Développement de $e^{-\beta[E(N_0)-\mu N_0]}$ au voisinage de $\bar{N}_0$

T-65

$$-\beta[E(N_0)-\mu N_0] \simeq -\beta[E(\bar{N}_0)-\mu\bar{N}_0]$$

$$+\underbrace{\text{Terme d'ordre 1}}_{=0 \text{ par définition de } \bar{N}_0} - \frac{\beta}{2}(N_0-\bar{N}_0)^2\left[\frac{d^2}{dN_0^2}E(N_0)\right]_{N_0=\bar{N}_0}$$

Pour un gaz de bosons dans une boîte L^3 (système homogène)

$$\mu(N_0) = g\rho = g\,\frac{N_0}{L^3}$$

$$\left[\frac{d^2}{dN_0^2}E(N_0)\right]_{N_0=\bar{N}_0} = \left[\frac{d}{dN_0}\mu(N_0)\right]_{N_0=\bar{N}_0} = \frac{g}{L^3}$$

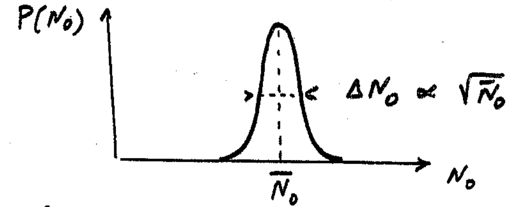
On en déduit

$$P(N_0) \propto e^{-\frac{1}{2}\frac{\beta g}{L^3}(N_0-\bar{N}_0)^2}$$

Distribution Gaussienne (et non plus exponentielle) centrée autour d'une valeur moyenne non nulle $\bar{N}_0$ et de largeur

$$\Delta N_0 \simeq \sqrt{\frac{L^3}{\beta g}} = \sqrt{\frac{L^3}{\bar{N}_0}\frac{\bar{N}_0}{\beta g}} = \sqrt{\bar{N}_0}\sqrt{\frac{k_BT}{\rho g}}$$

T-66



Conclusions

L'effet des interactions, pris en compte avec une simple théorie de champ moyen, réduit les fluctuations du nombre de particules condensées

- La valeur la plus probable $\bar{N}_0$ de N_0 n'est plus nulle
- La largeur ΔN_0 de la distribution n'est plus proportionnelle à $\langle N_0\rangle$ mais à $\sqrt{\bar{N}_0}$

Un tel résultat justifie l'utilisation de l'ensemble grand canonique pour décrire les expériences actuelles de condensation de Bose-Einstein d'atomes ultrafroids

Quelques études expérimentales des fonctions de corrélation $G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$ pour des condensats de Bose-Einstein

Fonction $G^{(1)}$

T-67

Contraste des franges d'interférence observées dans la zone de recouvrement de 2 condensats (ou de 2 faisceaux atomiques issus de 2 points différents d'un même condensat)

Etude abordée ultérieurement après la discussion de la phase relative de 2 condensats

Fonction $G^{(2)}$

Intervient dans l'énergie d'interaction mesurable sur l'énergie libérée après expansion balistique du condensat

Fonction $G^{(3)}$

Intervient dans l'expression du taux de collisions inélastiques à 3 corps

Mesure de $G^{(2)}$

T-68

Energie libérée après expansion balistique du condensat (voir T-13)

$$E_{\text{libérée}} = E_{\text{inter}}^{\text{avant}}$$

Expression de E_{inter}

$$E_{\text{inter}} = \frac{1}{2}\iint d^3r\,d^3r'\,\langle\hat{\psi}^+(\vec{r})\hat{\psi}^+(\vec{r}')\,V(\vec{r}-\vec{r}')\,\hat{\psi}(\vec{r}')\hat{\psi}(\vec{r})\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\iint d^3r\,d^3r'\,V(\vec{r}-\vec{r}')\,G^{(2)}(\vec{r},\vec{r}')$$

$$V(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{4\pi\hbar^2}{m}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$E_{\text{inter}} = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\,a\int d^3r\,G^{(2)}(\vec{r},\vec{r})$$

$$g^{(2)}(\vec{r},\vec{r}) = \frac{G^{(2)}(\vec{r},\vec{r})}{G^{(1)}(\vec{r},\vec{r})\,G^{(1)}(\vec{r},\vec{r})} = \frac{G^{(2)}(\vec{r},\vec{r})}{[\rho(\vec{r})]^2}$$

$$\hookrightarrow\ E_{\text{inter}} = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\,a\int d^3r\,[\rho(\vec{r})]^2\,g^{(2)}(\vec{r},\vec{r})$$

- Pour un condensat
  $g^{(2)}(\vec{r},\vec{r}) = 1$ (voir T-37)
- Pour un nuage thermique
  $g^{(2)}(\vec{r},\vec{r}) = 2$ (voir T-57)