II - 8

T-49

Récapitulation

Dans un gaz parfait très loin de la dégénerescence, les corrélations spatiales s'étendent sur une distance très faible, de l'ordre de la longueur d'onde de de Broglie thermique.

Quand on s'approche de la dégénerescence, cette longueur de cohérence augmente.

L'apparition d'un condensat se traduit par une longueur de cohérence infinie, c'est à dire par un ordre à très longue portée

Pour $T \ll T_c$, la contribution du condensat est prépondérante et $G^{(1)}(s)$ ne dépend plus de s, sauf si des interactions font apparaitre un pic d'amplitude de l'ordre de $(\rho a^3)^{1/2}$ et de largeur de l'ordre de ξ_0

T-50

② Bosons dans un piège harmonique

- Oscillateur harmonique isotrope de fréquence ω

$$E_n = n\hbar\omega \qquad n = n_x + n_y + n_z$$

(énergies repérées par rapport à celle du vide)

- Largeur spatiale de l'état fondamental

$$\sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

- En l'absence d'interactions, la matrice densité à un corps est diagonale dans la base $\{|n\rangle\}$ et on est ramené au calcul d'éléments de matrice de la forme $\langle\vec{r}|\frac{1}{Z}e^{-\ell\beta\hat{h}_0}|\vec{r}\,'\rangle$. A la limite $k_BT \gg \hbar\omega$, on trouve (voir ref. 3)

$$\langle\vec{r}|\frac{1}{Z}e^{-\beta\hat{h}_0}|\vec{r}\,'\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{(\Delta r)^3} \times$$

$$\exp\left[-\frac{[(\vec{r}+\vec{r}\,')/2]^2}{2\Delta r^2}\right]\exp\left[-\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')^2}{2\xi^2}\right]$$

$$\Delta r^2 = \frac{k_BT}{m\omega^2} \qquad \xi^2 = \frac{\hbar^2}{mk_BT} = \frac{\lambda_T^2}{2\pi}$$

T-51

Résultats du calcul de $G^{(1)}$ (en l'absence d'interactions)

Cas très peu dégénéré ($N \ll N_{crit}$)

$$G^{(1)}(\vec{r},\vec{r}\,') = N\langle\vec{r}|\frac{1}{Z}e^{-\beta\hat{h}_0}|\vec{r}\,'\rangle =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{N}{(\Delta r)^3}\exp\left\{-\frac{[(\vec{r}+\vec{r}\,')/2]^2}{2\Delta r^2}\right\}\exp\left[-\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')^2}{2\xi^2}\right]$$

Densité spatiale : $\rho(\vec{r}) = G(\vec{r},\vec{r})$

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{N}{(\Delta r)^3}\exp\left[-\frac{r^2}{2\Delta r^2}\right]$$

Gaussienne de largeur $\Delta r = \sqrt{\frac{k_BT}{m\omega^2}}$

$G^{(1)}(\vec{r},\vec{r}\,')$ dépend de $\vec{r}$ et $\vec{r}\,'$ et non plus simplement de $\vec{r}-\vec{r}\,'$. Il n'y a plus d'invariance par translation

$G^{(1)}(\vec{r},\vec{r}\,')$ dépend de $(\vec{r}+\vec{r}\,')/2$ sur des distances de l'ordre de Δr et de $\vec{r}-\vec{r}\,'$ sur des distances de l'ordre de ξ

Δr apparait comme la largeur du nuage d'atomes et ξ comme la longueur de cohérence, de l'ordre de λ_T

T-52

Quand N augmente en restant $\ll N_{crit}$, la longueur de cohérence augmente, comme dans le cas du gaz dans une boite, car $G^{(1)}$ est une somme de fonctions analogues à celle donné plus haut, avec des longueurs de coherence croissant en $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4} \dots$

Quand N atteint N_{crit}, $G^{(1)}(\vec{r},\vec{r}\,') = G^{(1)}_{crit}(\vec{r},\vec{r}\,')$ (dans la série en z, on fait $z = 1$)

Quand N dépasse N_{crit}, on voit apparaitre une contribution de l'état fondamental $\psi_0(\vec{r})$ du piège

$$G^{(1)}(\vec{r},\vec{r}\,') = N_0\psi_0^*(\vec{r})\psi_0(\vec{r}\,') + G^{(1)}_{crit}(\vec{r},\vec{r}\,')$$

Le condensat formé par les N_0 atomes dans l'état $\psi_0(\vec{r})$ fait apparaitre une nouvelle longueur de cohérence, la largeur $\sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ de l'état ψ_0

Quand $N \gg N_{crit}$,

$$G^{(1)}(\vec{r},\vec{r}\,') \simeq N\,\psi_0^*(\vec{r})\psi_0(\vec{r}\,')$$