Distribution d'impulsion d'un condensat à la limite de Thomas-Fermi

T-205

Fonction d'onde du condensat

- Normalisation choisie $\int |\psi(\vec{r})|^2 d^3r = N$
- Expression de $|\psi(\vec{r})|^2$ (voir T-12)

$$|\psi(\vec{r})|^2 = \frac{1}{g}\left[\mu - \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)\right]$$

$|\psi(\vec{r})|^2$ s'annule en $x = \pm x_0$, $y = \pm y_0$, $z = \pm z_0$

$$\frac{1}{2}m\omega_x^2 x_0^2 = \mu = \frac{1}{2}m\omega_y^2 y_0^2 = \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2$$

- Densité au centre

$$|\psi(\vec{0})|^2 = n_0 = \frac{\mu}{g} \longrightarrow \mu = g n_0$$

- On peut donc écrire $|\psi(\vec{r})|^2$ sous la forme

$$|\psi(\vec{r})|^2 = n_0\left[1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]$$

Paraboles inversées suivant Ox, Oy, Oz

- Fonction d'onde $\psi(\vec{r})$

Comme $\psi(\vec{r})$ est réelle

$$\psi(x,y,z) = \sqrt{n_0}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$$

Distribution $\mathcal{P}(p_x)$ d'impulsion suivant Ox (on suppose $\vec{\kappa} \parallel Ox$)

T-206

$$\mathcal{P}(p_x) = \iint dp_y\, dp_z\, \mathcal{P}(p_x, p_y, p_z)$$

$$\mathcal{P}(p_x, p_y, p_z) = |\tilde{\psi}(p_x, p_y, p_z)|^2$$

$$\tilde{\psi}(p_x, p_y, p_z) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} \iiint dx\, dy\, dz$$

$$n_0\, e^{-i(p_x x + p_y y + p_z z)/\hbar} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$$

- Changement de variables

$$\frac{x}{x_0} = \xi \quad \frac{y}{y_0} = \eta \quad \frac{z}{z_0} = \zeta \qquad \vec{\rho} = \{\xi, \eta, \zeta\}$$

$$\frac{p_x}{\hbar/x_0} = \kappa_x \quad \frac{p_y}{\hbar/y_0} = \kappa_y \quad \frac{p_z}{\hbar/z_0} = \kappa_z \qquad \vec{\kappa} = \{\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z\}$$

- Expression de $\tilde{\psi}$

$$\tilde{\psi}(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z) = \frac{\sqrt{n_0}\, x_0 y_0 z_0}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, I$$

où I est donné par l'intégrale

$$I = \int_{\rho \le 1} d^3\rho\, e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{\rho}} \sqrt{1-\rho^2}$$

$$= 2\pi \int_0^1 d\rho\, \rho^2 \sqrt{1-\rho^2} \int_0^\pi d\theta \sin\theta\, e^{-i\kappa\rho\cos\theta}$$

Calcul de I

T-207

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta\, e^{-i\kappa\rho\cos\theta} = \frac{e^{i\kappa\rho} - e^{-i\kappa\rho}}{i\kappa\rho}$$

$$I = \frac{2\pi}{i\kappa}\int_{-1}^{+1} d\rho\, \rho\sqrt{1-\rho^2}\, e^{i\kappa\rho}$$

Changement de variables $\rho = \cos\alpha$

+ Intégration par parties

$$I = \frac{2\pi}{i\kappa}\int_0^\pi d\alpha \sin^2\alpha \cos\alpha\, e^{i\kappa\cos\alpha}$$

$$= -\frac{\pi}{\kappa^2}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \cos 2\alpha\, e^{i\kappa\cos\alpha}$$

Pour des raisons de parité, seule la partie paire en α de $e^{i\kappa\cos\alpha}$ intervient

$$\cos(\kappa\cos\alpha) = J_0(\kappa) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(\kappa)\cos 2n\alpha$$

J_n : Fonction de Bessel d'ordre n

Seul, le terme $n=1$ contribue à I

$$I = \frac{2\pi}{\kappa^2} J_2(\kappa)\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \cos^2 2\alpha = \frac{\pi}{\kappa^2} J_2(\kappa)$$

Expression de $\mathcal{P}(p_x, p_y, p_z)$

T-208

$$\tilde{\psi}(\vec{\kappa}) \propto \frac{J_2(\kappa)}{\kappa^2}$$

$$|\tilde{\psi}(\vec{\kappa})|^2 \propto \left|\frac{J_2(\kappa)}{\kappa^2}\right|^2$$

$$\kappa^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2 = \frac{1}{\hbar^2}\left[p_x^2 x_0^2 + p_y^2 y_0^2 + p_z^2 z_0^2\right]$$

$$\mathcal{P}(p_x, p_y, p_z) \propto \left[\frac{J_2\left(\sqrt{\frac{p_x^2 x_0^2}{\hbar^2} + \frac{p_y^2 y_0^2}{\hbar^2} + \frac{p_z^2 z_0^2}{\hbar^2}}\right)}{\frac{p_x^2 x_0^2}{\hbar^2} + \frac{p_y^2 y_0^2}{\hbar^2} + \frac{p_z^2 z_0^2}{\hbar^2}}\right]^2$$

L'intégrale sur p_y et p_z n'est pas aisée

Expression approchée de $J_2(\kappa)/\kappa^2$

$$J_2(\kappa) = \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,(r+2)!}\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{2r}$$

$$= \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\frac{\kappa^2}{4} + \cdots\right]$$

$$= \frac{\kappa^2}{8}\left[1 - \frac{\kappa^2}{12} + \cdots\right]$$

On peut donc écrire

$$\left[\frac{J_2(\kappa)}{\kappa^2}\right]^2 = \frac{1}{64}\left[1 - \frac{\kappa^2}{12} + \cdots\right]^2$$

$$\simeq \frac{1}{64}\left[1 - \frac{\kappa^2}{6}\right]$$

$$\simeq \frac{1}{64} e^{-\kappa^2/6}$$