T-53

Comparaison des diverses longueurs

- Longueur de cohérence du condensat
$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$
- Longueur d'onde de de Broglie thermique
$$\lambda_T = \hbar \sqrt{\frac{2\pi}{m k_B T}}$$
- Extension du nuage thermique
$$\Delta r = \sqrt{\frac{k_B T}{m \omega^2}}$$

$$\frac{\lambda_T}{\sigma_0} = \sqrt{\frac{2\pi \hbar\omega}{k_B T}} \ll 1 \quad \text{car} \quad \hbar\omega \ll k_B T$$

Le condensat fait donc apparaitre un ordre à longue portée

$$\frac{\sigma_0}{\Delta r} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \ll 1$$

On a donc
$$\lambda_T \ll \sigma_0 \ll \Delta r$$

T-54

Fonctions de corrélation d'ordre supérieur $G^{(2)}$ et $G^{(3)}$

Importantes pour étudier les corrélations de densité et fluctuations de densité des atomes bosoniques.

Difficultés

L'ensemble grand canonique, très commode pour les calculs (factorisation de l'opérateur densité en l'absence d'interactions), prédit des fluctuations importantes du nombre N_0 de particules condensées.

Il s'applique aux expériences faites sur des bosons piégés où N est fixé (en l'absence de pertes) et où il faudrait plutôt utiliser l'ensemble canonique

Les prédictions sur les valeurs moyennes $\langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \rangle$ varient cependant peu d'un ensemble à l'autre, et le calcul de $G^{(1)}$ fait plus haut demeure valable

T-55

Solution adoptée ici

- Pour un système condensé ($N \gg N_{crit}$) on n'utilisera pas l'ensemble grand canonique pour calculer $G^{(2)}$ et $G^{(3)}$ mais un état de Fock $|N_0\rangle$. Un tel calcul a déja été fait plus haut (T.37)

  Remarque : on vérifie bien par contre que le résultat du calcul de $G^{(1)}$ est le même à la limite $N \gg N_{crit}$, que l'on utilise un état de Fock ou l'ensemble grand canonique (comparer T.37 et T.52).

- Pour un système très peu dégénéré ($N \ll N_{crit}$), on peut montrer que les prédictions des ensembles canonique et grand canonique diffèrent très peu, et on continuera à utiliser l'ensemble grand canonique, plus commode mathématiquement, pour calculer $G^{(2)}$ et $G^{(3)}$.

T-56

Théorème de Wick

Hypothèses
- Bosons sans interactions
- Ensemble grand canonique
$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z_G} e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} = \frac{1}{Z_G} \prod_k e^{-\beta \hat{a}_k^+ \hat{a}_k (\varepsilon_k - \mu)}$$

ε_k : Energie de l'état individuel k

Résultats
$$\langle \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\beta^+ \hat{a}_\gamma \hat{a}_\delta \rangle = \mathrm{Tr}\left(\hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\beta^+ \hat{a}_\gamma \hat{a}_\delta \hat{\rho}\right) =$$
$$= \langle \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\gamma \rangle \langle \hat{a}_\beta^+ \hat{a}_\delta \rangle + \langle \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\delta \rangle \langle \hat{a}_\beta^+ \hat{a}_\gamma \rangle$$

$$\langle \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\beta^+ \hat{a}_\gamma^+ \hat{a}_\delta \hat{a}_\varepsilon \hat{a}_\zeta \rangle =$$
$$\langle \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\delta \rangle \langle \hat{a}_\beta^+ \hat{a}_\varepsilon \rangle \langle \hat{a}_\gamma^+ \hat{a}_\zeta \rangle + \langle \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\delta \rangle \langle \hat{a}_\beta^+ \hat{a}_\zeta \rangle \langle \hat{a}_\gamma^+ \hat{a}_\varepsilon \rangle$$
$$+ \langle \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\varepsilon \rangle \langle \hat{a}_\beta^+ \hat{a}_\delta \rangle \langle \hat{a}_\gamma^+ \hat{a}_\zeta \rangle + \langle \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\varepsilon \rangle \langle \hat{a}_\beta^+ \hat{a}_\zeta \rangle \langle \hat{a}_\gamma^+ \hat{a}_\delta \rangle$$
$$+ \langle \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\zeta \rangle \langle \hat{a}_\beta^+ \hat{a}_\delta \rangle \langle \hat{a}_\gamma^+ \hat{a}_\varepsilon \rangle + \langle \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\zeta \rangle \langle \hat{a}_\beta^+ \hat{a}_\varepsilon \rangle \langle \hat{a}_\gamma^+ \hat{a}_\delta \rangle$$

Produit des valeurs moyennes de tous les produits possibles d'un opérateur de création par un opérateur d'annihilation

Généralisation possible à des Fermions et à des ordres autres que l'ordre normal pour les produits d'opérateurs