Etude de la longueur de cohérence d'un condensat – Expérience de M.I.T.

① Introduction T-189 – T-192

- But de ce cours
- Liens entre la longueur de cohérence et la distribution d'impulsion

② Méthodes optiques de mesure de la distribution de vitesse T.193 – T.199

- Transitions à 1 photon
- Transitions à 2 photons
  - entre 1 état fondamental et 1 état métastable
  - entre 2 états fondamentaux de nombres quantiques internes différents
  - entre 2 états fondamentaux de même nombre quantique interne
- Premières expériences utilisant les résonances induites par le recul

③ Application à un condensat de Bose-Einstein T.200 – T.214

- Principe de l'expérience - Conditions de résonance
- Effet des interactions - Condensat homogène
- Effet des interactions - Condensat inhomogène - Approximations
- Distribution des vitesses des atomes d'un condensat à la limite de Thomas-Fermi
- Distribution des valeurs de la densité d'atomes
- Déplacement et élargissement du spectre Doppler dû aux interactions

④ Expérience de M.I.T. T.215 – T.219

- Exemple de spectre obtenu sur les atomes du condensat
- Etude par vélocimétrie Doppler de l'expansion balistique
- Etude de l'effet des interactions
- Etude de la largeur de la distribution d'impulsion en fonction de l'extension spatiale du condensat

⑤ Conclusion T-220

Références Page VII-10

But de ce cours

T-189

- Décrire des expériences montrant que la longueur de cohérence d'un condensat est de l'ordre de l'extension spatiale de ce condensat. Voir Ref. 1
- Les théories de champ moyen prédisent que, pour $T \ll T_c$, tous les atomes sont condensés dans le même état quantique décrit par une fonction d'onde réelle $\psi(\vec{r})$, solution de l'équation de Gross-Pitaevskii. On a alors (voir T-37) :

$$G^{(1)}(\vec{r},\vec{r}\,') = N\,\psi(\vec{r})\,\psi(\vec{r}\,')$$

$G^{(1)}(\vec{r},\vec{r}\,')$ reste non nul pour $\vec{r}$ et $\vec{r}\,'$ séparés par une distance de l'ordre de la dimension du condensat.
- Peut-on vérifier expérimentalement une telle prédiction ?

Définition plus précise de la longueur de cohérence λ_c

T-190

- Dans un condensat inhomogène (atomes dans un piège), $G^{(1)}(\vec{r},\vec{r}\,')$ dépend à la fois de $\vec{r}$ et $\vec{r}\,'$, et non plus seulement de $\vec{r}-\vec{r}\,'$, comme c'est le cas pour un système homogène

Cohérence spatiale globale $G(a)$

$$G(\vec{a}) = \int d^3r\; G^{(1)}(\vec{r},\vec{r}+\vec{a})$$

Somme de toutes les cohérences spatiales entre couples de points $\vec{r}$ et $\vec{r}+\vec{a}$ séparés de $\vec{a}$

La longueur de cohérence λ_c peut être définie comme la longueur caractéristique de la décroissance de $G(\vec{a})$ quand $|\vec{a}|$ croît de 0 à $+\infty$

Lien entre $G(\vec{a})$ et la distribution d'impulsion $\mathcal{P}(\vec{p})$

T-191

- D'après (T-35)

$$G^{(1)}(\vec{r},\vec{r}+\vec{a}) = N \langle \vec{r}+\vec{a}\,|\,\hat{\rho}^{(1)}\,|\,\vec{r}\rangle$$

$\hat{\rho}^{(1)}$: Opérateur densité à 1 particule
- Passons de la représentation $\{|\vec{r}\rangle\}$ à la représentation $\{|\vec{p}\rangle\}$

$$\langle \vec{r}\,|\,\vec{p}\rangle = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} e^{i\vec{p}.\vec{r}/\hbar}$$

$$\langle \vec{r}+\vec{a}\,|\,\hat{\rho}^{(1)}\,|\,\vec{r}\rangle = \int d^3p \int d^3p' \langle \vec{r}+\vec{a}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\hat{\rho}^{(1)}|\vec{p}\,'\rangle\langle\vec{p}\,'|\vec{r}\rangle = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \iint d^3p\, d^3p'\; e^{i\vec{p}.\vec{a}/\hbar}\; e^{i(\vec{p}-\vec{p}\,').\vec{r}/\hbar}\; \langle\vec{p}|\hat{\rho}^{(1)}|\vec{p}\,'\rangle$$

$$G(\vec{a}) = \int d^3r\; G^{(1)}(\vec{r},\vec{r}+\vec{a}) = \frac{N}{(2\pi\hbar)^3}\iint d^3p\,d^3p'\; e^{i\vec{p}.\vec{a}/\hbar}\langle\vec{p}|\hat{\rho}^{(1)}|\vec{p}\,'\rangle \underbrace{\int d^3r\; e^{i(\vec{p}-\vec{p}\,').\vec{r}/\hbar}}_{(2\pi\hbar)^3\,\delta(\vec{p}-\vec{p}\,')}$$

$$G(\vec{a}) = \int d^3p\; e^{i\vec{p}.\vec{a}/\hbar}\; \underbrace{N\langle\vec{p}|\hat{\rho}^{(1)}|\vec{p}\rangle}_{\mathcal{P}(\vec{p})} = \int d^3p\; e^{i\vec{p}.\vec{a}/\hbar}\;\mathcal{P}(\vec{p})$$

$G(\vec{a})$ est donc la transformée de Fourier de $\mathcal{P}(\vec{p})$

Principe de l'expérience

T-192

- Mesurer la distribution d'impulsion $\mathcal{P}(p)$ (ou la distribution de vitesse) et en particulier la largeur Δp de $\mathcal{P}(p)$
- Comme $G(a)$ est la T.F. de $\mathcal{P}(p)$, la largeur de $G(a)$, c-à-d la longueur de cohérence λ_c, est de l'ordre de $\hbar/\Delta p$
- On compare alors $\hbar/\Delta p$ à l'extension spatiale du condensat

Peut-on mesurer $\mathcal{P}(p)$ par des méthodes de temps de vol ?

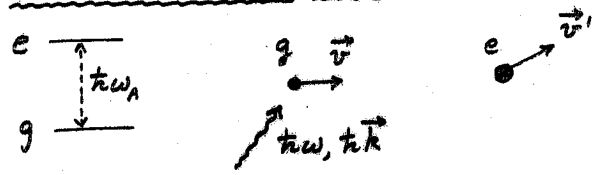
A cause des interactions répulsives, les atomes sont accélérés au cours de la phase d'expansion balistique et leurs vitesses changent.

Les méthodes de temps de vol ne donnent donc pas accès à la distribution des vitesses dans le condensat

Méthodes optiques de mesure de $\mathcal{P}(\vec{P})$ basées sur l'effet Doppler

T-193

Transitions à un photon



$$\begin{cases} M\vec{v} + \hbar\vec{k} = M\vec{v}' \\ E_g + \frac{1}{2}Mv^2 + \hbar\omega = E_e + \frac{1}{2}Mv'^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2 + \dfrac{\hbar^2k^2}{M^2} + 2\dfrac{\hbar\vec{k}}{M}\cdot\vec{v} = v'^2 \\ \hbar\omega = \hbar\omega_A + \frac{1}{2}M(v'^2 - v^2) \end{cases}$$

$$\omega = \omega_A + \underbrace{\frac{\hbar k^2}{2M}}_{\text{Recul}} + \underbrace{\vec{k}\cdot\vec{v}}_{\text{Effet Doppler}}$$

$$\Delta v \simeq 1\,\mathrm{mm/s} \longrightarrow \frac{\Delta\omega}{2\pi} \simeq 3\,\mathrm{KHz}$$

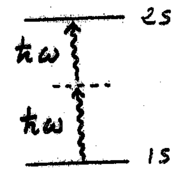
La largeur naturelle de l'état excité est en général très supérieure à cette valeur et l'effet Doppler est trop petit pour être détecté

Transitions à 2 photons entre 2 états de très longue durée de vie

T-194

① Absorption de 2 photons entre 1 état fondamental et 1 état métastable

Transition
$1s \longleftrightarrow 2s$
de l'atome
d'Hydrogène



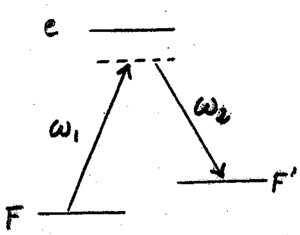
L'état 2s a une très longue durée de vie et donc une très faible largeur naturelle.

Les 2 photons $\hbar\omega = (E_{2s} - E_{1s})/2$ se propagent dans le même sens. La condition de résonance est alors sensible à l'effet Doppler

Méthode utilisée pour étudier la distribution des vitesses d'un condensat d'atomes d'Hydrogène (Réf. 2)

② Effet Raman stimulé entre 2 états fondamentaux de nombres quantiques internes différents

T-195



F et F' sont des états fondamentaux de très longue durée de vie

Transitions par effet Raman stimulé entre 2 niveaux hyperfins différents d'un atome alcalin avec des photons se propageant dans des sens opposés (pour avoir une condition de résonance sensible à l'effet Doppler

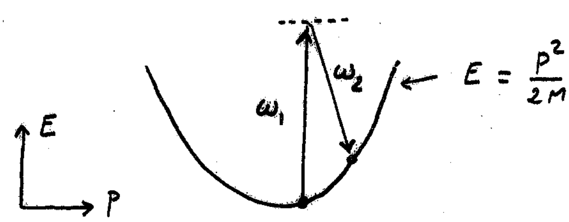
Méthode utilisée pour

- mesurer des vitesses
- exciter dans F' un groupe d'atomes de vitesses bien définies

(Voir Réf. 3)

③ Effet Raman stimulé entre 2 états fondamentaux de mêmes nombres quantiques internes (Refs 4 à 7)

T-196



L'absorption d'un photon ω_1 suivie de l'émission stimulée d'un photon ω_2 relie 2 états fondamentaux ayant le même nombre quantique interne mais des nombres quantiques externes (impulsion) différents

- Autres dénominations pour un tel effet

  Effet Compton stimulé
  Résonance induite par le recul
  Effet Rayleigh stimulé
  Effet Bragg

Condition de résonance pour les résonances induites par le recul

T-197

$$\begin{cases} M\vec{v} + \hbar\vec{k}_1 - \hbar\vec{k}_2 = M\vec{v}\,' \\ \frac{1}{2}Mv^2 + \hbar\omega_1 - \hbar\omega_2 = \frac{1}{2}Mv'^2 \end{cases}$$

$$\omega_1 - \omega_2 = \delta\omega \qquad \vec{k}_1 - \vec{k}_2 = \vec{K}$$

$$\boxed{\delta\omega = \frac{\hbar K^2}{2M} + \vec{K}.\vec{v}}$$

- Pour avoir la plus grande sensibilité à l'effet Doppler, on a intérêt à prendre $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ de sens opposés.

  On a alors $\vec{K} \simeq 2\vec{k}_1 = 2\vec{k}$

  $$\delta\omega = 4\frac{\hbar k^2}{2M} + 2\vec{k}.\vec{v}$$

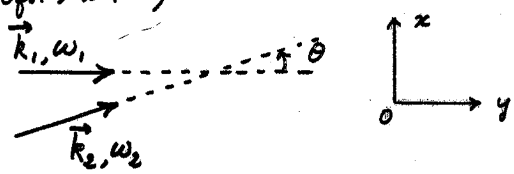
  On mesure la vitesse parallèle à $\vec{k}$
- Si $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ font un petit angle θ, $|\vec{K}| \simeq 2k\sin\frac{\theta}{2} \simeq k\theta$ et $\vec{K}$ est à peu près perpendiculaire à $\vec{k}$

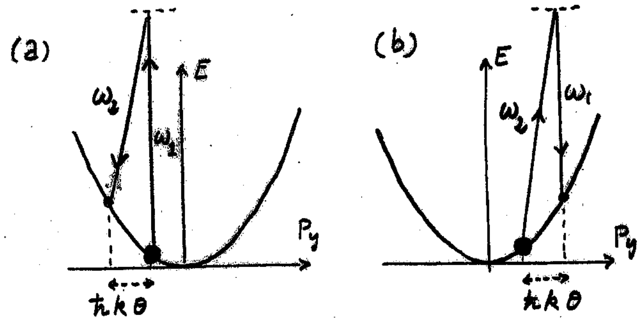
  On mesure la vitesse perpendiculaire à $\vec{k}$

Mesure de la distribution des vitesses des atomes d'une mélasse optique

T-198

(Refs. 5 à 7)





Plus $|P_y|$ est petit, plus l'état est peuplé

Le faisceau ω_2 est amplifié si $\omega_2 < \omega_1$ (Fig. a), absorbé si $\omega_2 > \omega_1$ (Fig. b)

Le signal est proportionnel à $\mathcal{P}(v) - \mathcal{P}(v - \delta v)$

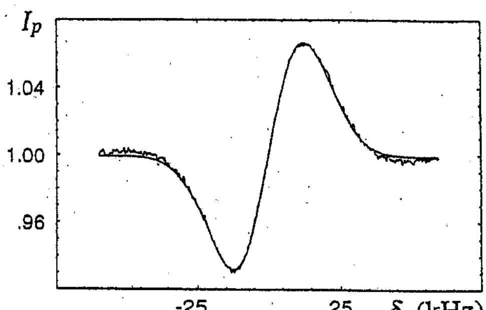
où $\delta v = \frac{\delta p_y}{M} \simeq \frac{\hbar k\theta}{M}$

Exemple de signal observé sur la transmission du faisceau ω_2

T-199

Si la largeur Doppler de la mélasse optique est grande devant $\hbar k\theta/M$ (θ assez petit), le signal, proportionnel à $\mathcal{P}(v) - \mathcal{P}(v-\delta v)$ est proportionnel à la dérivée d'une Gaussienne

Figure extraite de la Ref. 7



Première mesure de velocimétrie d'une mélasse par résonances induites par le recul

Mesure optique de $\mathcal{P}(p)$ pour un condensat

Principe (voir Ref. 1)

T-200

- Excitation par 2 faisceaux laser $\vec{k}_1, \omega_1$ et $\vec{k}_2, \omega_2$ avec $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ de sens opposés

  ω_1 et ω_2 sont loins de toute résonance optique - Emission spontanée négligeable
- On balaie $\delta\omega = \omega_1 - \omega_2$
- Pour chaque valeur de $\delta\omega$, les atomes de vitesse $\vec{v}$ telle que

  $$\delta\omega = \hbar\frac{K^2}{2M} + \vec{K}.\vec{v},$$

  où $\vec{K} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$, subissent une transition par effet Raman stimulé qui ne change pas leur état interne mais leur transfère une impulsion $\hbar\vec{K}$ qui leur permet de s'échapper du condensat
- L'étude de la variation avec $\delta\omega$ du nombre d'atomes qui s'échappent du condensat permet de déterminer la distribution des vitesses des atomes condensés (dans la direction de $\vec{K}$)

Effet des interactions

T-201

- La condition de résonance
$$\delta\omega = \frac{\hbar K^2}{2M} + \vec{K}\cdot\vec{v}$$
a été établie pour des atomes libres
- Il faudrait en toute rigueur étudier le spectre des excitations élémentaires du condensat et calculer la différence d'énergie des couples d'états reliés par la transition d'effet Raman stimulé

Un cas simple : Système homogène

- Pour un système homogène, la théorie de Bogolubov donne la relation de dispersion des excitations élémentaires (voir T-16)
$$\hbar\omega(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2M}\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2M} + 2 n_0 g\right)}$$
où n_0 est la densité d'atomes, $g = \frac{4\pi\hbar^2}{M} a$, a étant la longueur de diffusion
- Le condensat correspond à $k = 0$
- Après le transfert d'impulsion $\hbar\vec{K}$ par effet Raman stimulé, l'état atteint a une énergie $\hbar\omega(\vec{K})$

La condition $\frac{\hbar^2 K^2}{2M} \gg n_0 g$ est en général largement réalisée quand $\vec{K}$ est un vecteur d'onde dans le domaine optique. On a alors

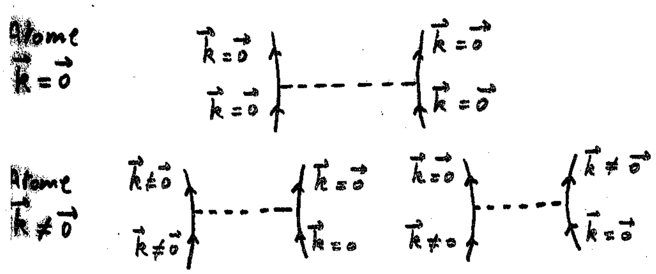
T-202

$$\hbar\omega(K) \simeq \frac{\hbar^2 K^2}{2M} + n_0 g$$

La variation d'énergie d'un atome initialement immobile et gagnant une impulsion $\hbar\vec{K}$ n'est pas simplement l'énergie cinétique correspondante $\frac{\hbar^2 K^2}{2M}$

Son énergie d'interaction avec les autres atomes n'est pas la même suivant qu'il est condensé ($\vec{k} = \vec{0}$) ou qu'il a une impulsion $\vec{k} \neq \vec{0}$. Cette différence d'énergie d'interaction est égale à $n_0 g$ (si $\vec{k}$ est suffisamment grand)

Origine de cette différence : Terme d'échange dans l'interaction



Cas d'un condensat inhomogène

T-203

2 modifications importantes par rapport au cas homogène

1. L'impulsion des atomes condensés n'est plus nulle. L'extension spatiale finie du condensat entraîne une dispersion d'impulsion qui est précisément la quantité que l'on veut mesurer
2. La densité d'atomes n'est plus constante. Elle varie avec $\vec{r}$: $n(\vec{r})$

Traitement approché

Chaque élément de volume d^3r du condensat contient $n(\vec{r})\,d^3r$ atomes. On considère le condensat comme homogène au voisinage de $\vec{r}$ et on introduit une condition de résonance locale au point $\vec{r}$ par l'équation
$$\delta\omega = \frac{\hbar K^2}{2M} + \frac{g\,n(\vec{r})}{\hbar} + \vec{K}\cdot\vec{v}$$

Prédictions du traitement approché

T-204

- Chaque élément d^3r donne un spectre Doppler correspondant à la distribution des valeurs de $\vec{K}\cdot\vec{v}$, décalé de $\frac{\hbar K^2}{2M} + \frac{g\,n(\vec{r})}{\hbar}$
- Par rapport à la fréquence $\hbar K^2/2M$, le spectre attendu $I(\delta\omega)$ (nombre d'atomes quittant le condensat en fonction de $\delta\omega$) est la convolution du spectre Doppler correspondant à la distribution de $\vec{K}\cdot\vec{v}$ par la courbe donnant la répartition des valeurs possibles du déplacement $gn/\hbar$

2 Problèmes à résoudre

- Distribution des valeurs de $\vec{K}\cdot\vec{v}$
- Distribution des valeurs de n

Pour un calcul plus rigoureux du signal

Voir les calculs en cours du "facteur de structure dynamique" dans l'équipe de Trento (S. Stringari, L. Pitaevskii)

Distribution d'impulsion d'un condensat à la limite de Thomas-Fermi

T-205

Fonction d'onde du condensat

- Normalisation choisie $\int |\psi(\vec{r})|^2 d^3r = N$
- Expression de $|\psi(\vec{r})|^2$ (voir T-12)

$$|\psi(\vec{r})|^2 = \frac{1}{g}\left[\mu - \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)\right]$$

$|\psi(\vec{r})|^2$ s'annule en $x = \pm x_0$, $y = \pm y_0$, $z = \pm z_0$

$$\frac{1}{2}m\omega_x^2 x_0^2 = \mu = \frac{1}{2}m\omega_y^2 y_0^2 = \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2$$

- Densité au centre

$$|\psi(\vec{0})|^2 = n_0 = \frac{\mu}{g} \longrightarrow \mu = g n_0$$

- On peut donc écrire $|\psi(\vec{r})|^2$ sous la forme

$$|\psi(\vec{r})|^2 = n_0\left[1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]$$

Paraboles inversées suivant Ox, Oy, Oz

- Fonction d'onde $\psi(\vec{r})$

Comme $\psi(\vec{r})$ est réelle

$$\psi(x,y,z) = \sqrt{n_0}\,\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$$

Distribution $\mathcal{P}(p_x)$ d'impulsion suivant Ox (on suppose $\vec{\kappa} \parallel Ox$)

T-206

$$\mathcal{P}(p_x) = \iint dp_y\, dp_z\, \mathcal{P}(p_x, p_y, p_z)$$

$$\mathcal{P}(p_x, p_y, p_z) = |\tilde{\psi}(p_x, p_y, p_z)|^2$$

$$\tilde{\psi}(p_x, p_y, p_z) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} \iiint dx\, dy\, dz\; n_0\, e^{-i(p_x x + p_y y + p_z z)/\hbar} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$$

- Changement de variables

$$\frac{x}{x_0} = \xi \quad \frac{y}{y_0} = \eta \quad \frac{z}{z_0} = \zeta \qquad \vec{\rho} = \{\xi, \eta, \zeta\}$$

$$\frac{p_x}{\hbar/x_0} = \kappa_x \quad \frac{p_y}{\hbar/y_0} = \kappa_y \quad \frac{p_z}{\hbar/z_0} = \kappa_z \qquad \vec{\kappa} = \{\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z\}$$

- Expression de $\tilde{\psi}$

$$\tilde{\psi}(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z) = \frac{\sqrt{n_0}\, x_0 y_0 z_0}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, I$$

où I est donné par l'intégrale

$$I = \int_{\rho \leq 1} d^3\rho\; e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{\rho}} \sqrt{1-\rho^2}$$

$$= 2\pi \int_0^1 d\rho\, \rho^2 \sqrt{1-\rho^2} \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta\, e^{-i\kappa\rho\cos\theta}$$

Calcul de I

T-207

$$\int_0^\pi d\theta\, \sin\theta\, e^{-i\kappa\rho\cos\theta} = \frac{e^{i\kappa\rho} - e^{-i\kappa\rho}}{i\kappa\rho}$$

$$I = \frac{2\pi}{i\kappa} \int_{-1}^{+1} d\rho\, \rho \sqrt{1-\rho^2}\, e^{i\kappa\rho}$$

Changement de variables $\rho = \cos\alpha$
+ Intégration par parties

$$I = \frac{2\pi}{i\kappa} \int_0^\pi d\alpha\, \sin^2\alpha \cos\alpha\, e^{i\kappa\cos\alpha}$$

$$= -\frac{\pi}{\kappa^2} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, \cos 2\alpha\, e^{i\kappa\cos\alpha}$$

Pour des raisons de parité, seule la partie paire en α de $e^{i\kappa\cos\alpha}$ intervient

$$\cos(\kappa\cos\alpha) = J_0(\kappa) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(\kappa) \cos 2n\alpha$$

J_n : Fonction de Bessel d'ordre n

Seul, le terme $n=1$ contribue à I

$$I = \frac{2\pi}{\kappa^2} J_2(\kappa) \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, \cos^2 2\alpha = \frac{\pi}{\kappa^2} J_2(\kappa)$$

Expression de $\mathcal{P}(p_x, p_y, p_z)$

T-208

$$\tilde{\psi}(\vec{\kappa}) \propto \frac{J_2(\kappa)}{\kappa^2}$$

$$|\tilde{\psi}(\vec{\kappa})|^2 \propto \left|\frac{J_2(\kappa)}{\kappa^2}\right|^2$$

$$\kappa^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2 = \frac{1}{\hbar^2}\left[p_x^2 x_0^2 + p_y^2 y_0^2 + p_z^2 z_0^2\right]$$

$$\mathcal{P}(p_x, p_y, p_z) \propto \left[\frac{J_2\left(\sqrt{\frac{p_x^2 x_0^2}{\hbar^2} + \frac{p_y^2 y_0^2}{\hbar^2} + \frac{p_z^2 z_0^2}{\hbar^2}}\right)}{\frac{p_x^2 x_0^2}{\hbar^2} + \frac{p_y^2 y_0^2}{\hbar^2} + \frac{p_z^2 z_0^2}{\hbar^2}}\right]^2$$

L'intégrale sur p_y et p_z n'est pas aisée

Expression approchée de $J_2(\kappa)/\kappa^2$

$$J_2(\kappa) = \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,(r+2)!} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{2r}$$

$$= \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\frac{\kappa^2}{4} + \cdots\right]$$

$$= \frac{\kappa^2}{8}\left[1 - \frac{\kappa^2}{12} + \cdots\right]$$

On peut donc écrire

$$\left[\frac{J_2(\kappa)}{\kappa^2}\right]^2 = \frac{1}{64}\left[1 - \frac{\kappa^2}{12} + \cdots\right]^2$$

$$\simeq \frac{1}{64}\left[1 - \frac{\kappa^2}{6}\right]$$

$$\simeq \frac{1}{64}\, e^{-\kappa^2/6}$$

Expression approchée de $\mathcal{P}(p_x, p_y, p_z)$

T-209

Pour des valeurs pas trop élevées de p_x, p_y, p_z, on peut donc écrire

$$\mathcal{P}(p_x, p_y, p_z) \propto e^{-\kappa^2/6} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{p_x^2}{6\hbar^2/x_0^2}\right\} \exp\left\{-\frac{p_y^2}{6\hbar^2/y_0^2}\right\} \exp\left\{-\frac{p_z^2}{6\hbar^2/z_0^2}\right\}$$

L'intégrale sur p_y et p_z est alors immédiate et on trouve

$$\mathcal{P}(p_x) \propto \exp\left\{-\frac{p_x^2}{6\hbar^2/x_0^2}\right\}$$

La valeur quadratique moyenne de p_x est égale, dans cette approximation, à

$$\Delta p_x = \sqrt{3}\,\frac{\hbar}{x_0} = 1.73\,\frac{\hbar}{x_0}$$

Remarques

① Dans la référence 1, c'est $\mathcal{P}(p_x, p_y=0, p_z=0)$ qui est calculé au lieu de $\iint dp_y\,dp_z\,\mathcal{P}(p_x, p_y, p_z)$

On trouve alors

$$\mathcal{P}(p_x, p_y=0, p_z=0) \propto \left[\frac{J_2\left(\frac{p_x x_0}{\hbar}\right)}{p_x^2 x_0^2/\hbar^2}\right]^2$$

$$\Delta p_x = \sqrt{\frac{21}{8}}\,\frac{\hbar}{x_0} = 1.62\,\frac{\hbar}{x_0}$$

Remarques (suite)

T-210

② Le traitement présenté ici s'intéresse à la partie centrale de $\mathcal{P}(p_x)$ qui a la forme d'une courbe en cloche se rapprochant d'une Gaussienne

L'ajustement des résultats expérimentaux étant fait avec une Gaussienne, une telle approche doit donner une valeur raisonnable de Δp_x

③ La fonction d'onde à l'approximation de Thomas-Fermi a une pente verticale en $x = x_0$, ce qui conduit à une divergence de la variance Δp_x^2 de p_x.

Même après un traitement plus précis de la zone $x \simeq x_0$, on obtient des valeurs élevées de Δp_x différentes de la ½ largeur à $1/\sqrt{e}$. L'approximation faite ici est donc plus proche de l'expérience

④ Le profil Doppler est proportionnel à $\iint dp_y\,dp_z\,\mathcal{P}(p_x, p_y, p_z)$ et non à $\mathcal{P}(p_x, p_y=0, p_z=0)$

Distribution $\mathcal{P}(n)$ des valeurs de n

T-211

$$n(\vec{r}) = n_0\left[1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]$$

Après le changement de variables

$x, y, z \rightarrow \xi, \eta, \zeta \qquad \vec{r} \rightarrow \vec{\rho}$

$$n(\vec{\rho}) = n_0(1-\rho^2)$$

Chaque valeur de ρ contribue au signal avec un poids proportionnel au nombre d'atomes situés à cette valeur de ρ

Distributions $P(\rho)$ des poids des diverses valeurs de ρ

$$P(\rho)\,d\rho = \mathcal{N}\,4\pi x_0 y_0 z_0\,\rho^2 d\rho\, n(\rho)$$
$$= 4\pi\mathcal{N} n_0 x_0 y_0 z_0\,\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho$$

$\mathcal{N}$: constante de normalisation déterminée par $\int_0^1 P(\rho)\,d\rho = 1$

$$\mathcal{N} = \frac{15}{8\pi}\,\frac{1}{n_0 x_0 y_0 z_0}$$

On a donc

$$P(\rho) = \frac{15}{2}\,\rho^2(1-\rho^2)$$

Calcul de $\mathcal{P}(n)$

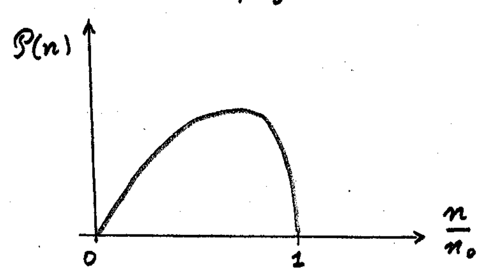
T-212

A chaque valeur de ρ est associée une valeur de n par

$$n = n_0(1-\rho^2)$$
$$\mathcal{P}(n)\,dn = P(\rho)\,d\rho$$
$$\mathcal{P}(n) = P(\rho)\left|\frac{d\rho}{dn}\right|$$
$$P(\rho) = \frac{15}{2}\rho^2(1-\rho^2) = \frac{15}{2}\left(1-\frac{n}{n_0}\right)\frac{n}{n_0}$$
$$dn = -2n_0\,\rho\,d\rho$$
$$\left|\frac{d\rho}{dn}\right| = \frac{1}{2n_0\rho} = \frac{1}{2n_0}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{n_0}}}$$

On en déduit

$$\mathcal{P}(n) = \frac{15}{4n_0^2}\,n\sqrt{1-\frac{n}{n_0}}$$



Valeur moyenne et écart quadratique moyen de n

T-213

$$\overline{n} = \int_0^{n_0} n\,\mathcal{P}(n)\,dn$$

$$\overline{n^2} = \int_0^{n_0} n^2\,\mathcal{P}(n)\,dn$$

$$\Delta n = \sqrt{\overline{n^2} - \overline{n}^2}$$

Une série d'intégrations par parties donne

$$\int_0^1 u^2\sqrt{1-u}\,du = \frac{16}{7\times 15}$$

$$\int_0^1 u^3\sqrt{1-u}\,du = \frac{4\times 24}{15\times 63}$$

On en déduit

$$\overline{n} = \frac{15}{4n_0^2}\int_0^{n_0} n^2\sqrt{1-\frac{n}{n_0}}\,dn = \frac{4\,n_0}{7}$$

$$\overline{n^2} = \frac{15}{4n_0^2}\int_0^{n_0} n^3\sqrt{1-\frac{n}{n_0}}\,dn = \frac{24}{63}\,n_0^2$$

$$\Delta n^2 = n_0^2\,\frac{8}{147}$$

Déplacement du spectre dû aux interactions

$$(\Delta\delta\omega)_{\text{inter.}} = \frac{g}{\hbar}\,\overline{n} = \frac{4}{7}\,\frac{g\,n_0}{\hbar}$$

Elargissement du spectre dû aux interactions

T-214

Si l'on approxime le profil de $\mathcal{P}(n)$ par une Gaussienne, le spectre final, qui est le produit de convolution de 2 courbes approximées par des Gaussiennes, est aussi une Gaussienne.

Les variances s'ajoutent alors, et on obtient pour la variance $\Delta(\delta\omega)^2$ de $\delta\omega$

$$\Delta(\delta\omega)^2 = \left[\Delta(\delta\omega)^2\right]_{\text{Doppler}} + \left[\Delta(\delta\omega)^2\right]_{\text{Inter}}$$

$$= \alpha^2\,\frac{\hbar^2}{x_0^2} + \frac{8}{147}\,\frac{g^2 n_0^2}{\hbar^2}$$

avec $\alpha^2 = 3$ ou $\frac{21}{8}$ suivant la théorie

Recapitulation

L'effet des interactions est donc

- de déplacer le spectre Doppler
- d'élargir ce spectre

Le spectre Doppler ne dépend pas de n_0

L'effet des interactions ne dépend pas de x_0

Etude expérimentale (voir Ref. 1)

T-215

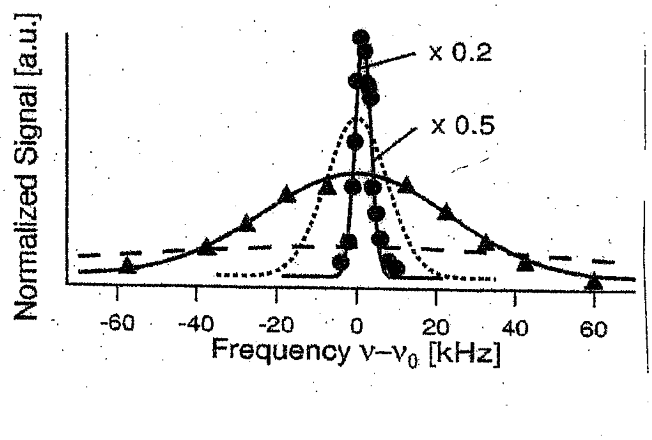
- Condensat en forme de cigare horizontal
- On fait varier n_0 et x_0 en changeant la raideur du piège et le nombre N d'atomes condensés
- On mesure n_0 par étude de l'expansion balistique, x_0 par mesure de N et des fréquences du piège
- Les faisceaux laser induisant la transition Raman sont appliqués un temps très court avant la coupure du piège. La durée de l'impulsion est suffisamment grande pour avoir une résolution $\leq 1\,\text{KHz}$ et suffisamment courte devant la période d'oscillation dans le piège
- Comme $g\,n_0 \ll \hbar^2 k^2/2M$, les atomes ayant subi la transition Raman (qui ont gagné une impulsion $2\hbar k$) se détachent nettement des autres, pendant l'expansion balistique

Exemple de spectre $I(\delta\omega/2\pi)$

T-216

Figure extraite de la Ref. 1

- ● Signal obtenu sur les atomes du condensat
- ▲ Signal obtenu après 3 ms d'expansion balistiques (on mesure les vitesses acquises lors de cette expansion)
- .... Signal calculé pour une distribution $\mathcal{P}(v_x)$ correspondant à l'état fondamental du piège
- – – – Signal du nuage thermique

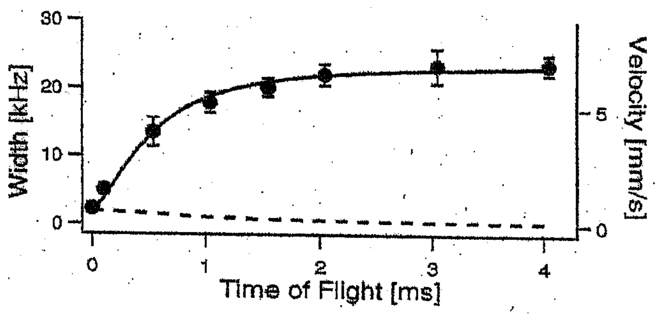


Etude par vélocimétrie Doppler de l'expansion balistique

T-217

Figure extraite de la ref 1

Les résonances induites par le recul permettent aussi d'étudier l'évolution temporelle de la distribution de vitesse des atomes au cours de l'expansion balistique



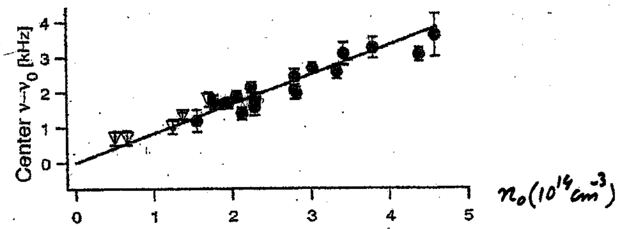
Courbe en trait plein : Prédiction théorique à partir des résultats de la Ref. 8

Courbe en trait tireté : Contribution de l'élargissement dû aux interactions et à la taille finie du nuage

Déplacement du spectre dû aux interactions

Figure extraite de la Ref. 1

T-218

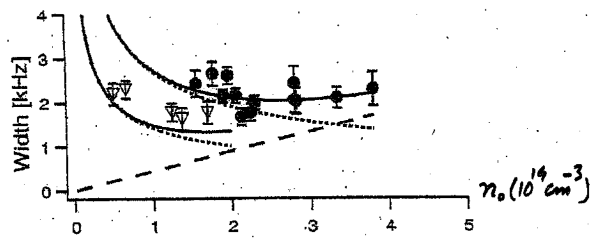


Les ronds et les triangles correspondent à 2 fréquences différentes du piège

Droite en trait plein : Théorie

Largeur du spectre en fonction de n_0

Figure extraite de la Ref. 1



- - - Contribution des interactions

..... Effet de taille finie (x_0)

—— Somme des 2 effets (en quadrature)

Largeur du spectre en fonction de x_0

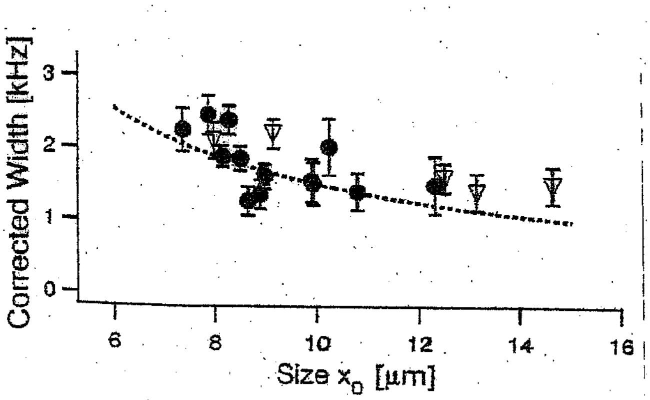
Figure extraite de la Ref 1

T-219

Résultats corrigés

- de la contribution des interactions
- de l'élargissement dû à la durée finie des impulsions laser

.... Courbe théorique calculée à partir de $\Delta p_x = \sqrt{\frac{21}{8}} \frac{\hbar}{x_0}$



Conclusion

T-220

1. Les résonances induites par le recul permettent d'étudier la distribution de vitesse des atomes condensés dans un piège
2. La différence entre la dispersion des vitesses des atomes condensés et celle des atomes du nuage thermique est beaucoup plus importante que la différence de largeur des 2 pics obtenus après expansion balistique
3. Un traitement simplifié de l'effet des interactions permet de soustraire leur contribution et de montrer que Δp_x est en bon accord avec la largeur liée à l'extension spatiale finie x_0 du condensat
4. Une théorie plus quantitative du facteur de structure dynamique reste à faire

Références

(1) - J. Stenger, S. Inouye, A. Chikkatur, D. Stamper-Kurn, D. Pritchard, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. 82, 4569 (1999)

(2) - D. Fried, T. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S. Moss, D. Kleppner, T. Greytak, Phys. Rev. Lett. 81, 3811 (1998)

(3) - M. Kasevich, D. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, S. Chu Phys. Rev. Lett. 66, 2297 (1991)

(4) - J. Guo, P. Berman, B. Dubetsky, G. Grynberg, Phys. Rev. A46, 1426 (1992)

(5) - J-Y. Courtois, G. Grynberg, B. Lounis, P. Verkek, Phys. Rev. Lett. 72, 3017 (1994)

(6) - D. Meacher, D. Boiron, H. Metcalf, C. Salomon, G. Grynberg Phys. Rev. A50, R1992 (1994)

(7) - J-Y Courtois, G. Grynberg, Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics, Vol 36, p. 87 (1996)

(8) - Y. Castin, R. Dum, Phys. Rev. Lett. 77, 5315 (1996)