\varphi} \psi_2(\vec{r}, t)|^2$$

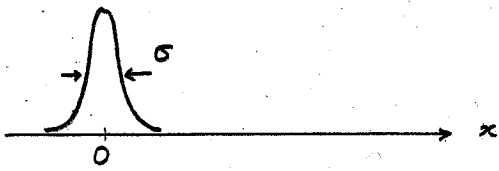
Interférences entre 2 fonctions d'onde macroscopiques $\sqrt{N_1} \psi_1(\vec{r}, t)$ et $\sqrt{N_2} \psi_2(\vec{r}, t)$ déphasées l'une par rapport à l'autre de φ

- Pour interpréter le signal expérimental, il faut donc résoudre l'équation de Schrödinger ordinaire à 1 particule et calculer $\psi_1(\vec{r}, t)$ et $\psi_2(\vec{r}, t)$ à partir de $\psi_1(\vec{r}, 0)$ et $\psi_2(\vec{r}, 0)$

Etude des franges d'interférence

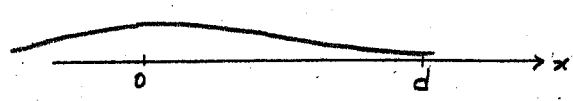
Propagation d'un paquet d'ondes

T-101



- A $t=0$, paquet d'ondes de largeur σ , centré en $x=0$, de vitesse moyenne nulle

- Au cours de l'évolution libre ultérieure, ce paquet d'ondes s'étale. Pour t suffisamment grand, il atteint un point situé à une distance $d \gg \sigma$



Peut-on définir une longueur d'onde de de Broglie locale au voisinage de $x=d$?

Paquet d'ondes Gaussien

T-102

- Etat initial à $t=0$

$$\Psi(x,0) = \left(\frac{2}{\pi\sigma^2}\right)^{1/4} e^{-x^2/\sigma^2}$$

Fonction d'onde réelle

- A l'instant t , ce paquet d'ondes est devenu (voir Ref. 3), à un facteur de phase global près, indépendant de x

$$\Psi(x,t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{\exp\left\{-\frac{x^2}{\sigma^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 \sigma^2}}\right\}}{\left(\sigma^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 \sigma^2}\right)^{1/4}} \times \exp\left\{i \frac{2\hbar t/m}{\sigma^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 \sigma^2}} x^2\right\}$$

1^{ère} ligne : Enveloppe réelle décrivant l'étalement du paquet d'ondes

2^{ème} ligne : Fonction oscillante de x permettant de définir une longueur d'onde locale

- On supposera t assez grand pour que le paquet d'ondes atteigne $x=d \gg \sigma$

$$\frac{2\hbar t}{m\sigma} \gg \sigma \rightarrow \sigma^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 \sigma^2} \approx \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 \sigma^2}$$

Calcul de la longueur d'onde locale

Terme oscillant de $\Psi(x,t)$

T-103

$$\exp\left\{i \frac{2\hbar t/m}{\sigma^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 \sigma^2}} x^2\right\} \approx \exp\left\{\frac{im}{2\hbar t} x^2\right\}$$

Fonction oscillante de x , oscillant de plus en plus rapidement avec x quand x croît



Vecteur d'onde local au voisinage de $x=d$

Posons $x = d + \xi$ $|\xi| \ll d$

$$\exp\left\{\frac{im}{2\hbar t} x\right\} = \exp\left\{\frac{im}{2\hbar t} (d + \xi)^2\right\} \approx \exp\left\{\frac{im}{2\hbar t} d^2\right\} \exp\left(\frac{im}{\hbar t} \xi\right)$$

↳ Vecteur d'onde local $k = \frac{md}{\hbar t}$

Longueur d'onde locale

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{md/t}$$

Interprétation physique

T-104

Une particule classique, partant de $x=0$ à $t=0$, doit avoir une vitesse $v = d/t$ pour arriver en $x=d$ à l'instant

La longueur d'onde locale au voisinage de $x=d$ est la longueur d'onde de de Broglie associée à cette vitesse $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{md/t}$

Origine physique

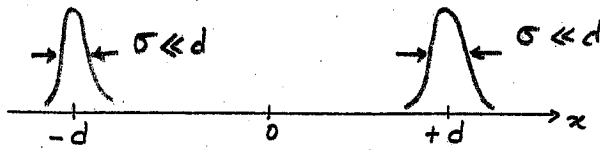
La relation de dispersion des ondes de de Broglie

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

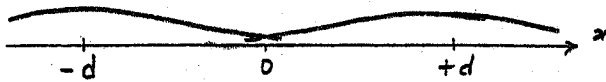
n'est pas linéaire. La vitesse de phase $\frac{\hbar k}{2m}$ croît avec k

Calcul de l'interfrange T.105

- A $t=0$, 2 paquets d'ondes réels, centrés en $-d$ et $+d$. Phase relative φ



- Pour t suffisamment grand, ces 2 paquets d'ondes se recouvrent au voisinage de $x=0$



- Fonction d'onde au voisinage de $x=0$
 $e^{ikx} + e^{-i\varphi} e^{-ikx} \propto \cos(kx + \frac{\varphi}{2})$
 $k = md/\hbar t$

- Intensité $\propto \cos^2(kx + \frac{\varphi}{2}) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2kx + \varphi)]$
 Interfrange = $\frac{2\pi}{2k} = \frac{\pi \hbar t}{md}$

② La fonction d'onde dépendant de y (et z) est la même pour les 2 condensats puisque les fonctions d'onde initiales e^{-y^2/σ^2} (et e^{-z^2/σ^2}) sont les mêmes pour les 2 condensats de même que \hat{h}_y (et \hat{h}_z) T.107

③ Par contre, les fonctions d'onde dépendant de x ne sont pas les mêmes puisqu'elles partent de $e^{-(x-d)^2/\sigma^2}$ et $e^{-(x+d)^2/\sigma^2}$

↳ L'état d'interférence ne dépend donc que de x et est le même quels que soient y et z pour un x donné

↳ Dans un plan passant par Ox , les franges d'interférence sont donc des droites perpendiculaires à Ox

Structure spatiale de la figure d'interférences T.106

Hypothèses

- Les 2 condensats ont leurs centres sur l'axe Ox en $x = \pm d$

- Ils sont décrits par des Gaussiennes $\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2} [(x \pm d)^2 + y^2 + z^2]\} = e^{-(x \pm d)^2/\sigma^2} e^{-y^2/\sigma^2} e^{-z^2/\sigma^2}$

Factorisation en un produit de 3 fonctions de x, y, z

- L'expansion balistique est décrite par un Hamiltonien qui se sépare en 3 termes

$$H = \underbrace{\frac{\hat{p}_x^2}{2m}}_{\hat{h}_x} + \underbrace{\frac{\hat{p}_y^2}{2m}}_{\hat{h}_y} + \underbrace{\frac{\hat{p}_z^2}{2m} - mg\hat{z}}_{\hat{h}_z}$$

Conclusions

① La fonction d'onde de chaque condensat reste toujours factorisée à l'instant t en 3 fonctions de x, y, z

Différences avec la figure d'interférence donnée par 2 sources monochromatiques T.108

- 2 sources situées en $x = \pm d$ sur l'axe Ox et émettant de manière continue des ondes de de Broglie de vecteur d'onde k_0 fixe

- La propagation fait apparaître (en l'absence d'interactions) des ondes sphériques $e^{ik_0 r}/r$ centrées sur les 2 sources

Non factorisables en un produit de 3 fonctions de x, y, z

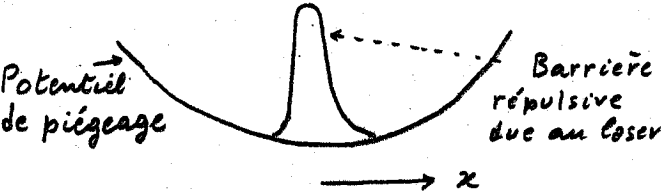
↳ Dans un plan contenant Ox , les franges d'interférence ne sont plus des droites perpendiculaires à Ox , mais des hyperboles ayant les 2 sources pour foyers

L'expérience de M.I.T.
(Refs. 1 et 2)

T-109

Réalisation des 2 condensats

- Condensat ayant la forme d'un cigare allongé le long de Ox
- Un faisceau laser, désaccordé vers le bleu, et ayant la forme d'une nappe de lumière perpendiculaire à Ox et de largeur $12 \mu m$ sépare ce condensat en 2 parties

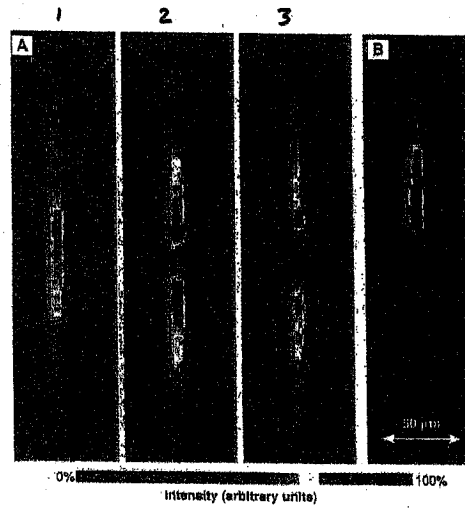


- Possibilité en variant l'intensité laser de changer la hauteur V_0 de la barrière et donc l'écart entre les 2 minima des 2 puits

IV-6

Photographie des condensats T-110

(Figure extraite de la ref. 1)

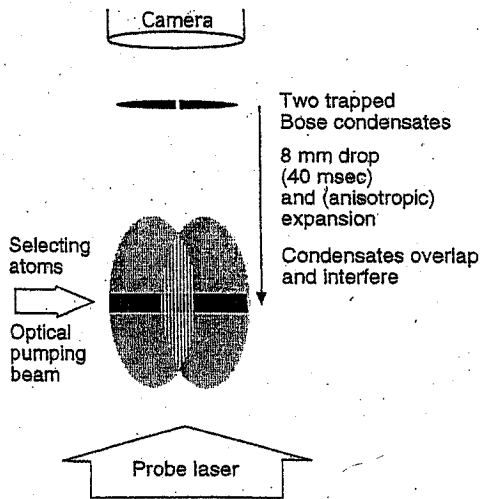


- A.1 - Condensat initial
- A.2 - Condensat coupé en 2 avec un laser de puissance $P = 7 \text{ mW}$
- A.3 - Même figure que A.2 avec $P = 43 \text{ mW}$
- A.4 - L'un des 2 condensats est éliminé par un laser résonnant

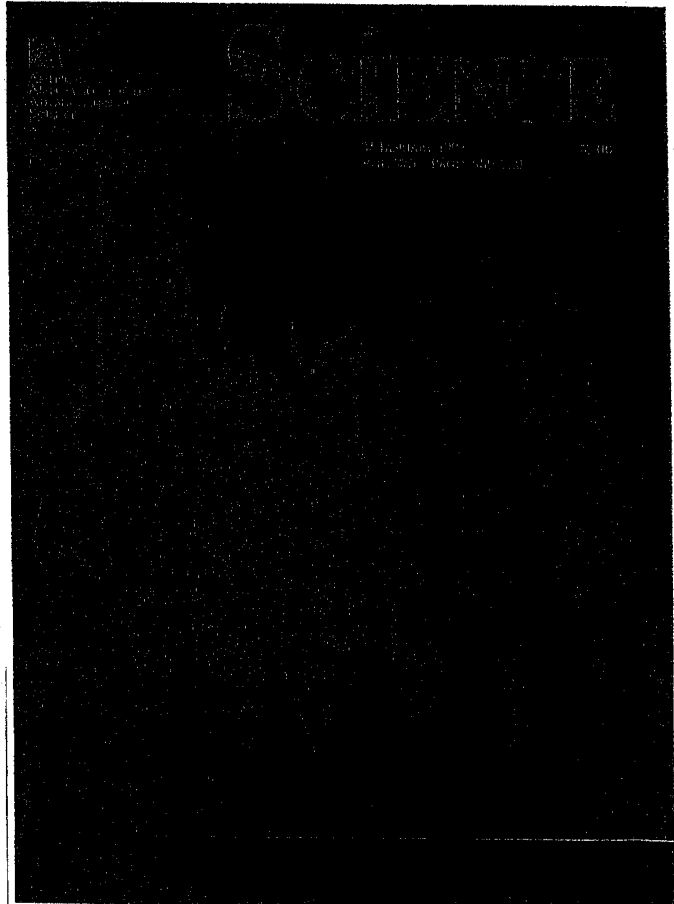
Principe de l'expérience T-111

T-111

Après l'expansion balistique anisotrope, les atomes d'une tranche de faible épaisseur sont pompés optiquement dans un état absorbant pour éviter un brouillage des franges



(Figure extraite de la réf. 2)



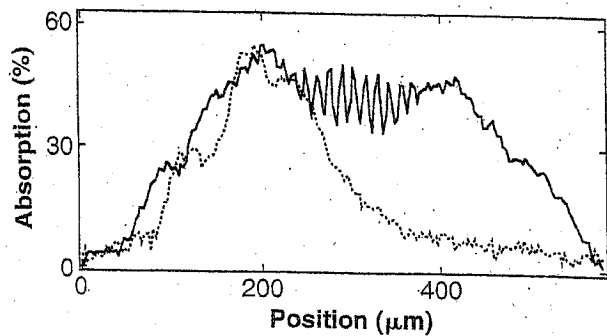
T-112

IV-7

Comparaison des résultats obtenus

- avec 2 condensats (courbe en trait plein)
- avec l'un des 2 condensats éliminé (courbe en pointillé)

T-113

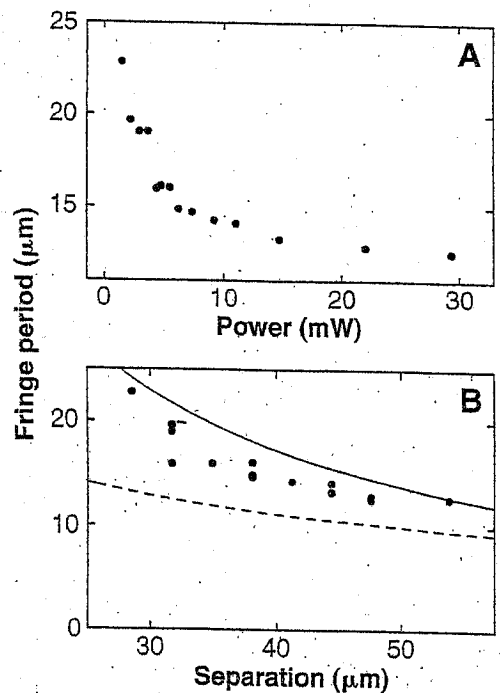


(Courbe extraite de la ref. 1)

Variations de l'interfrange

T-114

- Avec la puissance laser (A)
- Avec la séparation des 2 condensats (B)



(Figure extraite de la ref. 1)

Analyse plus quantitative

T-115

Comparaison des observations expérimentales avec les prédictions de calculs plus précis

- tenant compte des interactions entre atomes
- tenant compte de la forme initiale des 2 condensats qui n'est pas simplement une somme de 2 Gaussiennes séparées par une distance grande devant leur largeur

Utilisation de l'équation de Gross-Pitaevskii pour

- déterminer la forme initiale des 2 condensats
- étudier leur expansion balistique
- étudier les franges d'interférence

Travaux théoriques décrits dans les références 4, 5, 6

Résultats essentiels de cette analyse

T-116

- ① L'expansion très rapide dans les directions perpendiculaires à Ox réduit très vite la densité et donc l'importance des interactions sur les franges observées après cette expansion. Le long de Ox , les interactions (répulsives) introduisent une accélération initiale qui fait que les ondes qui interfèrent ont un vecteur d'onde plus grand qu'en l'absence d'interactions. L'interfrange est donc légèrement plus petit que celui, $\pi \hbar t / m d$, calculé en l'absence d'interactions (courbe en trait plein de la figure B de T-).
- ② L'allure des franges est très différente suivant que les 2 condensats sont initialement bien séparés ou peu séparés.

Condensats très peu couplés [T-117]

Potentiel chimique μ ← Hauteur V_0 de la barrière de potentiel

- Les 2 condensats sont bien séparés
- La séparation des mouvements le long de Ox, Oy, Oz est bien réalisée
- Plusieurs franges sont prédites avec une structure rectiligne et régulière

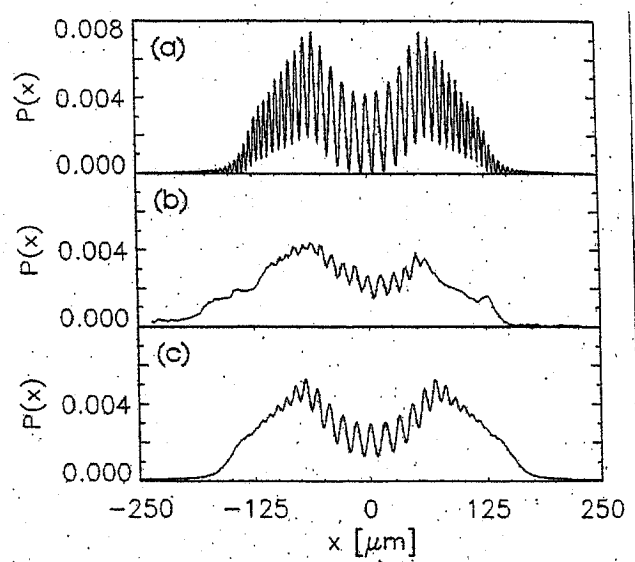
Condensats très couplés

$\mu \lesssim V_0$

- Les 2 condensats sont très peu séparés et, seul, un calcul numérique permet de prédire les phénomènes
- Les mouvements le long de Ox, Oy, Oz ne sont plus séparables
- Le nombre de franges observables diminue et elles ne sont plus rectilignes
- La frange centrale est prédominante

Comparaison théorie - expérience [T-118] pour des condensats bien séparés

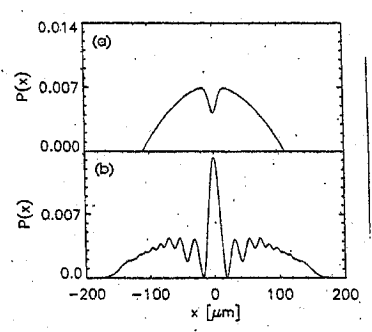
- (a) Théorie
- (b) Expérience
- (c) Théorie tenant compte de la résolution finie de l'expérience



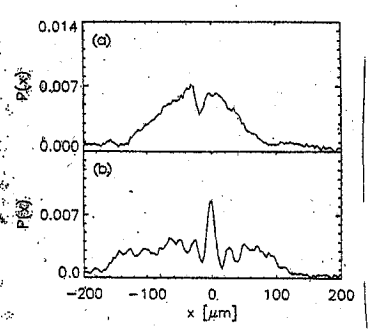
(Figure extraite de la réf. 5)

Comparaison théorie - expérience [T-119] pour des condensats peu séparés

- (a) Forme initiale du condensat en présence de la barrière de potentiel V_0
- (b) Franges d'interférence après expansion balistique



Théorie

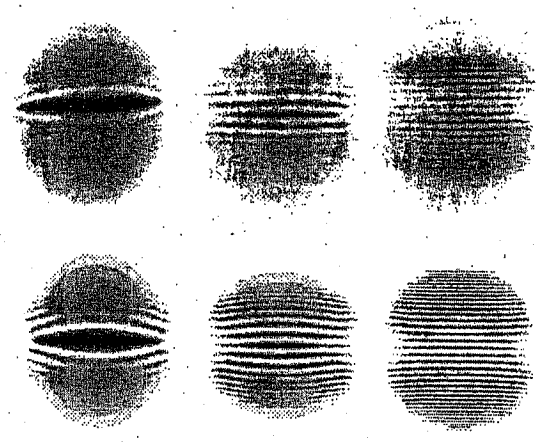


Expérience

(Figures extraites de la réf. 5)

Allure rectiligne ou courbée des franges suivant que les condensats sont peu ou bien séparés [T-120]

V_0 augmente de gauche à droite
Partie supérieure : Expérience
Partie inférieure : Théorie



(Figure extraite de la réf. 2)

IV-9

Conclusions

T-121

- Démonstration de la possibilité de faire interférer des ondes de de Broglie atomiques issues de 2 sources différentes

Analogie avec les phénomènes observés en faisant interférer 2 faisceaux laser différents

- L'accord théorie - expérience montre que les franges observées ne sont pas dues à des ondes de densité de 2 condensats entrant en collision

- Les calculs théoriques supposent des condensats parfaitement cohérents (Même phase en tous les points)

L'accord théorie - expérience montre donc la longue portée de la cohérence spatiale dans un condensat

Les expériences sur $g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r})$ et $g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}, \vec{r}, \vec{r})$ décrites dans le cours III testaient par contre les propriétés de courte portée

② Supposons que les 2 condensats sont bien séparés et restent piégés (pas d'expansion balistique)

T-123

A $t=0$, une phase relative φ existe entre eux

Cette phase relative va-t-elle se maintenir indéfiniment au cours du temps ?

Les interactions entre bosons ne vont-elles pas brouiller cette phase relative ?

Au bout de quel temps ?

Temps de cohérence

Problèmes non étudiés ici

T-122

(et qui seront abordés ultérieurement)

① Les calculs sont faits en supposant une certaine phase relative φ entre les 2 condensats, cette phase φ variant d'une réalisation expérimentale à l'autre.

Y a-t-il un phénomène physique qui fixe cette phase relative ?

On verra dans un cours ultérieur que ce sont les premiers processus de détection qui fixent cette phase relative

On peut donc observer des franges d'interférence même si l'on part d'un état initial qui est un produit $|N_1\rangle \otimes |N_2\rangle$ de 2 états de Fock ne possédant pas de phase relative bien définie

Quelques références

T-124

- (1) - M. Andrews, C. Townsend, H. Miesner, D. Durfee, D. Kurn, W. Ketterle, *Science*, **275**, 637 (1997)
- (2) W. Ketterle, D. Durfee, D. Stamper-Kurn, *Proceedings de l'école d'été de Varenna de 1998*, à paraître
- (3) C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Mécanique Quantique, Complément G_I*
- (4) H. Wallis, A. Röhl, M. Naraschewski, A. Schenzle, *Phys. Rev. A* **55**, 2109 (1997)
- (5) A. Röhl, M. Naraschewski, A. Schenzle, H. Wallis, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4143, (1997)
- (6) H. Wallis, H. Steck, *Europhysics Letters*, **41**, 477 (1998)