II – 2

T – 25

Propriétés de cohérence d'un condensat

Quelques problèmes

- En quel sens peut-on dire qu'un condensat est un objet "cohérent" ?
- Quelles propriétés le différencient d'un nuage thermique ?
- Peut-on parler de phase d'un condensat ?
- Quelles fonctions permettent de caractériser les propriétés de cohérence d'un condensat ?
- Peut-on établir un parallèle avec le problème de la cohérence en optique ?
- Quelles sont les expériences qui ont abordé l'étude de ces problèmes ?

On se limite dans ce cours à l'étude d'un seul condensat. Le problème de la phase relative de 2 condensats sera abordé ultérieurement

T – 26

Champ optique classique (monomode)

$$E^+(\vec{r})\, e^{-i\omega t} + c.c.$$

$E^+(\vec{r})$: nombre complexe ayant un module et une phase

La phase d'un tel champ est mesurable

Etat quantique d'un champ monomode

- Etat à N photons (état de Fock)

$$|N\rangle$$

- Etat le plus général du champ

$$|\psi\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} c_N |N\rangle$$

- Opérateur champ de ce mode

$$\hat{E}^+(\vec{r}) = \mathcal{E}^+(\vec{r})\,\hat{a} \qquad \hat{E}(\vec{r}) = \hat{E}^+(\vec{r}) + h.c.$$

$\mathcal{E}^+(\vec{r})$: Amplitude du champ du vide dans ce mode

$\hat{a}\ (\hat{a}^+)$: Opérateur de destruction (création) d'un photon dans ce mode

T – 27

Etats cohérents

- Etats quantiques qui se rapprochent le plus possible d'un état classique
- $\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$

α : Nombre complexe

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle$$

- Probabilité $\mathcal{P}(N)$ d'avoir N photons dans l'état $|\alpha\rangle$

$$\mathcal{P}(N) = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2N}}{N!} \qquad \text{Loi de Poisson}$$

$$\langle \hat{N} \rangle = \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle = |\alpha|^2$$

$$\Delta N^2 = \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 = |\alpha|^2 = \langle \hat{N} \rangle$$

Si $\langle \hat{N} \rangle \gg 1$, $\Delta N = \sqrt{\langle \hat{N} \rangle}$ est très grand en valeur absolue tout en étant très petit en valeur relative $\Delta N / \langle \hat{N} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \hat{N} \rangle}} \ll 1$

- $$\hat{E}^+(\vec{r})\,|\alpha\rangle = \underbrace{\alpha\, \mathcal{E}^+(\vec{r})}_{\sqrt{\langle \hat{N} \rangle}\, e^{i\varphi(\vec{r})}\, \mathcal{E}^+(\vec{r}) \,=\, E^+_{cl}(\vec{r})} |\alpha\rangle$$

- Généralisation à des champs multimodes

T – 28

Mélange statistique d'états cohérents

$$\alpha = |\alpha|\, e^{i\varphi} = \sqrt{\langle N \rangle}\, e^{i\varphi}$$

Mélange statistique d'états cohérents de même $|\alpha|$ et de phase φ équipartie entre 0 et 2π

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi\, \big|\, |\alpha| e^{i\varphi} \big\rangle \big\langle |\alpha| e^{i\varphi} \big|$$

$$\langle N | \hat{\rho} | N' \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi\, \underbrace{\langle N \,|\, |\alpha| e^{i\varphi} \rangle}_{e^{-|\alpha|^2/2} \frac{|\alpha|^N}{\sqrt{N!}} e^{iN\varphi}} \underbrace{\langle |\alpha| e^{i\varphi} \,|\, N' \rangle}_{e^{-|\alpha|^2/2} \frac{|\alpha|^{N'}}{\sqrt{N'!}} e^{-iN'\varphi}}$$

$$= e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{N+N'}}{\sqrt{N!}\,\sqrt{N'!}} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i(N-N')\varphi}}_{\delta_{NN'}}$$

$$= e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2N}}{N!}\, \delta_{NN'}$$

$$\hookrightarrow \quad \hat{\rho} = \sum_{N=0}^{\infty} \mathcal{P}(N)\, |N\rangle\langle N|$$

$\hat{\rho}$ apparaît aussi comme un mélange statistique d'états de Fock $|N\rangle$ avec une distribution de Poisson des valeurs possibles de N