T-185

On en déduit

$$\hat a^+_{\psi_1}(t) = e^{i[\mu-(\bar N-\frac{1}{2})\mu']t/\hbar}\,\hat a^+_{\psi_1}\,e^{i\mu'\hat N_1 t/\hbar}$$

Un calcul analogue donne

$$\hat a_{\psi_2}(t) = e^{-i[\mu-(\bar N-\frac{1}{2})\mu']t/\hbar}\,e^{-i\mu'\hat N_2 t/\hbar}\,\hat a_{\psi_2}$$

de sorte que

$$G^{(1)}(\vec r_1,\vec r_2,t) = \psi_1^*(\vec r_1)\,\psi_2(\vec r_2)\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta_1$$

$$\langle Ae^{i\theta_1},Ae^{i\theta_1}|\hat a^+_{\psi_1}\,e^{i\mu'\hat N_1 t/\hbar}\,e^{-i\mu'\hat N_2 t/\hbar}\,\hat a_{\psi_2}|Ae^{i\theta_1},Ae^{i\theta_1}\rangle$$

$$= \psi_1^*(\vec r_1)\psi_2(\vec r_2)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta_1\,\langle Ae^{i\theta_1}|\hat a^+_{\psi_1}\,e^{i\mu'\hat N_1 t/\hbar}|Ae^{i\theta_1}\rangle\times$$

$$\langle Ae^{i\theta_1}|e^{-i\mu'\hat N_2 t/\hbar}\,\hat a_{\psi_2}|Ae^{i\theta_1}\rangle$$

Comme $|Ae^{i\theta_1}\rangle$ est ket propre de $\hat a_{\psi_2}$ et que $\langle Ae^{i\theta_1}|$ est bra propre de $\hat a^+_{\psi_1}$, on a

$$G^{(1)}(\vec r_1,\vec r_2,t) = \psi_1^*(\vec r_1)\,\psi_2(\vec r_2)\,A^2\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta_1$$

$$\langle Ae^{i\theta_1}|e^{i\mu'\hat N_1 t/\hbar}|Ae^{i\theta_1}\rangle\langle Ae^{i\theta_1}|e^{-i\mu'\hat N_2 t/\hbar}|Ae^{i\theta_1}\rangle$$

T-186

Calcul de $\langle Ae^{i\theta_1}|e^{i\mu'\hat N_1 t/\hbar}|Ae^{i\theta_1}\rangle$

$$|Ae^{i\theta_1}\rangle = e^{-A^2/2}\sum_{N_1=0}^{\infty}\frac{A^{N_1}e^{iN_1\theta_1}}{\sqrt{N_1!}}\,|N_1\rangle$$

$$e^{i\mu'\hat N_1 t/\hbar}|Ae^{i\theta_1}\rangle = e^{-A^2/2}\sum_{N_1=0}^{\infty}\frac{A^{N_1}}{\sqrt{N_1!}}\,e^{iN_1(\theta_1+\frac{\mu' t}{\hbar})}\,|N_1\rangle$$

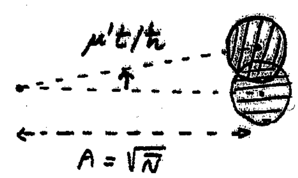
$$= |Ae^{i(\theta_1+\mu't/\hbar)}\rangle$$

$$\langle Ae^{i\theta_1}|e^{i\mu'\hat N_1 t/\hbar}|Ae^{i\theta_1}\rangle = \langle Ae^{i\theta_1}|Ae^{i(\theta_1+\mu'\frac{t}{\hbar})}\rangle$$

On a de même

$$\langle Ae^{i\theta_1}|e^{-i\mu'\hat N_2 t/\hbar}|Ae^{i\theta_1}\rangle = \langle Ae^{i\theta_1}|Ae^{i(\theta_1-\mu'\frac{t}{\hbar})}\rangle$$

On voit ainsi apparaître le produit scalaire de 2 états cohérents $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$ où α et β ont même module $|\alpha|=|\beta|=A=\sqrt{\bar N}$ et se déduisent l'un de l'autre par une rotation d'angle $\mu't/\hbar$ ou $-\mu't/\hbar$



Ces produits scalaires ne dépendent pas de θ_1 et sont complexes conjugués l'un de l'autre

T-187

Résultat final

$$G^{(1)}(\vec r_1,\vec r_2,t) = \bar N\,\psi_1^*(\vec r_1)\,\psi_2(\vec r_2)\,|\langle A|Ae^{i\mu't/\hbar}\rangle|^2$$

Or, on a pour le produit scalaire de 2 états cohérents $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$ le résultat

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}$$

Ce produit scalaire tend très vite vers 0 quand $|\alpha-\beta|>1$

$$|A-Ae^{i\mu't/\hbar}| = 2A\,\left|\sin\frac{\mu't}{2\hbar}\right|$$

Comme $A=\sqrt{\bar N}\gg 1$, on peut remplacer $\sin\frac{\mu't}{2\hbar}$ par $\frac{\mu't}{2\hbar}$ pour les valeurs de t telles que le produit scalaire n'est pas nul

On en déduit

$$G^{(1)}(\vec r_1,\vec r_2,t) = \bar N\,\psi_1^*(\vec r_1)\psi_2(\vec r_2)\,e^{-A^2\mu'^2t^2/\hbar^2}$$

$$= \bar N\,\psi_1^*(\vec r_1)\psi_2(\vec r_2)\,e^{-\bar N\mu'^2t^2/\hbar^2}$$

T-188

Temps de cohérence T_{coh}

$$G^{(1)}(\vec r_1,\vec r_2,t) = \bar N\,\psi_1^*(\vec r_1)\psi_2(\vec r_2)\,e^{-(t/T_{coh})^2}$$

$$T_{coh} = \frac{\hbar}{\mu'\sqrt{\bar N}}$$

La cohérence spatiale entre les 2 condensats s'amortit au bout d'un temps égal à T_{coh}

Dans le régime de Thomas-Fermi, on a (voir T-12) $\mu\propto N^{2/5}$, de sorte que $\mu' = \frac{d\mu}{dN}\Big|_{N=\bar N} = \frac{2}{5}\frac{\mu}{N}$

$$T_{coh} = \frac{5}{2}\frac{\hbar\sqrt{\bar N}}{\mu}$$

T_{coh} est typiquement de l'ordre de 1 sec

Temps de récurrence T_{rec}

$\langle A|Ae^{i\mu't/\hbar}\rangle$ redevient égal à 1 au bout d'un temps T_{rec} tel que $\frac{\mu' T_{rec}}{\hbar} = 2\pi$

(les 2 cercles de T-186 ont fait un tour complet)

$$T_{rec} = \frac{2\pi\hbar}{\mu'} = \frac{h}{d\mu/dN} = \frac{5}{2}\frac{h\bar N}{\mu} \gg T_{coh}$$