II - 4

T-33

Condensats de Bose-Einstein

Etat $|\psi_0\rangle$ dans lequel sont condensés les atomes bosoniques

Fonction d'onde normée $\psi_0(\vec{r})$

La phase absolue de $\psi_0(\vec{r})$ n'a pas de sens physique. Les 2 états $\psi_0(\vec{r})$ et $\psi_0(\vec{r})e^{i\chi}$ représentent le même état physique.

Différence avec le champ optique

La phase relative de $\psi_0(\vec{r})$ et $\psi_0(\vec{r}\,')$ est par contre importante

Opérateurs $\hat{a}_0^+$ et $\hat{a}_0$

Créent et détruisent un atome dans l'état $\psi_0(\vec{r})$

Opérateurs $\hat{\Psi}^+(\vec{r})$ et $\hat{\Psi}(\vec{r})$

Créent et détruisent un atome au point $\vec{r}$

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \hat{a}_0\,\psi_0(\vec{r}) + \sum_{i\neq 0} \hat{a}_i\,\psi_i(\vec{r})$$

$\{\psi_i(\vec{r})\}$ base orthonormée d'états à 1 particule incluant l'état $\psi_0(\vec{r})$

T-34

Etat de Fock $|N\rangle$

N bosons dans l'état $\psi_0(\vec{r})$

Etat cohérent $|\alpha\rangle$

On peut formellement introduire les états $|\alpha\rangle$, états propres de $\hat{a}_0$, de valeur propre $\alpha = |\alpha|\,e^{i\varphi}$

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^N}{\sqrt{N!}}\, e^{iN\varphi}\, |N\rangle$$

Superposition d'états correspondant à des nombres différents N de bosons.

Sens physique d'un tel état ?

Toutes les observables physiques commutent avec l'opérateur $\hat{N}$ nombre de particules - Règles de supersélection.

Mélange statistique $\hat{\rho}$ d'états $|\alpha\rangle$ de même $|\alpha|$ et de phase φ équipartie entre 0 et 2π

$\hat{\rho}$ est aussi un mélange statistique d'états de Fock $|N\rangle$ et a un sens physique

T-35

Fonctions de corrélation

Ordre 1

$$G^{(1)}(\vec{r},\vec{r}\,') = \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r})\,\hat{\Psi}(\vec{r}\,')\rangle$$

Remarque : $\hat{\Psi}^+(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r}\,')$ est l'opérateur en seconde quantification associé à l'opérateur à 1 particule $\sum_{i=1}^{N} |i,\vec{r}\rangle\langle i,\vec{r}\,'|$, de sorte que $G^{(1)}(\vec{r},\vec{r}\,')$ peut également s'écrire $N\langle \vec{r}\,'|\hat{\rho}^{(1)}|\vec{r}\rangle$ où $\rho^{(1)}$ est l'opérateur densité à 1 particule

$$g^{(1)}(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{G^{(1)}(\vec{r},\vec{r}\,')}{\sqrt{G^{(1)}(\vec{r},\vec{r})\,G^{(1)}(\vec{r}\,',\vec{r}\,')}}$$

Ordre 2

$$G^{(2)}(\vec{r},\vec{r}\,') = \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r})\hat{\Psi}^+(\vec{r}\,')\hat{\Psi}(\vec{r}\,')\hat{\Psi}(\vec{r})\rangle$$

$$g^{(2)}(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{G^{(2)}(\vec{r},\vec{r}\,')}{G^{(1)}(\vec{r},\vec{r})\;G^{(1)}(\vec{r}\,',\vec{r}\,')}$$

Ordre 3

$$G^{(3)}(\vec{r},\vec{r}\,',\vec{r}\,'') = \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r})\hat{\Psi}^+(\vec{r}\,')\hat{\Psi}^+(\vec{r}\,'')\hat{\Psi}(\vec{r}\,'')\hat{\Psi}(\vec{r}\,')\hat{\Psi}(\vec{r})\rangle$$

$$g^{(3)}(\vec{r},\vec{r}\,',\vec{r}\,'') = \frac{G^{(3)}(\vec{r},\vec{r}\,',\vec{r}\,'')}{G^{(1)}(\vec{r},\vec{r})\;G^{(1)}(\vec{r}\,',\vec{r}\,')\;G^{(1)}(\vec{r}\,'',\vec{r}\,'')}$$

T-36

Calcul des fonctions de corrélation dans un état de Fock $|N\rangle$

- N bosons dans le même état $\psi_0(\vec{r})$.

  Un tel état correspond à la description du condensat dans une théorie de champ moyen

  ψ_0 est la solution de l'équation de G.P.

- On peut écrire $|N\rangle$ sous la forme

  $$|N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}(\hat{a}_0^+)^N|0\rangle$$

  $|0\rangle$: Vide de particules

- $$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{a}_i\,\psi_i(\vec{r}) \qquad \hat{\Psi}^+(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{a}_i^+\,\psi_i^*(\vec{r})$$

  Comme $\hat{a}_i$ et $\hat{a}_i^+$ avec $i\neq 0$ commutent avec $\hat{a}_0$ et $\hat{a}_0^+$ on peut remplacer $\hat{\Psi}(\vec{r})$ par $\hat{a}_0\psi_0(\vec{r})$ et $\hat{\Psi}^+(\vec{r})$ par $\hat{a}_0^+\psi_0^*(\vec{r})$ dans le calcul de $G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$... pour un système de bosons dans l'état $|N\rangle$

  En effet, l'ordre normal et la commutation de $\hat{a}_i$ avec $(\hat{a}_0^+)^N$ font apparaître $\hat{a}_i|0\rangle = 0$