Mélanges statistiques d'états $|N, \varphi\rangle$ correspondant à des phases φ différentes

T-85

$$\hat{\rho} = \int d\varphi\ W(\varphi)\ |N,\varphi\rangle\langle N,\varphi|$$

$W(\varphi)$: Distribution de probabilité de φ

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{n'=0}^{N} \sqrt{\frac{N!}{(N-n)!\,n!}}\sqrt{\frac{N!}{(N-n')!\,n'!}}\ \alpha^{N-n}\alpha^{N-n'}\beta^{n}\beta^{n'}$$

$$\left[\int_0^{2\pi} d\varphi\ W(\varphi)\, e^{i(n'-n)\varphi}\right] |n_a = N-n, n_b = n\rangle\langle n_a = N-n', n_b = n'|$$

Cas d'une phase équipartie entre 0 et 2π

$$W(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i(n'-n)\varphi} = \delta_{nn'}$$

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!\,n!}(\alpha^2)^{N-n}(\beta^2)^{n}\ |N-n,n\rangle\langle N-n,n|$$

Mélange statistique de produits d'états de Fock $|n_a\rangle|n_b\rangle$, où n_a et n_b ont des valeurs bien définies (avec $n_a + n_b = N$)

Pas de cohérences entre états $|n_a\rangle|n_b\rangle$ et $|n'_a\rangle|n'_b\rangle$ avec $n'_a \neq n_a$, alors que de telles cohérences existent dans l'état $|N,\varphi\rangle$

Cas général

T-86

$$K(n'-n) = \int_0^{2\pi} d\varphi\ W(\varphi)\, e^{i(n'-n)\varphi}$$

$K(n'-n)$ est une fonction de $n'-n$ d'autant plus étroite que $W(\varphi)$ est large.

Conclusion

φ bien définie $\longrightarrow$ $\Delta(\hat{N}_a - \hat{N}_b) \propto \sqrt{N}$

φ équipartie entre 0 et 2π $\longrightarrow$ $\Delta(\hat{N}_a - \hat{N}_b) = 0$

Cas général $\longrightarrow$ $\Delta(\hat{N}_a - \hat{N}_b)$ d'autant plus grand que $\Delta\varphi$ est plus petit

C'est $\hat{N}_a - \hat{N}_b$ qui apparait en quelque sorte comme la variable conjuguée de la phase relative φ

Etats cohérents relatifs

T-87

Description de 2 condensats par 2 états cohérents

$$|A e^{i\varphi_a}\rangle = e^{-A^2/2}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{A^N}{\sqrt{N!}}\, e^{iN\varphi_a}\,|N\rangle$$

$$|B e^{i\varphi_b}\rangle = e^{-B^2/2}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{B^N}{\sqrt{N!}}\, e^{iN\varphi_b}\,|N\rangle$$

A et B : Amplitudes réelles

φ_a et φ_b : Phases absolues de chaque condensat

$\varphi = \varphi_a - \varphi_b$: Phase relative

φ_a et φ_b n'ont pas séparement de sens physique

Définition d'un état cohérent relatif

Mélange statistique de produits d'états cohérents

$$|A e^{i\varphi_a}\rangle \otimes |B e^{i(\varphi_a - \varphi)}\rangle$$

où la phase relative φ est fixée et où la phase absolue φ_a est équipartie entre 0 et 2π

Expression de l'état cohérent relatif noté $\hat{\rho}_{AB}(\varphi)$

T-88

$$\hat{\rho}_{AB}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi_a\ \times$$

$$\times\ |A e^{i\varphi_a}\rangle\langle A e^{i\varphi_a}| \otimes |B e^{i(\varphi_a-\varphi)}\rangle\langle B e^{i(\varphi_a-\varphi)}|$$

Eléments de matrice de $\hat{\rho}_{AB}(\varphi)$ dans la base $\{|n_a, n_b\rangle\}$

$$\langle n_a, n_b|\, \hat{\rho}_{AB}(\varphi)\, |n'_a, n'_b\rangle =$$

$$e^{-(A^2+B^2)}\ \frac{A^{(n_a+n'_a)}}{\sqrt{n_a!}\sqrt{n'_a!}}\ \frac{B^{(n_b+n'_b)}}{\sqrt{n_b!}\sqrt{n'_b!}}\ e^{i(n'_b-n_b)\varphi}\ \times$$

$$\times\ \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi_a\, e^{i[n_a+n_b-n'_a-n'_b]\varphi}}_{\delta(n_a+n_b-n'_a-n'_b)}$$

$\hat{\rho}_{AB}(\varphi)$ n'a d'éléments de matrice non nuls qu'entre états ayant le même nombre total de particules

$$n_a + n_b = n'_a + n'_b = N$$

$\hat{\rho}_{AB}(\varphi)$ est un mélange statistique d'états à nombre total de particules fixé