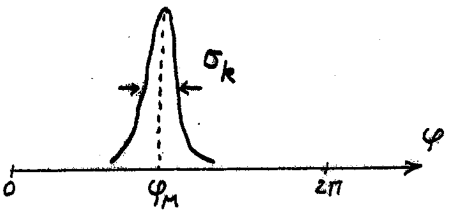
Après un certain nombre de détections, de l'ordre d'une dizaine, on s'attend donc à ce que $W(\varphi/\varphi_k \cdots \varphi_1)$ soit une fonction relativement étroite, centrée autour d'une valeur φ_M, de largeur σ_k petite devant l'intervalle, 2π, de variation de φ. C'est ce que confirment d'ailleurs les simulations numériques (voir T-170).

T-173



Comment va évoluer W au cours des détections suivantes ?

La probabilité d'obtenir φ_{k+1} lors de la prochaine détection va être le produit de convolution de $W(\varphi/\varphi_k \cdots \varphi_1)$ par $1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi)$. Comme la largeur σ_k de W est très petite devant celle de $1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi)$, on a

$$P(\varphi_{k+1}/\varphi_k \cdots \varphi_1) \propto 1 + \cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M)$$

Supposons qu'on ait trouvé φ_{k+1} lors de la prochaine détection

T-174

En approximant $W(\varphi/\varphi_k \cdots \varphi_1)$ par $\exp[-(\varphi-\varphi_M)^2/\sigma^2]$, on peut écrire

$$W(\varphi/\varphi_{k+1}, \varphi_k \cdots \varphi_1) \propto e^{-[\varphi-\varphi_M]^2/\sigma_k^2}\left[1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi)\right]$$

Comme la largeur de $[1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi)]$ est grande devant σ_k, on peut développer $[1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi)]$ au voisinage de $\varphi=\varphi_M$ où la 1ère fonction est non nulle et obtenir ainsi

$$W(\varphi/\varphi_{k+1}, \varphi_k \cdots \varphi_1) \propto e^{-[\varphi-\varphi_M]^2/\sigma_k^2} \times$$
$$\Big[1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M) + (\varphi-\varphi_M)\sin(\varphi_{k+1}-\varphi_M) - \tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_M)^2\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M) + \cdots\Big]$$

Développons aussi $e^{-(\varphi-\varphi_M)^2/\sigma^2}$. Il vient

$$W(\varphi/\varphi_{k+1}, \varphi_k \cdots \varphi_1) \propto 1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M)$$
$$+ (\varphi-\varphi_M)\sin(\varphi_{k+1}-\varphi_M)$$
$$- (\varphi-\varphi_M)^2\left[\frac{1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M)}{\sigma_k^2} + \frac{1}{2}\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M)\right]$$

Déplacement du centre de la nouvelle distribution $W(\varphi/\varphi_{k+1}, \varphi_k \cdots \varphi_1)$

T-175

L'abscisse du nouveau maximum est donnée par $\frac{d}{d\varphi} W(\varphi/\varphi_{k+1}, \varphi_k \cdots \varphi_1) = 0$

On obtient (à partir de T-174)

$$\varphi-\varphi_M = \frac{\frac{1}{2}\sin(\varphi_{k+1}-\varphi_M)}{\frac{1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M)}{\sigma_k^2} + \frac{1}{2}\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M)}$$

$$\simeq \frac{\sigma_k^2}{2}\,\frac{\sin(\varphi_{k+1}-\varphi_M)}{1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M)} \qquad \text{car } \sigma_k^2 \ll 1$$

- Le déplacement du maximum de W est donc proportionnel à σ_k^2

  Au fur et à mesure que σ_k^2 décroît, le déplacement de W diminue

- Comme $P(\varphi_{k+1}/\varphi_k \cdots \varphi_1) \propto 1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M)$ (voir T-173), $\varphi_{k+1}-\varphi_M$ a une probabilité élevée d'être petit et $\sin(\varphi_{k+1}-\varphi_M)$ a donc le même signe que $\varphi_{k+1}-\varphi_M$. Donc, le centre de W se déplace vers la valeur trouvée pour φ_{k+1}

Largeur moyenne de la nouvelle distribution $W(\varphi/\varphi_{k+1}, \varphi_k \cdots \varphi_1)$

T-176

Multiplions les divers termes de l'expression de $W(\varphi/\varphi_{k+1}, \varphi_k \cdots \varphi_1)$ donnée à la fin de (T-174) par la probabilité $1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M)$ de trouver φ_{k+1} et intégrons sur φ_{k+1}. On obtient

$$\overline{W(\varphi/\varphi_{k+1}, \varphi_k \cdots \varphi_1)} \propto 1 + \frac{1}{2} +$$
$$+ (\varphi-\varphi_M)^2\left[\frac{1+\frac{1}{2}}{\sigma_k^2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right]$$
$$= \frac{3}{2} - (\varphi-\varphi_M)^2\,\frac{3}{2}\left[\frac{1}{\sigma_k^2} + \frac{1}{6}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left\{1-(\varphi-\varphi_M)^2\left[\frac{1}{\sigma_k^2}+\frac{1}{6}\right]\right\} \propto e^{-\frac{(\varphi-\varphi_M)^2}{\sigma_{k+1}^2}}$$

avec $\frac{1}{\sigma_{k+1}^2} = \frac{1}{\sigma_k^2} + \frac{1}{6}$

On a donc $\sigma_{k+1} < \sigma_k$

La distribution W s'affine donc en moyenne après chaque nouvelle détection