Fluctuations du nombre N_0 de particules condensées

T-61

$$\Delta N_0^2 = \langle \hat{N}_0^2 \rangle - \langle \hat{N}_0 \rangle^2$$

Comparaison des résultats obtenus pour ΔN_0^2 avec 2 descriptions différentes du condensat

① Description par un état de Fock $|N_0\rangle$

$$\hat{N}_0 = \hat{a}_0^+ \hat{a}_0$$

$$\langle \hat{N}_0^2 \rangle = \langle N_0 | \underbrace{\hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0^+ \hat{a}_0}_{} | N_0 \rangle$$

$$= \hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \hat{a}_0^+ \hat{a}_0$$

$$= N_0(N_0 - 1) + N_0 = N_0^2$$

$$\langle \hat{N}_0 \rangle = \langle N_0 | \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 | N_0 \rangle = N_0$$

$$\langle \hat{N}_0 \rangle^2 = N_0^2$$

$$\hookrightarrow \quad \Delta N_0 = 0$$

Résultat évident a priori

Si l'état du condensat est décrit par un état de Fock, N_0 est fixé et ne fluctue pas

② Description grand canonique

T-62

$$\langle \hat{N}_0^2 \rangle = \mathrm{Tr}\left\{ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{\rho} \right\}$$

Utilisation du théorème de Wick

$$\langle \hat{N}_0^2 \rangle = \mathrm{Tr}\left\{ (\hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \hat{a}_0^+ \hat{a}_0) \hat{\rho} \right\}$$

$$\langle \hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0 \rangle = \langle \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \rangle \langle \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \rangle + \langle \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \rangle \langle \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \rangle$$

$$= 2 \langle \hat{N}_0 \rangle^2$$

$$\hookrightarrow \quad \Delta N_0^2 = \langle \hat{N}_0^2 \rangle - \langle \hat{N}_0 \rangle^2$$

$$= \langle \hat{N}_0 \rangle^2 + \langle \hat{N}_0 \rangle$$

$$\Delta N_0^2 = \langle \hat{N}_0 \rangle (\langle \hat{N}_0 \rangle + 1)$$

Si $\langle \hat{N}_0 \rangle \gg 1$

$$\Delta N_0 \simeq \langle \hat{N}_0 \rangle$$

Fluctuations très importantes du nombre de particules condensées

Distribution des valeurs possibles du nombre de particules condensées

T-63

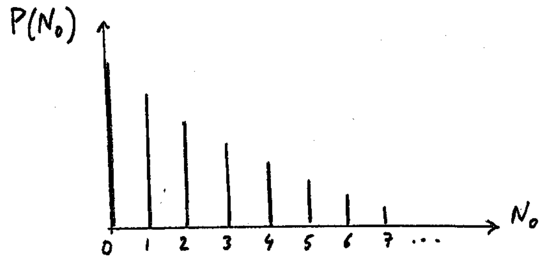
$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z_G} \exp\{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})\}$$

En l'absence d'interactions, l'opérateur densité grand canonique et la grande fonction de partition Z_G se factorisent

$$\hat{\rho} = \prod_{\substack{\text{états} \\ \text{individuels } k}} \frac{1}{Z_G^k} e^{-\beta \hat{N}_k (\varepsilon_k - \mu)}$$

Etat fondamental ε_0

$$P(N_0) = \frac{1}{Z_G^0} e^{-\beta N_0 (\varepsilon_0 - \mu)}$$



Distribution exponentielle

C'est la valeur $N_0 = 0$ qui est la plus probable !

Prise en compte des interactions dans le condensat avec une théorie de champ moyen (Ref. 1)

T-64

Pour $T \ll T_c$, on peut décrire le condensat par un opérateur densité

$$\hat{\rho}_0 = \frac{1}{Z_G^0} \sum_{N_0} e^{-\beta[E(N_0) - \mu N_0]} |N_0\rangle\langle N_0|$$

où $E(N_0)$ n'est plus simplement égal à $\varepsilon_0 N_0$, mais tient compte des interactions, ce qui fait apparaître dans $E(N_0)$ des termes quadratiques en N_0

Valeur la plus probable $\overline{N}_0$ de N_0

C'est la valeur qui minimise $E(N_0) - \mu N_0$

$$\frac{\partial}{\partial N_0}\left[E(N_0) - \mu N_0\right]_{N_0 = \overline{N}_0} = 0$$

$$\hookrightarrow \quad \mu = \frac{d}{dN_0} E(N_0) \Big|_{N_0 = \overline{N}_0}$$