15.11.99

Emergence d'une phase relative sous l'effet des processus de détection (suite)

⑤ Evolution de la distribution de phase relative (T.157 à T-177)

- Etat initial. Description en termes d'états cohérents
- Problèmes étudiés
- Evolution d'un produit d'états cohérents
  - dans une phase d'évolution cohérente
  - lors d'un processus de détection
- Distribution de phase relative après k détections
- Probabilité de détecter un atome en x_{k+1} après k détections
- Résultats de simulations numériques
- Etude analytique du comportement asymptotique de la distribution de phase relative.
  - Déplacement du maximum de la distribution après une détection
  - Affinement de la distribution

Brouillage de la phase relative sous l'effet des interactions

① Introduction (T-178 à T-180)

- Problème étudié
- Fonction de corrélation caractérisant la cohérence entre 2 condensat[s]

② Etude qualitative (T-181 à T-183)

- En l'absence d'interactions
- En présence d'interactions

③ Etude quantitative (T-184 à T-188)

- Calcul de la fonction de corrélation
- Temps de cohérence et temps de récurrence.

Références : page VI-10

Evolution de la distribution $W(\varphi)$ de la phase relative φ

T-157

Etat initial des 2 condensats

A $t=0$, on suppose que la phase relative φ entre les 2 condensats n'est pas définie

Equipartie entre 0 et 2π

Description de cet état initial

Mélange statistique d'états cohérents relatifs

- Produit de 2 états cohérents

$$|\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle = |\alpha_1, \alpha_2\rangle$$

$$\alpha_1 = A_1 e^{i\theta_1} \qquad \alpha_2 = A_2 e^{i\theta_2}$$

$$A_1 = |\alpha_1| = \sqrt{N_1} \qquad A_2 = |\alpha_2| = \sqrt{N_2}$$

$$\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \text{Phase relative}$$

- Etat cohérent relatif (voir T-87)

$$\hat{P}_{A_1A_2}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta_1 \, |A_1 e^{i\theta_1}, A_2 e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle\langle A_1 e^{i\theta_1}, A_2 e^{i(\theta_1-\varphi)}|$$

- Etat initial

T-158

Mélange statistique d'états cohérents relatifs avec une phase relative φ équipartie entre 0 et 2π

$$\hat{\rho}(t=0) = \hat{\rho}^{(0)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \; \hat{P}_{A_1A_2}(\varphi)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta_1 \, |A_1 e^{i\theta_1}, A_2 e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle\langle A_1 e^{i\theta_1}, A_2 e^{i(\theta_1-\varphi)}|$$

Mélange statistique de produits d'états cohérents $|A_1 e^{i\theta_1}\rangle \otimes |A_2 e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$

A_1 et A_2 fixes – φ et θ_1 équiparties

- On supposera pour simplifier $A_1 = A_2 = A$

- Procédure de calcul

Le calcul sera fait à partir d'un état initial produit de 2 états cohérents, ce qui permet d'obtenir des expressions analytiques pour les diverses probabilités

Ces probabilités seront ensuite moyennées sur θ_1 et φ

Distribution initiale $W^{(0)}(\varphi)$ de φ

T-159

On peut écrire

$$\hat{\rho}(t=0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \; \hat{P}_{AA}(\varphi)$$

$$= \int_0^{2\pi} W^{(0)}(\varphi) \; \hat{P}_{AA}(\varphi)$$

La distribution initiale $W^{(0)}(\varphi)$ de φ est donc

$$W^{(0)}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$$

Problèmes étudiés dans ce cours

① Après k détections d'atomes qui ont donné un atome en x_1, un atome en x_2, ... un atome en x_k, peut-on calculer la nouvelle distribution de la phase relative φ ?

Nous verrons qu'on peut donner une expression analytique de $W(\varphi / x_k, \dots x_2, x_1)$, ou ce qui revient au même de $W(\varphi/\varphi_k, \cdots \varphi_2, \varphi_1)$ où l'on a noté $\varphi_1 = 2\pi x_1$, $\varphi_2 = 2\pi x_2$, ... $\varphi_k = 2\pi x_k$

② Après k détections qui ont donné un atome en x_1, ... un atome en x_k, peut-on calculer la probabilité de trouver un atome en x_{k+1} lors de la prochaine détection ?

T-160

Nous verrons là aussi qu'on peut donner une expression analytique de $P(x_{k+1} / x_k, \cdots x_2, x_1)$

③ Peut-on comprendre comment évolue $W(\varphi/\varphi_k, \cdots \varphi_1)$ au fur et à mesure que le nombre de détections augmente ?

Comment varie l'abscisse du maximum de cette fonction ?

Comment varie sa largeur ?

On suivra ici l'approche de la référence 1

Pour une autre approche utilisant des états de phase relative plutôt que des états cohérents relatifs, voir référence 2

Rappel de résultats du cours V

T-161

- Si le système part de $|\chi_i\rangle$ à $t=0$, et si des détections se produisent en $x_1 t_1$, puis en $x_2 t_2$

(i) l'état du système après ces 2 détections est proportionnel à

$|u(x_2t_2, x_1t_1)\rangle =$

$\hat{\psi}(x_2) e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar} \hat{\psi}(x_1) e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar} |\chi_i\rangle$

(ii) la probabilité d'une telle séquence est égale à

$p(x_2t_2, x_1t_1) = \Gamma^2 \langle u(x_2t_2, x_1t_1) | u(x_2t_2, x_1t_1)\rangle$

(voir par exemple T-141)

- Ces résultats se généralisent aisément à k détections en $x_1t_1, x_2t_2, \dots x_kt_k$
- On va voir que les expressions de $|u\rangle$ et p se simplifient considérablement si l'état initial $|\chi_i\rangle$ est un produit de 2 états cohérents $|Ae^{i\theta_1}, Ae^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$

Action de $e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar}$ sur un produit d'états cohérents

T-162

$\hat{H}_{eff} = \hbar(\omega_0 - i\frac{\Gamma}{2})(\hat{a}_1^+\hat{a}_1 + \hat{a}_2^+\hat{a}_2)$ (voir T.137)

$e^{-i(\omega_0-i\frac{\Gamma}{2})\hat{a}_1^+\hat{a}_1} |Ae^{i\theta_1}\rangle =$

$= e^{-i(\omega_0-i\frac{\Gamma}{2})\hat{N}_1} \sum_{N_1} e^{-A^2/2} \frac{A^{N_1}e^{iN\theta_1}}{\sqrt{N_1!}} |N_1\rangle$

$= e^{-A^2/2} \sum_{N_1} \left(Ae^{-\Gamma t/2}\right)^{N_1} \frac{1}{\sqrt{N_1!}} e^{iN(\theta_1-\omega_0 t)} |N_1\rangle$

$\propto |Ae^{-\Gamma t/2} e^{i(\theta_1-\omega_0 t)}\rangle$

Un état cohérent reste donc un état cohérent dans une évolution régie par $\hat{H}_{eff}$ avec les modifications suivantes

- L'amplitude A est réduite par un facteur $e^{-\Gamma t/2}$

  $A \to A_t = Ae^{-\Gamma t/2}$
- la phase change de $\omega_0 t$

  $\theta_1 \to \theta_1 - \omega_0 t$

$e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar} |Ae^{i\theta_1}, Ae^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$

$\propto |A_t e^{i(\theta_1-\omega_0 t)}, A_t e^{i(\theta_1-\omega_0 t-\varphi)}\rangle$

La phase relative φ ne change pas

Action de $\hat{\psi}(x)$ sur un produit d'états cohérents

T-163

$\hat{\psi}(x) = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 e^{2i\pi x}$ (voir T-136)

Comme $|Ae^{i\theta_1}, Ae^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$ est état propre de $\hat{a}_1$ ($\hat{a}_2$), de valeur propre $Ae^{i\theta_1}$ $[Ae^{i(\theta_1-\varphi)}]$, on a

$\hat{\psi}(x) |Ae^{i\theta_1}, Ae^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle =$

$Ae^{i\theta_1}\left[1 + e^{i(2\pi x-\varphi)}\right] |Ae^{i\theta_1}, Ae^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$

Un état cohérent ne change donc pas lors d'un processus de détection. L'action de $\hat{\psi}(x)$ se réduit à une multiplication par un nombre

4 opérateurs agissent sur $|\chi_i\rangle = |Ae^{i\theta_1}, Ae^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$ dans l'expression de $|u(x_2t_2, x_1t_1)\rangle$ donnée dans (T-161)

- 2 opérateurs changent l'amplitude et la phase des états cohérents (exponentielles d'évolution)
- 2 opérateurs ne les changent pas $[\hat{\psi}(x_1)$ et $\hat{\psi}(x_2)]$

Calcul de $|u(x_2t_2, x_1t_1)\rangle$

T-164

- Effet de $e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar}$

  $A \to Ae^{-\Gamma t_1/2}$ $\qquad \theta_1 \to \theta_1 - \omega_0 t_1$
- Effet de $e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar}$

  $Ae^{-\Gamma t_1/2} \to \left(Ae^{-\Gamma t_1/2}\right)e^{-\Gamma(t_2-t_1)/2} = Ae^{-\Gamma t_2/2}$

  $\theta_1 - \omega_0 t_1 \to \theta_1 - \omega_0 t_1 - \omega_0(t_2-t_1) = \theta_1 - \omega_0 t_2$
- On en déduit que

  $|u(x_2t_2, x_1t_1)\rangle \propto |A_{t_2} e^{i(\theta_1-\omega_0 t_2)}, A_{t_2} e^{i(\theta_1-\omega_0 t_2-\varphi)}\rangle$
- Ces résultats se généralisent aisément à k détections en $x_1t_1, x_2t_2, \dots x_kt_k$
- Après ces k détections, l'état du système est toujours un produit d'états cohérents dont les amplitudes sont réduits par un facteur $e^{-\Gamma t_k/2}$ ne dépendant que de l'instant t_k de la dernière detections, toutes les phases ayant changé de $-\omega_0 t_k$

  $|A_{t_k} e^{i\tilde{\theta}_1}, A_{t_k} e^{i(\tilde{\theta}_1-\varphi)}\rangle$

  $A_{t_k} = Ae^{-\Gamma t_k/2} \qquad \tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \omega_0 t_k$

Structure de $p(x_2 t_2, x_1 t_1)$

T-165

Alors que l'évolution de l'état du système ne dépend que des exponentielles d'évolution, la probabilité de la suite de détections, c-à-d le carré de la norme de $|u\rangle$, ne dépend de φ, x_1, x_2 que par l'intermédiaire des modules au carré des coefficients multiplicatifs apparaissant lors de l'action de $\hat\psi(x_1)$ et $\hat\psi(x_2)$

$$p(x_2 t_2, x_1 t_1) \propto |1+e^{i(\varphi_1-\varphi)}|^2 \, |1+e^{i(\varphi_2-\varphi)}|^2$$

$$\varphi_1 = 2\pi x_1 \qquad \varphi_2 = 2\pi x_2$$

Le coefficient de proportionnalité est indépendant de $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \theta_1$ (il ne dépend que de t_1 et t_2)

Généralisation

Si $|\chi_i\rangle$ est un produit d'états cohérents

$$p(x_k t_k, \dots x_1 t_1) \propto \prod_{i=1}^{k} |1+e^{i(\varphi_i-\varphi)}|^2$$

Récapitulation

T-166

- Si l'on part de $|A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$, on aboutit à $|A_{t_k} e^{i\tilde\theta_1}, A_{t_k} e^{i(\tilde\theta_1-\varphi)}\rangle$ après k détections en $x_1 t_1 \dots x_k t_k$, et ce avec une probabilité proportionnelle à $\prod_{i=1}^{k} |1+e^{i(\varphi_i-\varphi)}|^2$
- L'état initial est en fait un mélange statistique d'états $|A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$ avec des phases θ_1 et φ équiparties
- Pour obtenir l'état final, il faut donc pondérer chaque opérateur densité final $|A_{t_k} e^{i\tilde\theta_1}, A_{t_k} e^{i(\tilde\theta_1-\varphi)}\rangle\langle A_{t_k} e^{i\tilde\theta_1}, A_{t_k} e^{i(\tilde\theta_1-\varphi)}|$ par la probabilité $\prod_{i=1}^{k} |1+e^{i(\varphi_i-\varphi)}|^2$ d'arriver à un tel état final en partant d'un état initial caractérisé par θ_1 et φ, puis moyenner les opérateurs densité ainsi obtenus sur θ_1 et φ

Opérateur densité final après k détections en $x_1, x_2 \dots x_k$

T-167

$$\hat\rho_{final} \propto \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta_1 \prod_{i=1}^{k} |1+e^{i(\varphi_i-\varphi)}|^2 \times |A_{t_k} e^{i\tilde\theta_1}, A_{t_k} e^{i(\tilde\theta_1-\varphi)}\rangle\langle A_{t_k} e^{i\tilde\theta_1}, A_{t_k} e^{i(\tilde\theta_1-\varphi)}|$$

L'intégrale sur θ_1, qui est aussi une intégrale sur $\tilde\theta_1$, fait apparaître l'état cohérent relatif $\hat\rho_{A_{t_k}A_{t_k}}(\varphi)$ [voir T-157] de sorte que $\hat\rho_{final}$ peut s'écrire

$$\hat\rho_{final} \propto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \prod_{i=1}^{k} |1+e^{i(\varphi_i-\varphi)}|^2 \, \hat\rho_{A_{t_k}A_{t_k}}(\varphi)$$

On voit ainsi apparaître un mélange statistique d'états cohérents relatifs pour lesquels la phase relative φ n'est plus équipartie, mais répartie suivant une loi de probabilité $W(\varphi/\varphi_k \dots \varphi_2 \varphi_1)$ proportionnelle à

$$\prod_{i=1}^{k} |1+e^{i(\varphi_i-\varphi)}|^2 = \prod_{i=1}^{k} 4\cos^2\frac{\varphi_i-\varphi}{2} = \prod_{i=1}^{k} 2\left[1+\cos(\varphi_i-\varphi)\right]$$

Distribution $W(\varphi/\varphi_k \dots \varphi_1)$ de phase relative après k détections en $\varphi_1 \dots \varphi_k$

T-168

Les calculs précédents montrent que, après k détections en $x_1 = \varphi_1/2\pi \dots x_k = \varphi_k/2\pi$, la phase relative φ, initialement équipartie, devient distribuée suivant la loi

$$W(\varphi/\varphi_k \dots \varphi_1) = \mathcal{N} \prod_{i=1}^{k} \left[1+\cos(\varphi_i-\varphi)\right]$$

où $\mathcal{N}$ est un coefficient de normalisation

$$\mathcal{N} = \int_0^{2\pi} d\varphi \prod_{i=1}^{k} \left[1+\cos(\varphi_i-\varphi)\right]$$

Probabilité $p(x_{k+1}/x_k \dots x_1)$ de détecter un atome en x_{k+1} après en avoir détecté un en x_1, ... un en x_k

Après la suite de détections en $x_1, x_2 \dots x_k$, l'opérateur densité du système est l'opérateur $\hat\rho_{final}$ écrit en T-167

La probabilité de détecter un atome en x_{k+1} est donc égale à

$$p(x_{k+1}/x_k \dots x_1) = \Gamma \, \mathrm{Tr}\, \hat\rho_{final} \, \hat\psi^+(x_{k+1}) \, \hat\psi(x_{k+1})$$

Expression de $p(x_{k+1}/x_k \cdots x_1)$

T-169

$$\hat{\rho}_{final} \propto \int_0^{2\pi} d\varphi \; W(\varphi/\varphi_k \cdots \varphi_1) \; \hat{\rho}_{A_{t_k} A_{t_k}}(\varphi)$$

$$\mathrm{Tr}\, \hat{\rho}_{A_{t_k} A_{t_k}}(\varphi)\, \hat{\Psi}^+(x_{k+1}) \hat{\Psi}(x_{k+1}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_1$$

$$\langle A_{t_k} e^{i\tilde{\theta}_1}, A_{t_k} e^{i(\tilde{\theta}_1 - \varphi)} | \hat{\Psi}^+(x_{k+1}) \hat{\Psi}(x_{k+1}) | A_{t_k} e^{i\tilde{\theta}_1}, A_{t_k} e^{i(\tilde{\theta}_1 - \varphi)} \rangle$$

$$= A_{t_k}^2 \left| 1 + e^{i(\varphi_{k+1} - \varphi)} \right|^2 = 2 A_{t_k}^2 \left[1 + \cos(\varphi_{k+1} - \varphi) \right]$$

On en déduit que

$$p(x_{k+1}/x_k \cdots x_1) = p(\varphi_{k+1}/\varphi_k \cdots \varphi_1)$$

$$\propto \int_0^{2\pi} d\varphi \; W(\varphi/\varphi_k \cdots \varphi_1) \left[1 + \cos(\varphi_{k+1} - \varphi) \right]$$

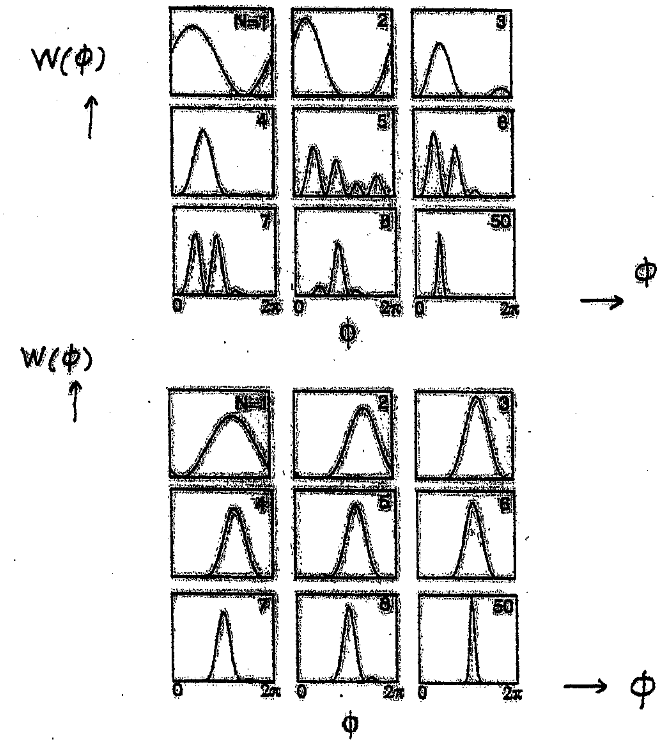
Possibilité, à partir des expressions ainsi obtenues pour $W(\varphi/\varphi_k \cdots \varphi_1)$ et $p(\varphi_{k+1}/\varphi_k \cdots \varphi_1)$ de faire

- soit des simulations numériques
- soit des études analytiques

Evolution de la distribution de phase

Figures extraites de la référence 1

T-1

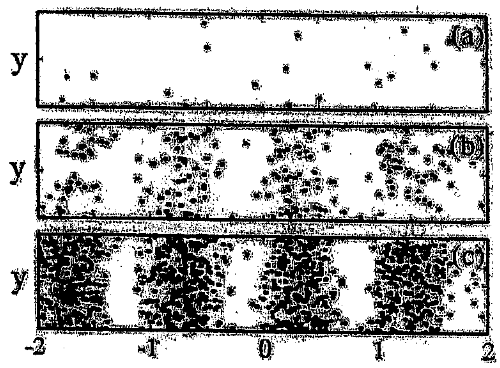


2 simulations différentes montrant l'évolution de la distribution de phase avec le nombre N de détections

Evolution de la figure d'interférence

T-171

Simulation extraite de la réf. 1



(a) 20 atomes détectés

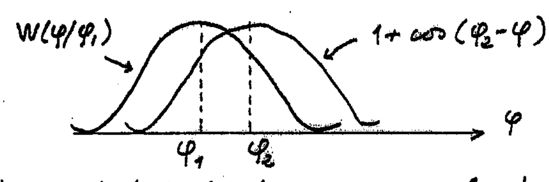
(b) 200 atomes détectés

(c) 1000 atomes détectés

Evolution de la distribution de phase

T-172

- Après la 1ère détection en $x_1 = \varphi_1/2\pi$, $W(\varphi/\varphi_1) \propto 1 + \cos(\varphi_1 - \varphi)$ est maximum en $\varphi = \varphi_1$
- La probabilité d'avoir la 2ème détection en φ_2 est proportionnelle au produit de convolution de $W(\varphi/\varphi_1)$ et $1 + \cos(\varphi_2 - \varphi)$



La probabilité d'avoir φ_2 proche de φ_1 est donc plus grande que celle d'avoir φ_2 loin

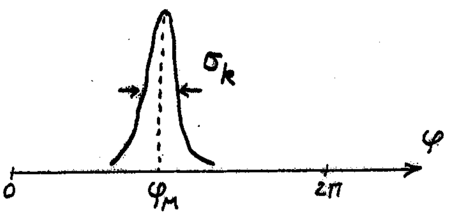
- La distribution W après les 2 premières détections

$$W(\varphi/\varphi_2, \varphi_1) \propto \left[1 + \cos(\varphi_2 - \varphi) \right] \left[1 + \cos(\varphi_1 - \varphi) \right]$$

aura donc une probabilité élevée d'être le produit de 2 fonctions ayant leur maxima proches l'un de l'autre, et donc d'être plus étroite que $W(\varphi/\varphi_1)$

Après un certain nombre de détections,

de l'ordre d'une dizaine, on s'attend donc à ce que $W(\varphi/\varphi_k\cdots\varphi_1)$ soit une fonction relativement étroite, centrée autour d'une valeur φ_M, de largeur σ_k petite devant l'intervalle, 2π, de variation de φ. C'est ce que confirment d'ailleurs les simulations numériques (voir T-170). T-173



Comment va évoluer W au cours des détections suivantes ?

La probabilité d'obtenir φ_{k+1} lors de la prochaine détection va être le produit de convolution de $W(\varphi/\varphi_k\cdots\varphi_1)$ par $1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi)$. Comme la largeur σ_k de W est très petite devant celle de $1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi)$, on a

$$P(\varphi_{k+1}/\varphi_k\cdots\varphi_1) \propto 1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M)$$

Supposons qu'on ait trouvé φ_{k+1} lors de la prochaine détection

T-174

En approximant $W(\varphi/\varphi_k\cdots\varphi_1)$ par $\exp[-(\varphi-\varphi_M)^2/\sigma^2]$, on peut écrire

$$W(\varphi/\varphi_{k+1},\varphi_k\cdots\varphi_1) \propto e^{-[\varphi-\varphi_M]^2/\sigma_k^2}\left[1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi)\right]$$

Comme la largeur de $[1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi)]$ est grande devant σ_k, on peut développer $[1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi)]$ au voisinage de $\varphi=\varphi_M$ où la 1ère fonction est non nulle et obtenir ainsi

$$W(\varphi/\varphi_{k+1},\varphi_k\cdots\varphi_1) \propto e^{-[\varphi-\varphi_M]^2/\sigma_k^2} \times$$
$$\Big[1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M) + (\varphi-\varphi_M)\sin(\varphi_{k+1}-\varphi_M) - \frac{1}{2}(\varphi-\varphi_M)^2\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M) + \cdots\Big]$$

Développons aussi $e^{-(\varphi-\varphi_M)^2/\sigma^2}$. Il vient

$$W(\varphi/\varphi_{k+1},\varphi_k\cdots\varphi_1) \propto 1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M) + (\varphi-\varphi_M)\sin(\varphi_{k+1}-\varphi_M) - (\varphi-\varphi_M)^2\left[\frac{1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M)}{\sigma_k^2} + \frac{1}{2}\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M)\right]$$

Déplacement du centre de la nouvelle distribution $W(\varphi/\varphi_{k+1},\varphi_k\cdots\varphi_1)$

T-175

L'abscisse du nouveau maximum est donnée par $\frac{d}{d\varphi}W(\varphi/\varphi_{k+1},\varphi_k\cdots\varphi_1)=0$

On obtient (à partir de T-174)

$$\varphi-\varphi_M = \frac{\frac{1}{2}\sin(\varphi_{k+1}-\varphi_M)}{\frac{1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M)}{\sigma_k^2} + \frac{1}{2}\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M)}$$

$$\simeq \frac{\sigma_k^2}{2}\,\frac{\sin(\varphi_{k+1}-\varphi_M)}{1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M)} \quad \text{car } \sigma_k^2 \ll 1$$

- Le déplacement du maximum de W est donc proportionnel à σ_k^2

Au fur et à mesure que σ_k^2 décroît, le déplacement de W diminue

- Comme $P(\varphi_{k+1}/\varphi_k\cdots\varphi_1) \propto 1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M)$ (voir T-173), $\varphi_{k+1}-\varphi_M$ a une probabilité élevée d'être petit et $\sin(\varphi_{k+1}-\varphi_M)$ a donc le même signe que $\varphi_{k+1}-\varphi_M$. Donc, le centre de W se déplace vers la valeur trouvée pour φ_{k+1}

Largeur moyenne de la nouvelle distribution $W(\varphi/\varphi_{k+1},\varphi_k\cdots\varphi_1)$

T-176

Multiplions les divers termes de l'expression de $W(\varphi/\varphi_{k+1},\varphi_k\cdots\varphi_1)$ donnée à la fin de (T-174) par la probabilité $1+\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_M)$ de trouver φ_{k+1} et intégrons sur φ_{k+1}. On obtient

$$\overline{W(\varphi/\varphi_{k+1},\varphi_k\cdots\varphi_1)} \propto 1+\frac{1}{2}+$$
$$+(\varphi-\varphi_M)^2\left[\frac{1+\frac{1}{2}}{\sigma_k^2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right]$$
$$= \frac{3}{2}-(\varphi-\varphi_M)^2\,\frac{3}{2}\left[\frac{1}{\sigma_k^2}+\frac{1}{6}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left\{1-(\varphi-\varphi_M)^2\left[\frac{1}{\sigma_k^2}+\frac{1}{6}\right]\right\} \propto e^{-\frac{(\varphi-\varphi_M)^2}{\sigma_{k+1}^2}}$$

avec $\frac{1}{\sigma_{k+1}^2} = \frac{1}{\sigma_k^2}+\frac{1}{6}$

On a donc $\sigma_{k+1} < \sigma_k$

La distribution W s'affine donc en moyenne après chaque nouvelle détection

Comportement asymptotique de la largeur de $W(\varphi/\varphi_k \cdots \varphi_1)$ quand $k \to \infty$

T-177

$$\frac{1}{\sigma^2_{k+1}} = \frac{1}{\sigma^2_k} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{\sigma^2_{k+2}} = \frac{1}{\sigma^2_{k+1}} + \frac{1}{6} \quad \cdots$$

$$\frac{1}{\sigma^2_{k+N}} = \frac{1}{\sigma^2_k} + \frac{N}{6} \simeq \frac{N}{6} \quad \text{quand } N \gg \frac{1}{\sigma_k}$$

Au bout d'un nombre N suffisamment grand de détections, la largeur de W décroît donc comme $\frac{1}{\sqrt{N}}$

La distribution de phase relative s'affine donc de plus en plus, en $\frac{1}{\sqrt{N}}$, quand le nombre N de détections croît

Après chaque détection, le centre de W se déplace d'une quantité proportionnelle à $\frac{1}{N}$ dans le sens de la nouvelle valeur trouvée

Brouillage de la phase relative φ entre 2 condensats dû aux interactions

Problème étudié (Refs 2 à 5)

T-178

- 2 condensats bien séparés, dans 2 pièges différents 1 et 2
  On suppose $\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = \bar{N}$
- A $t=0$, on suppose qu'il y a une phase relative φ bien définie entre les 2 condensats.
  Ils sont décrits par un état cohérent relatif $\hat{\rho}_{AA}(\varphi)$. Mélange statistique de produits d'états cohérents
  $$|A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$$
  avec $A = \sqrt{\bar{N}}$ et φ fixés, θ_1 équipartie
- Les interactions entre atomes à l'intérieur de chaque condensat sont décrites par une théorie de champ moyen
  On néglige les interactions entre atomes du condensat 1 et atomes du condensat 2

Grandeur physique étudiée

T-179

$G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$: Fonction de corrélation d'ordre 1 entre 2 points : $\vec{r}_1$ situé dans le condensat 1, $\vec{r}_2$ dans le condensat 2

$$G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\, \hat{\psi}^+(\vec{r}_1)\, \hat{\psi}(\vec{r}_2)\right\}$$

$\hat{\rho}(t)$: Opérateur densité du système à l'instant t, parti à l'instant $t=0$ de $\hat{\rho}_{AA}(\varphi)$

$$\hat{\psi}(\vec{r}) = \psi_1(\vec{r})\, \hat{a}_{\psi_1} + \psi_2(\vec{r})\, \hat{a}_{\psi_2}$$
$$\hat{\psi}^+(\vec{r}) = \psi_1^*(\vec{r})\, \hat{a}^+_{\psi_1} + \psi_2^*(\vec{r})\, \hat{a}^+_{\psi_2}$$

$\psi_1(\vec{r})$ $(\psi_2(\vec{r}))$: Fonction d'onde décrivant l'état dans lequel sont condensés les atomes du condensat 1 (2). Solution de l'équation de Gross-Pitaevskii correspondant à $\bar{N}$ atomes. (On néglige les variations de ψ_1 et ψ_2 quand N varie de $\sqrt{\bar{N}}$ autour de $\bar{N}$. Par contre, on tient compte des variations de $E(N)$).

Expression de $G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$

T-180

Comme $\psi_1(\vec{r}_2) = \psi_2(\vec{r}_1) = 0$, on a

$$G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \psi_1^*(\vec{r}_1)\, \psi_2(\vec{r}_2)\, \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\, \hat{a}^+_{\psi_1}\, \hat{a}_{\psi_2}\right\}$$

Valeur de $G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)$

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(0)\, \hat{a}^+_{\psi_1}\, \hat{a}_{\psi_2}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta_1$$
$$\langle A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1-\varphi)} |\, \hat{a}^+_{\psi_1} \hat{a}_{\psi_2}\, | A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta_1\; A e^{i(\theta_1-\varphi)}\, A e^{-i\theta_1} = A^2 e^{-i\varphi}$$

Pour simplifier, on va supposer
$$\varphi = 0$$

$$G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) = A^2\, \psi_1^*(\vec{r}_1)\, \psi_2(\vec{r}_2) = \bar{N}\, \psi_1^*(\vec{r}_1)\, \psi_2(\vec{r}_2)$$

Il y a donc une cohérence spatiale non nulle entre les 2 condensats à l'instant initial $t=0$

Comment cette cohérence spatiale va-t-elle évoluer au cours du temps ?

Evolution en l'absence d'interactions

T-181

$$\hat\rho(t) = e^{-i\hat H t/\hbar}\,\hat\rho(0)\,e^{i\hat H t/\hbar}$$

$\hat H$: Hamiltonien en l'absence d'interactions

$$\hat H = \hat H_1 + \hat H_2 = \varepsilon_0(\hat N_1 + \hat N_2)$$

ε_0 : Energie de l'état fondamental de l'hamiltonien à 1 particule (ε_0 est identique pour les 2 condensats)

$$G^{(1)}(\vec r_1,\vec r_2,t) = \psi_1^*(\vec r_1)\,\psi_2(\vec r_2)\,\times$$
$$\mathrm{Tr}\left\{e^{-i\hat H t/\hbar}\,\hat\rho(0)\,e^{i\hat H t/\hbar}\,\hat a^+_{\psi_1}\,\hat a_{\psi_2}\right\}$$
$$= \mathrm{Tr}\Big\{\hat\rho(0)\underbrace{e^{i\hat H t/\hbar}\hat a^+_{\psi_1}e^{-i\hat H t/\hbar}}_{\hat a^+_{\psi_1}e^{i\varepsilon_0 t/\hbar}}\underbrace{e^{i\hat H t/\hbar}\hat a_{\psi_2}e^{-i\hat H t/\hbar}}_{\hat a_{\psi_2}e^{-i\varepsilon_0 t/\hbar}}\Big\}$$

$$G^{(1)}(\vec r_1,\vec r_2,t) = \psi_1^*(\vec r_1)\,\psi_2(\vec r_2)\,\mathrm{Tr}\{\hat\rho(0)\,\hat a^+_{\psi_1}\hat a_{\psi_2}\}$$
$$= \bar N\,\psi_1^*(\vec r_1)\,\psi_2(\vec r_2)$$

En l'absence d'interactions, $G^{(1)}(\vec r_1,\vec r_2,t)$ n'évolue donc pas et la phase relative ne se brouille pas

Evolution en présence d'interactions

T-182

On a toujours

$$\hat\rho(t) = e^{-i\hat H t/\hbar}\,\hat\rho(0)\,e^{i\hat H t/\hbar}$$
$$\hat H = \hat H_1 + \hat H_2$$

$$G^{(1)}(\vec r_1,\vec r_2,t) = \psi_1^*(\vec r_1)\,\psi_2(\vec r_2)\,\times$$
$$\mathrm{Tr}\{\hat\rho(0)\,\hat a^+_{\psi_1}(t)\,\hat a_{\psi_2}(t)\}$$

$$\hat a^+_{\psi_1}(t) = e^{i\hat H_1 t/\hbar}\,\hat a^+_{\psi_1}\,e^{-i\hat H_1 t/\hbar}$$
$$\hat a_{\psi_2}(t) = e^{i\hat H_2 t/\hbar}\,\hat a_{\psi_2}\,e^{-i\hat H_2 t/\hbar}$$

Mais maintenant l'énergie d'un état $|N_1\rangle$ du condensat 1 n'est plus égale à $N_1\varepsilon_0$. A cause des interactions, c'est une fonction $E(N_1)$ qui n'est plus linéaire en N_1, mais contient des termes quadratiques

On n'a donc plus une seule fréquence d'évolution dans la dépendance temporelle de $\hat a^+_{\psi_1}(t)$ et $\hat a_{\psi_2}(t)$

Discussion qualitative du brouillage

T-183

Les seuls éléments de matrice non nuls de $\hat a_{\psi_2}$ sont entre $|N_2\rangle$ et $\langle N_2-1|$

Les fréquences de Bohr apparaissant dans l'évolution de $\hat a_{\psi_2}(t)$ sont donc toutes les fréquences $[E(N_2)-E(N_2-1)]/\hbar$, quand N_2 varie dans un intervalle de largeur $\sqrt{\bar N}$ autour de $\bar N$. Comme $E(N)$ n'est plus une fonction linéaire de N, ces fréquences vont être légèrement différentes les unes des autres et s'étendre sur un intervalle de largeur $\Delta\omega$

Au bout d'un temps $1/\Delta\omega$, les battements entre ces diverses fréquences vont amortir $G^{(1)}(\vec r_1,\vec r_2,t)$

Par ailleurs, comme N est discret, les différentes fréquences vont être séparées par des intervalles $\delta\omega$ à peu près égaux et il y aura donc des récurrences au bout d'un temps $1/\delta\omega$

Etude quantitative

T-184

Expression de $E_1(N)$ et $E_2(N)$

$$E_1(N) = E_1(\bar N) + \underbrace{\frac{dE_1(N)}{dN}\Big|_{N=\bar N}}_{\mu_1(\bar N)=\mu_1}(N-\bar N) + \underbrace{\frac12\frac{d^2E(N)}{dN^2}\Big|_{N=\bar N}}_{\frac12\mu_1'(\bar N)=\frac12\mu_1'}(N-\bar N)^2$$

Expression analogue pour $E(N_2)$

On suppose $E_1(\bar N) = E_2(\bar N) = \bar E$

$$\mu_1=\mu_2=\mu \qquad \mu_1'=\mu_2'=\mu'$$

$$E_1(N) = \bar E + \mu(N-\bar N) + \tfrac12\mu'(N-\bar N)^2$$
$$E_2(N) = \bar E + \mu(N-\bar N) + \tfrac12\mu'(N-\bar N)^2$$

Calcul de $\hat a^+_{\psi_1}(t) = e^{i\hat H_1 t/\hbar}\,\hat a^+_{\psi_1}\,e^{-i\hat H_1 t/\hbar}$

Les seuls éléments de matrice non nuls de $\hat a^+_{\psi_1}$ sont entre $|N\rangle$ et $\langle N+1|$

$$\langle N+1|\hat a^+_{\psi_1}(t)|N\rangle = e^{i[E(N+1)-E(N)]t/\hbar}\sqrt{N+1}$$
$$= e^{i\mu t/\hbar}\,e^{\frac{i}{2}\mu'\big[\underbrace{(N+1-\bar N)^2-(N-\bar N)^2}_{2N+1-2\bar N}\big]t/\hbar}\sqrt{N+1}$$
$$= e^{i[\mu-(\bar N-\frac12)\mu']t/\hbar}\,e^{i\mu' N t/\hbar}\sqrt{N+1}$$
$$= e^{i[\mu-(\bar N-\frac12)\mu']t/\hbar}\,\langle N+1|\,\hat a^+_{\psi_1}\,e^{i\mu'\hat N_1 t/\hbar}\,|N\rangle$$

T-185

On en déduit

$$\hat{a}^+_{\psi_1}(t) = e^{i[\mu-(\bar{N}-\frac{1}{2})\mu']t/\hbar}\,\hat{a}^+_{\psi_1}\, e^{i\mu'\hat{N}_1 t/\hbar}$$

Un calcul analogue donne

$$\hat{a}_{\psi_2}(t) = e^{-i[\mu-(\bar{N}-\frac{1}{2})\mu']t/\hbar}\, e^{-i\mu'\hat{N}_2 t/\hbar}\,\hat{a}_{\psi_2}$$

de sorte que

$$G^{(1)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t) = \psi_1^*(\vec{r}_1)\,\psi_2(\vec{r}_2)\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta_1\, \langle Ae^{i\theta_1}, Ae^{i\theta_1}|\hat{a}^+_{\psi_1} e^{i\mu'\hat{N}_1 t/\hbar} e^{-i\mu'\hat{N}_2 t/\hbar}\hat{a}_{\psi_2}|Ae^{i\theta_1}, Ae^{i\theta_1}\rangle$$

$$= \psi_1^*(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta_1\, \langle Ae^{i\theta_1}|\hat{a}^+_{\psi_1} e^{i\mu'\hat{N}_1 t/\hbar}|Ae^{i\theta_1}\rangle \times \langle Ae^{i\theta_1}|e^{-i\mu'\hat{N}_2 t/\hbar}\,\hat{a}_{\psi_2}|Ae^{i\theta_1}\rangle$$

Comme $|Ae^{i\theta_1}\rangle$ est ket propre de $\hat{a}_{\psi_2}$ et que $\langle Ae^{i\theta_1}|$ est bra propre de $\hat{a}^+_{\psi_1}$, on a

$$G^{(1)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t) = \psi_1^*(\vec{r}_1)\,\psi_2(\vec{r}_2)\, A^2\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta_1$$
$$\langle Ae^{i\theta_1}|e^{i\mu'\hat{N}_1 t/\hbar}|Ae^{i\theta_1}\rangle\langle Ae^{i\theta_1}|e^{-i\mu'\hat{N}_2 t/\hbar}|Ae^{i\theta_1}\rangle$$

T-186

Calcul de $\langle Ae^{i\theta_1}|e^{i\mu'\hat{N}_1 t/\hbar}|Ae^{i\theta_1}\rangle$

$$|Ae^{i\theta_1}\rangle = e^{-A^2/2}\sum_{N_1=0}^{\infty}\frac{A^{N_1}e^{iN_1\theta_1}}{\sqrt{N_1!}}|N_1\rangle$$

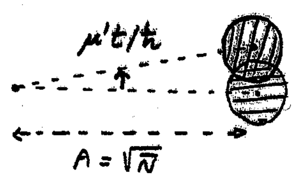
$$e^{i\mu'\hat{N}_1 t/\hbar}|Ae^{i\theta_1}\rangle = e^{-A^2/2}\sum_{N_1=0}^{\infty}\frac{A^{N_1}}{\sqrt{N_1!}}e^{iN_1(\theta_1+\frac{\mu' t}{\hbar})}|N_1\rangle$$
$$= |Ae^{i(\theta_1+\mu' t/\hbar)}\rangle$$

$$\langle Ae^{i\theta_1}|e^{i\mu'\hat{N}_1 t/\hbar}|Ae^{i\theta_1}\rangle = \langle Ae^{i\theta_1}|Ae^{i(\theta_1+\mu'\frac{t}{\hbar})}\rangle$$

On a de même

$$\langle Ae^{i\theta_1}|e^{-i\mu'\hat{N}_2 t/\hbar}|Ae^{i\theta_1}\rangle = \langle Ae^{i\theta_1}|Ae^{i(\theta_1-\mu'\frac{t}{\hbar})}\rangle$$

On voit ainsi apparaître le produit scalaire de 2 états cohérents $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$ où α et β ont même module $|\alpha| = |\beta| = A = \sqrt{\bar{N}}$ et se déduisent l'un de l'autre par une rotation d'angle $\mu' t/\hbar$ ou $-\mu' t/\hbar$



Ces produits scalaires ne dépendent pas de θ_1 et sont complexes conjugués l'un de l'autre

T-187

Résultat final

$$G^{(1)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t) = \bar{N}\,\psi_1^*(\vec{r}_1)\,\psi_2(\vec{r}_2)\,|\langle A|Ae^{i\mu' t/\hbar}\rangle|^2$$

Or, on a pour le produit scalaire de 2 états cohérents $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$ le résultat

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}$$

Ce produit scalaire tend très vite vers 0 quand $|\alpha-\beta| > 1$

$$|A - Ae^{i\mu' t/\hbar}| = 2A\left|\sin\frac{\mu' t}{2\hbar}\right|$$

Comme $A = \sqrt{\bar{N}} \gg 1$, on peut remplacer $\sin\frac{\mu' t}{2\hbar}$ par $\frac{\mu' t}{2\hbar}$ pour les valeurs de t telles que le produit scalaire n'est pas nul

On en déduit

$$G^{(1)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t) = \bar{N}\,\psi_1^*(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2)\,e^{-A^2\mu'^2t^2/\hbar^2}$$
$$= \bar{N}\,\psi_1^*(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2)\,e^{-\bar{N}\mu'^2t^2/\hbar^2}$$

T-188

Temps de cohérence T_{coh}

$$G^{(1)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t) = \bar{N}\,\psi_1^*(\vec{r}_1)\,\psi_2(\vec{r}_2)\,e^{-(t/T_{coh})^2}$$

$$T_{coh} = \frac{\hbar}{\mu'\sqrt{\bar{N}}}$$

La cohérence spatiale entre les 2 condensats s'amortit au bout d'un temps égal à T_{coh}

Dans le régime de Thomas-Fermi, on a (voir T-12) $\mu \propto N^{2/5}$, de sorte que $\mu' = \frac{d\mu}{dN}\Big|_{N=\bar{N}} = \frac{2}{5}\frac{\mu}{\bar{N}}$

$$T_{coh} = \frac{5}{2}\frac{\hbar\sqrt{\bar{N}}}{\mu}$$

T_{coh} est typiquement de l'ordre de 1 sec

Temps de récurrence T_{rec}

$\langle A|Ae^{i\mu' t/\hbar}\rangle$ redevient égal à 1 au bout d'un temps T_{rec} tel que $\frac{\mu' T_{rec}}{\hbar} = 2\pi$ (les 2 cercles de T-186 ont fait un tour complet)

$$T_{rec} = \frac{2\pi\hbar}{\mu'} = \frac{h}{d\mu/dN} = \frac{5}{2}\frac{h\bar{N}}{\mu} \gg T_{coh}$$

Références

(1) J. Cirac, C. Gardiner, M. Naraschewski, P. Zoller
Phys. Rev. A 54, R3714 (1996)

(2) Y. Castin, J. Dalibard
Phys. Rev. A 55, 4330 (1996)

(3) M. Lewenstein, L. You
Phys. Rev. Lett. 77, 3489 (1996)

(4) E. Wright, D. Walls, J. Garrison
Phys. Rev. Lett. 77, 2158 (1996)

(5) K. Mølmer, Phys. Rev. A 58, 558 (1998)