

① Introduction

Ce qui a été fait dans les cours précédents

- Résolution numérique de l'équation cinétique montrant que, à chaque instant, la fonction de distribution de l'énergie d'un gaz d'atomes piégés dans un puits de profondeur E_t est très voisine d'une exponentielle tronquée

$$f(E) \approx n_0 \Lambda^3 e^{-E/k_B T} \gamma(E_t - E) \quad (8.1)$$

- Etat de quasi-équilibre décrit à chaque instant par 3 variables: T, N, E_t . Calcul dans un tel état de toutes les grandeurs physiques importantes. Par exemple, l'énergie totale E du gaz s'écrit

$$E = N k_B T \left(\frac{3}{2} + \delta \right) R \left(\frac{3}{2} + \delta, \eta \right) \quad (8.2)$$

où δ caractérise le potentiel $U(\vec{r}) = C r^{3/\delta}$ et où

$$\eta = \frac{E_t}{k_B T} \quad (8.3)$$

R est un quotient de 2 fonctions Gamma incomplètes (voir App. C page VII-10). Comme on utilisera très souvent (8.2), on prend une notation plus simple

$$E = N \tilde{c} k_B T \quad (8.4)$$

où

$$\tilde{c} = \left(\frac{3}{2} + \delta \right) R \left(\frac{3}{2} + \delta, \eta \right) \quad (8.5)$$

- Utilisant (8.1) dans l'équation cinétique (7.22) décrivant l'évolution de $f(E)$, on peut obtenir des expressions analytiques décrivant les taux de perte de N et E sans l'effet de l'évaporation: équations (7.31) et (7.35) décrivant $(dN/dt)_{ev}$ et $(dE/dt)_{ev}$.

On ajoute à ces équations les équations décrivant les taux de perte dues aux collisions inélastiques et au déversement (échappement des particule d'énergie égale à E_t quand on abaisse volontairement le seuil E_t).

Ce que l'on veut étudier maintenant

- On veut déterminer l'évolution au cours des temps du nombre d'atomes piégés N et de leur température T , ainsi que celle de toutes les grandeurs physiques intéressantes (volume, densité dans l'espace des phases...)

Il faut pour cela établir les équations différentielles donnant dN/dt et dT/dt et intégrer ces équations.

- Notons que l'évolution temporelle de E_t est fixée par l'expérimentateur, qui peut garder E_t constant (évaporation simple) ou abaisser E_t au fur et à mesure que T diminue pour que l'évaporation ne se ralentisse pas trop (évaporation forcée).

Principe du calcul

- Les variations de N et E dues à l'évaporation (et aux autres pertes) sont supposées suffisamment lentes à l'échelle du temps de thermalisation pour que le gaz atteigne à chaque instant un état de quasi-équilibre. Entre t et $t+dt$, le gaz passe d'un état N, T, E_t à un état $N+dN, T+dT, E_t+dE_t$ et son énergie (8.4) passe de E à $E+dE$.
- En considérant (8.4) comme une équation d'état, on peut relier dE à dN, dT, dE_t et obtenir une première équation reliant dE/dt à dN/dt et dT/dt . Les équations de perte donnent 2 autres équations pour dN/dt et dE/dt . En éliminant dE/dt entre ces 3 équations, on obtient les 2 équations

différentielles cherchées pour dN/dt et dT/dt .

② Les équations de base

2-1 Equation décrivant le changement de quasi-équilibre

$$N, T, E_t \rightarrow N+dN, T+dT, E_t+dE_t$$

$$E(N, T, E_t) \rightarrow E(N+dN, T+dT, E_t+dE_t) = E(N, T, E_t) + dE$$

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{T, E_t} dN + \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{N, E_t} dT + \left(\frac{\partial E}{\partial E_t}\right)_{N, T} dE_t \quad (8.6)$$

- Prenons le logarithme des 2 membres de (8.4) et dérivons par rapport à t
Il vient

$$\frac{\dot{E}}{E} = \frac{\dot{N}}{N} + \frac{\dot{T}}{T} + \frac{\dot{\tilde{C}}}{\tilde{C}} \quad (8.7)$$

\tilde{C} dépend en effet de T et E_t via $\eta = E_t/k_B T$.

$$\frac{\dot{\tilde{C}}}{\tilde{C}} = \frac{1}{\tilde{C}} \frac{d\tilde{C}}{d\eta} \dot{\eta} \quad (8.8)$$

Comme, d'après (8.3),

$$\frac{\dot{\eta}}{\eta} = \frac{\dot{E}_t}{E_t} - \frac{\dot{T}}{T} \quad (8.9)$$

on a

$$\frac{\dot{\tilde{C}}}{\tilde{C}} = \frac{\eta}{\tilde{C}} \frac{d\tilde{C}}{d\eta} \left(\frac{\dot{E}_t}{E_t} - \frac{\dot{T}}{T} \right) \quad (8.10)$$

En reportant (8.10) dans (8.7), on obtient :

$$\boxed{\frac{\dot{E}}{E} = \frac{\dot{N}}{N} + \left(1 - \frac{\eta}{\tilde{C}} \frac{d\tilde{C}}{d\eta}\right) \frac{\dot{T}}{T} + \frac{\eta}{\tilde{C}} \frac{d\tilde{C}}{d\eta} \frac{\dot{E}_t}{E_t}} \quad (8.11)$$

- On peut aisément calculer $\frac{\eta}{\tilde{C}} \frac{d\tilde{C}}{d\eta}$ en utilisant (8.5) et l'équation (C.13) de l'appendice C (p. VII-10)

$$\frac{\eta}{\tilde{C}} \frac{d\tilde{C}}{d\eta} = \frac{\eta}{R(\frac{3}{2}+\delta, \eta)} \frac{dR(\frac{3}{2}+\delta, \eta)}{d\eta} = 1 + (\frac{3}{2}+\delta)R(\frac{3}{2}+\delta, \eta) - (\frac{5}{2}+\delta)R(\frac{5}{2}+\delta, \eta) \quad (8.12)$$

Cas particulier de l'évaporation à η constant

- Si E_t est varié de manière à conserver $\eta = E_t/k_B T$ constant quand T varie, on a $\dot{\eta} = 0$ de sorte que $\dot{\tilde{C}}/\tilde{C} = 0$ d'après (8.8)
l'équation (8.7) se simplifie alors et devient :

$$\boxed{\eta \text{ constant} \rightarrow \frac{\dot{E}}{E} = \frac{\dot{N}}{N} + \frac{\dot{T}}{T}} \quad (8.13)$$

- Notons que si $\dot{\eta} = 0$, on a également d'après (8.9) :

$$\eta \text{ constant} \rightarrow \frac{\dot{E}_t}{E_t} = \frac{\dot{T}}{T} \quad (8.14)$$

2-2 Equations décrivant les pertes

Pertes de N

$$- \text{On a} \quad \frac{dN}{dt} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_{ev} + \left(\frac{dN}{dt}\right)_{inel} + \left(\frac{dN}{dt}\right)_{spill} \quad (8.15)$$

où les 3 termes représentent les pertes par évaporation, collisions inélastiques et déversement ("spilling"), respectivement.

- D'après les résultats du cours VII, §§ 3 et 4 :

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{ev} = -\Gamma_{ev} N \quad (8.16)$$

avec

$$\Gamma_{ev} = \Gamma_{el} e^{-\eta} \frac{v_{ev}}{v_e} \quad (8.17)$$

$$\Gamma_{el} = n_0 \sigma v \tag{8.18}$$

$$\frac{V_{ev}}{V_e} = \eta - \left(\frac{5}{2} + \delta\right) R\left(\frac{3}{2} + \delta, \eta\right) \tag{8.19}$$

$$- \left(\frac{dN}{dt}\right)_{inel} = - \Gamma_{inel} N \tag{8.20}$$

$$- \left(\frac{dN}{dt}\right)_{spil} = - \Gamma_t N \tag{8.21} \quad \Gamma_t = - \tilde{\xi} \frac{\dot{E}_t}{E_t} \tag{8.22}$$

$$\tilde{\xi} = \left(\frac{3}{2} + \delta\right) \left[1 - R\left(\frac{3}{2} + \delta, \eta\right)\right] \tag{8.23}$$

- Finalement, en regroupant (8.16), (8.20), (8.21) et (8.22), on obtient pour l'équation décrivant les pertes de N

$$\boxed{\frac{\dot{N}}{N} = - \Gamma_{ev} - \Gamma_{inel} + \tilde{\xi} \frac{\dot{E}_t}{E_t}} \tag{8.24}$$

Pertes de E

- L'équivalent de (8.15) est

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{dE}{dt}\right)_{ev} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{inel} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{spil} \tag{8.25}$$

- D'après les résultats du cours VII, § 3.2 :

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{ev} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_{ev} (\eta + \tilde{\kappa}) k_B T \tag{8.26}$$

avec

$$\tilde{\kappa} = 1 - \frac{X_{ev}}{V_{ev}} \tag{8.27}$$

$$\frac{X_{ev}}{V_{ev}} = \frac{P\left(\frac{7}{2} + \delta, \eta\right)}{P\left(\frac{3}{2} + \delta, \eta\right)} \frac{V_e}{V_{ev}} \tag{8.28}$$

En reportant (8.16) dans (8.26), on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dt}\right)_{ev} &= - \Gamma_{ev} (\eta + \tilde{\kappa}) N k_B T \\ &= - \Gamma_{ev} \frac{\eta + \tilde{\kappa}}{\tilde{c}} \underbrace{N \tilde{c} k_B T}_{= E} = - \Gamma_{ev} \frac{\eta + \tilde{\kappa}}{\tilde{c}} E \end{aligned} \tag{8.29}$$

- On a de même

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{inel} = - \Gamma_{inel} E \tag{8.30}$$

En effet, les atomes de gaz résiduel responsables des collisions inélastiques sont très chauds. Leur énergie est très grande devant celle des atomes piégés, de sorte que la section efficace de collisions inélastique dépend très peu de l'énergie des atomes piégés. C'est ce qui explique pourquoi le même terme apparaît dans (8.20) et (8.30)

- Enfin, pour les pertes par déversement, il suffit de noter que l'énergie des particules qui s'échappent quand on abaisse E_t est égale à E_t , de sorte que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dt}\right)_{spil.} &= \left(\frac{dN}{dt}\right)_{spil.} E_t = \tilde{\xi} \frac{\dot{E}_t}{E_t} N E_t \\ &= \tilde{\xi} \frac{\dot{E}_t}{E_t} N \eta k_B T = \tilde{\xi} \frac{\dot{E}_t}{E_t} \frac{\eta}{\tilde{c}} \underbrace{N \tilde{c} k_B T}_{= E} \\ &= \tilde{\xi} \frac{\dot{E}_t}{E_t} \frac{\eta}{\tilde{c}} E \end{aligned} \tag{8.31}$$

- Finalement, en regroupant (8.29), (8.30) et (8.31), on obtient pour l'équation décrivant les pertes de E

$$\boxed{\frac{\dot{E}}{E} = - \frac{\eta + \tilde{\kappa}}{\tilde{c}} \Gamma_{ev} - \Gamma_{incl} + \frac{\tilde{\xi} \eta}{\tilde{c}} \frac{\dot{E}_t}{E_t}} \quad (8.32)$$

③ Evaporation à η constant

3-1 Simplification des équations

- Les équations du paragraphe précédent font intervenir toute une série de coefficients comme \tilde{c} , v_{ev}/v_e , $\tilde{\kappa}$, x_{ev}/v_{ev} , $\tilde{\xi}$, qui ne dépendent que de δ et de $\eta = E_t/k_B T$, via des fonctions Gamma incomplètes comme $P(a, \eta)$ ou $R(a, \eta)$. Si l'on suppose que η reste constant quand on abaisse E_t pour forcer l'évaporation, tous ces coefficients sont indépendants du temps et la résolution des équations d'évolution de E, N, T est grandement simplifiée. On peut même obtenir des solutions analytiques pour décrire l'évolution temporelle.
- Le but de ce paragraphe est de présenter une étude analytique du refroidissement évaporatif dans un tel cas où η est fixe. La démarche suivie s'inspire grandement de celle présentée dans la référence [5].
- Quand η est constant, on peut utiliser l'équation (8.13) décrivant le changement de quasi-équilibre et tenir compte de (8.14) pour remplacer \dot{E}_t/E_t par \dot{T}/T dans les équations de perte (8.24) et (8.32). On obtient

$$\begin{cases} \frac{\dot{E}}{E} = \frac{\dot{N}}{N} + \frac{\dot{T}}{T} & (8.33a) \\ \frac{\dot{N}}{N} = -\Gamma_{ev} + \tilde{\xi} \frac{\dot{T}}{T} - \Gamma_{incl} & (8.33b) \\ \frac{\dot{E}}{E} = -\frac{\eta + \tilde{\kappa}}{\tilde{c}} \Gamma_{ev} + \frac{\tilde{\xi} \eta}{\tilde{c}} \frac{\dot{T}}{T} - \Gamma_{incl} & (8.33c) \end{cases}$$

Le fait que $\tilde{\xi}$, Γ_{incl} , η , $\tilde{\kappa}$, \tilde{c} soient indépendants du temps ne doit pas faire croire que le système (8.33) est un système différentiel linéaire à coefficients constants. En effet, le taux d'évaporation Γ_{ev} , donné par (8.17) et (8.18), est proportionnel à $n_0 v$. Or, la densité spatiale n_0 et la vitesse moyenne thermique v dépendent de N et T . D'après les résultats du cours VII [voir (7.13), (7.14), (7.6), (7.27)]

$$\begin{cases} n_0 = \frac{N}{V_e} = \frac{N}{\Lambda^3(T) \zeta_{\infty}(T) P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)} \propto N T^{-\delta} & (8.34a) \\ v = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}} \propto T^{1/2} & (8.34b) \end{cases}$$

A cause de la présence de Γ_{ev} , les équations (8.33) sont donc des équations non-linéaires.

- Notons cependant que l'équation (8.33a) ne fait pas intervenir Γ_{ev} . De plus, en multipliant l'équation (8.33b) par $-(\eta + \tilde{\kappa})/\tilde{c}$ et en l'ajoutant à (8.33c), on peut obtenir une autre équation où ne figure plus Γ_{ev} .

$$\frac{\dot{E}}{E} = \frac{\eta + \tilde{\kappa}}{\tilde{c}} \frac{\dot{N}}{N} - \frac{\tilde{\kappa} \tilde{\xi}}{\tilde{c}} \frac{\dot{T}}{T} - \Gamma_{incl} \left(1 - \frac{\eta + \tilde{\kappa}}{\tilde{c}}\right) \quad (8.35)$$

L'élimination de $\frac{\dot{E}}{E}$ entre (8.33a) et (8.35) conduit alors à une

équation où ne figurent plus, ni \dot{E}/E , ni Γ_{ev}

$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\dot{T}}{T} - \Gamma_{incl} \quad (8.36)$$

où

$$\tilde{\alpha} = \frac{\eta + \tilde{\kappa}}{\tilde{c}} - 1 = \frac{\eta + \tilde{\kappa} - \tilde{c}}{\tilde{c} + \tilde{\kappa} \tilde{\xi}} \quad (8.37)$$

- Ainsi, on peut éliminer \dot{E}/E des équations (8.33) pour obtenir le système suivant de 2 équations pour \dot{N}/N et \dot{T}/T :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{N}}{N} = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\dot{T}}{T} - \Gamma_{incl} \\ \frac{\dot{N}}{N} = -\Gamma_{ev} + \tilde{\xi} \frac{\dot{T}}{T} - \Gamma_{incl} \end{array} \right. \quad (8.38 a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{N}}{N} = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\dot{T}}{T} - \Gamma_{incl} \\ \frac{\dot{N}}{N} = -\Gamma_{ev} + \tilde{\xi} \frac{\dot{T}}{T} - \Gamma_{incl} \end{array} \right. \quad (8.38 b)$$

On pourrait bien sûr calculer séparément \dot{N}/N et \dot{T}/T en fonction de Γ_{ev} , Γ_{incl} , $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\xi}$ (voir les équations (8.46) plus loin), mais nous préférons garder pour le moment les équations sous la forme (8.38), car la première de ces 2 équations ne fait pas intervenir Γ_{ev} et peut être intégrée directement pour faire apparaître des constantes du mouvement et des lois de puissance.

3-2 Constantes du mouvement et lois de puissance

Cas simple où les collisions inélastiques peuvent être négligées

- Si l'on fait $\Gamma_{incl} = 0$ dans (8.38 a), on obtient

$$\frac{\dot{T}}{T} = \tilde{\alpha} \frac{\dot{N}}{N} \iff \frac{d}{dn} \left(\ln \frac{T}{N^{\tilde{\alpha}}} \right) = 0 \quad (8.39)$$

- On en déduit que $T/N^{\tilde{\alpha}}$ est une constante du mouvement et que T est donné en fonction de N par une loi de puissance d'exposant $\tilde{\alpha}$

$$\frac{T_1}{N_1^{\tilde{\alpha}}} = \frac{T_2}{N_2^{\tilde{\alpha}}} \quad (8.40)$$

- Nous retrouvons ainsi le résultat du § 3.2 du cours V. Il est intéressant de comparer l'expression (5.49) du coefficient α introduit dans le cours V, et l'expression (8.37) établie ici de manière quantitative.

Négligeons tout d'abord le déversement en posant $\tilde{\xi} = 0$. En utilisant (8.5), on obtient alors pour α

$$\tilde{\xi} = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\eta + \tilde{\kappa}}{\left(\frac{3}{2} + \delta\right) R\left(\frac{3}{2} + \delta, \eta\right)} - 1 \quad (8.41)$$

Le traitement présenté ici donne tout d'abord une expression précise pour $\tilde{\kappa}$ (voir (8.27)). On voit aussi apparaître au dénominateur de (8.41), une correction $R\left(\frac{3}{2} + \delta, \eta\right)$ liée au fait que le potentiel de piègeage n'a pas une profondeur infinie. Enfin, la présence de $\tilde{\xi}$ au dénominateur de (8.37) montre que le déversement diminue la valeur de $\tilde{\alpha}$.

- Toutes les lois de puissance du tableau II de la page V-8 demeurent valables, à condition de remplacer partout α par $\tilde{\alpha}$.

Modifications introduites par les collisions inélastiques

- Tenons compte maintenant du terme en Γ_{incl} de (8.38 a). On peut réécrire cette équation sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \ln \left(\frac{N}{T^{1/\alpha}} \right) = -\Gamma_{\text{inel}} \quad (8.42)$$

Cette équation s'intègre aisément pour donner :

$$\frac{N_1}{T_1^{1/\alpha}} = \frac{N_2}{T_2^{1/\alpha}} e^{-\Gamma_{\text{inel}} (t_1 - t_2)} \quad (8.43)$$

- On peut donc là encore introduire une quantité qui se conserve au cours du temps

$$\frac{T_1}{N_1^\alpha} e^{-\tilde{\alpha} \Gamma_{\text{inel}} t_1} = \frac{T_2}{N_2^\alpha} e^{-\tilde{\alpha} \Gamma_{\text{inel}} t_2} \quad (8.44)$$

Si T_2 et N_2 correspondent à l'instant initial ($t_2=0$), on voit que T_1 diminue moins (pour la même perte d'atomes), par un facteur $\exp(\tilde{\alpha} \Gamma_{\text{inel}} t_1)$, qu'en l'absence de collisions. Les atomes perdus par collisions inélastiques ne contribuent pas en effet au refroidissement.

3-3 Changement de variables

Pour étudier la cinétique du refroidissement, il faut maintenant utiliser la 2^{ème} équation (8.38 b). En fait, comme Γ_{ev} dépend de n_0 et v , et non directement de N et T , il est plus commode de changer de variables et de passer, grâce aux équations (8.34), des variables N, T aux variables n_0, v , de manière à obtenir des équations ne faisant intervenir que n_0 et v .

Nous allons également changer légèrement de notations, et utiliser n plutôt que n_0 , de manière à éviter toute confusion entre n_0 et la valeur de n à $t=0$.

Passage des variables N, T aux variables n, v

- Des équations (8.34) on déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{n} \\ n \end{array} = \frac{\dot{N}}{N} - \delta \frac{\dot{T}}{T} \right. \quad (8.45a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v} \\ v \end{array} = \frac{1}{2} \frac{\dot{T}}{T} \right. \quad (8.45b)$$

- En réécrivant les équations (8.38) sous une forme qui donne séparément \dot{N}/N et \dot{T}/T

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{N} \\ N \end{array} = - \frac{1}{1 - \tilde{\alpha} \tilde{\xi}} \Gamma_{ev} - \Gamma_{\text{inel}} \right. \quad (8.46a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{T} \\ T \end{array} = - \frac{\tilde{\alpha}}{1 - \tilde{\alpha} \tilde{\xi}} \Gamma_{ev} \right. \quad (8.46b)$$

et en combinant (8.45) et (8.46), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{n} \\ n \end{array} = \frac{\delta \tilde{\alpha} - 1}{1 - \tilde{\alpha} \tilde{\xi}} \Gamma_{ev} - \Gamma_{\text{inel}} \right. \quad (8.47a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v} \\ v \end{array} = - \frac{\tilde{\alpha}}{2(1 - \tilde{\alpha} \tilde{\xi})} \Gamma_{ev} \right. \quad (8.47b)$$

- Par ailleurs, d'après (8.17) et (8.18), $\Gamma_{ev} = n v \sigma e^{-\eta} V_{ev}/V_e$.

Si l'on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} = \frac{\delta \tilde{\alpha} - 1}{1 - \tilde{\alpha} \tilde{\xi}} e^{-\eta} \frac{V_{ev}}{V_e} \right. \quad (8.48a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B \\ A \end{array} = \frac{\tilde{\alpha}}{2(1 - \tilde{\alpha} \tilde{\xi})} e^{-\eta} \frac{V_{ev}}{V_e} \right. \quad (8.48b)$$

les équations (8.47) deviennent

$$\begin{cases} \dot{n} = A n^2 v \sigma - \Gamma_{incl} n & (8.49.a) \\ \dot{v} = -B n v^2 \sigma & (8.49.b) \end{cases}$$

Il sera également commode pour la suite de poser

$$\beta = \frac{A}{B} = \frac{2(\delta\tilde{\alpha} - 1)}{\tilde{\alpha}} \quad (8.50)$$

Choix de variables sans dimensions

- Les équations prennent une forme encore plus simple si l'on prend pour unité de densité et unité de vitesse les valeurs n_0 et v_0 de n et v à $t=0$

$$\hat{n} = n/n_0 \quad (8.51.a) \quad \hat{v} = v/v_0 \quad (8.51.b)$$

Comme unité de temps τ_0 , on prend le temps entre collisions élastiques à l'instant $t=0$

$$\hat{t} = t/\tau_0 \quad (8.52.a) \quad \tau_0 = \frac{1}{n_0 \sigma v_0} \quad (8.52.b)$$

- les équations (8.49) deviennent alors

$$\begin{cases} \frac{d\hat{n}}{d\hat{t}} = A \hat{n}^2 \hat{v} - r \hat{n} & (8.53.a) \\ \frac{d\hat{v}}{d\hat{t}} = -B \hat{n} \hat{v}^2 & (8.53.b) \end{cases}$$

avec
$$r = \frac{\Gamma_{incl}}{\Gamma_{el}(t=0)} = \frac{\Gamma_{incl}}{n_0 \sigma v_0} \quad (8.54)$$

- Pour ne pas multiplier les notations, nous continuerons à utiliser n et v au lieu de \hat{n} et \hat{v} , et \dot{n} et \dot{v} au lieu de $d\hat{n}/d\hat{t}$ et $d\hat{v}/d\hat{t}$. Il est bien entendu cependant que, dans tout ce qui suit, les grandeurs utilisées sont sans dimensions et valent toutes 1 à $t=0$. Nous récrivons donc simplement 8.53 sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{n} = A n^2 v - r n & (8.55.a) \\ \dot{v} = -B n v^2 & (8.55.b) \end{cases}$$

- Des équations (8.55), on déduit aisément

$$B \frac{\dot{n}}{n} + A \frac{\dot{v}}{v} = -B r \quad (8.56)$$

c'est à dire encore, compte tenu de (8.50)

$$\frac{\dot{n}}{n} + \beta \frac{\dot{v}}{v} = -r \quad (8.57)$$

équation qui s'intègre immédiatement pour donner

$$n v^\beta = e^{-r t} \quad (8.58)$$

ce qui est l'analogie de l'équation (8.43) pour les nouvelles variables n et v (l'instant t_2 étant pris comme instant initial où $n_0 = v_0 = 1$)

- Il nous faut maintenant établir une autre relation analogue à (8.58) à partir des équations (8.55) pour résoudre le problème de l'évolution temporelle. Nous allons le faire en étudiant l'évolution du taux de collisions élastiques $n v \sigma$, c-à-d encore celui de $n v$. Ceci nous permettra également de discuter la notion d'emballement ("runaway") de l'évaporation.

3.4 Evolution du taux de collisions élastiques

L'évolution de $\Gamma_{el} = n\sigma v$ est déterminée par celle de $x = nv$. D'après (8.55)

$$\frac{d}{dt} nv = \dot{x} = \dot{n}v + n\dot{v} = (A-B)n^2v^2 - rnv = (A-B)x^2 - rx \quad (8.59)$$

Collisions inélastiques négligées $\Gamma_{inel} = 0$ $r = 0$

$$\frac{dx}{dt} = (A-B)x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x^2} = (A-B)dt \quad (8.60)$$

L'intégration de (8.60) avec la condition initiale $x(0) = 1$ donne :

$$-\frac{1}{x} + 1 = (A-B)t \quad \Rightarrow \quad x = nv = \frac{1}{1 - (A-B)t} = \frac{1}{1 - (\beta-1)Bt} \quad (8.61)$$

- Les variations de $x = nv$ avec t sont représentées sur la figure 1 dans 3 cas

(i) $A < B$ (ou $\beta < 1$)

Le dénominateur de (8.61) croît de 1 à $+\infty$ quand t croît et nv décroît de 1 à 0

(ii) $A = B$ (ou $\beta = 1$)

nv reste constant et égal à 1

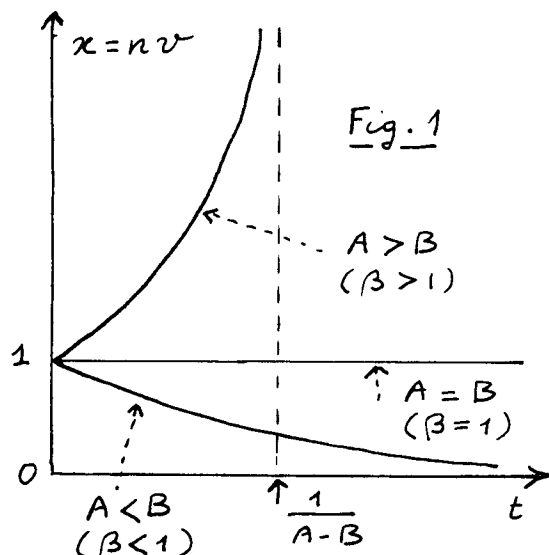
$$\beta = 1 \rightarrow nv = 1 \quad (8.62)$$

(iii) $A > B$ (ou $\beta > 1$)

Le dénominateur de (8.61) décroît de 1 à 0 quand t croît de 0 à $1/(A-B)$

nv croît à partir de 1 et diverge au bout d'un temps fini

$$t_{div} = \frac{1}{A-B} \quad (8.63)$$



Collisions inélastiques non négligées $\Gamma_{inel} \neq 0$ $r \neq 0$

$$\frac{dx}{dt} = [(A-B)x - r]x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x[(A-B)x - r]} = dt \quad (8.64)$$

$$\Rightarrow -\frac{dx}{x} + \frac{dx}{x - \frac{r}{A-B}} = r dt \quad \Rightarrow \quad x = nv = \frac{e^{-rt}}{1 - (1 - e^{-rt}) \frac{A-B}{r}}$$

- Les variations de $x = nv$ avec t ont la même allure que celle de la figure 1. La valeur critique de $A-B$ est maintenant non plus $A-B=0$, mais $A-B=r$

(i) $A-B < r$: le dénominateur de 8.64 ne s'annule jamais et croît de 1 à $1 - (A-B)/r > 1$. Le numérateur s'annule exponentiellement. $x = nv$ décroît de 1 à 0 quand t croît

(ii) $A-B = r$ l'équation (8.64) donne $x = nv = 1$

$$A-B = r \rightarrow nv = 1 \quad (8.65)$$

(iii) $A-B > r$ Le dénominateur de (8.64) décroît à partir de 1 et s'annule pour une certaine valeur de t telle que $e^{-rt} = 1 - \frac{r}{A-B}$

L'exponentielle amortie du numérateur n'empêche pas alors $x = nv$ de diverger au bout d'un temps fini donné par

$$t_{div} = -\frac{1}{r} \ln\left(1 - \frac{r}{A-B}\right) \quad (8.66)$$

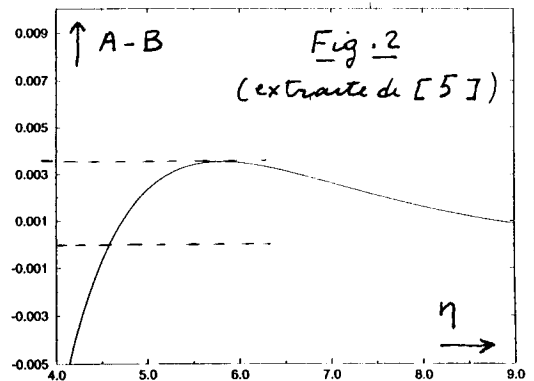
Quand $r \rightarrow 0$, on vérifie bien que (8.64) tend vers (8.61) et (8.66) vers (8.63)

- La divergence de $x = nV$ qui apparait au bout d'un temps fini quand $A-B > 0$ ou $A-B > r$ est liée au caractère non linéaire de l'équation (8.53) et reflète un emballement du temps de collisions élastiques. Nous verrons plus loin qu'un tel emballement peut apparaître également sur d'autres grandeurs physiques, comme la densité D dans l'espace des phases.

- La figure 2, extraite de [5], donne les variations avec η de $A-B$ pour $\delta = 3/2$ (puits parabolique)

Pour $r=0$ ($\Gamma_{\text{inel}}=0$), $A-B$ est positif et l'évaporation ne s'emballe que si η est supérieur à une valeur de l'ordre de 4.6

On voit également que $A-B$ atteint une valeur maximale de l'ordre de 0.0033 pour η de l'ordre de 6. En d'autres termes, il ne pourra jamais y avoir d'emballement si $r > 0.0033$, c'est à dire s'il y a moins de $1/0.0033 = 300$ collisions élastiques (se produisant avec le temps $\Gamma_{\text{el}}(t=0)$ en $t=0$) pendant le temps de piégeage $T_{\text{piégeage}} = T_{\text{inel}} = 1/\Gamma_{\text{inel}}$. En effet, d'après (8.54), $1/r = \Gamma_{\text{el}}(t=0) / \Gamma_{\text{inel}} = \Gamma_{\text{el}}(t=0) T_{\text{piégeage}}$. Par contre, si η est inférieur à 0.0033, il pourra y avoir emballement si η est compris entre les abscisses des 2 points d'intersection de la courbe $A-B$ de la figure 2 avec l'horizontale d'ordonnée r .



- l'étude présentée ici permet donc de préciser le seuil au-dessous duquel les collisions inélastiques doivent être réduites par rapport aux collisions élastiques si l'on veut atteindre le régime d'emballement. Elle montre qu'un tel régime conduit à une divergence du temps de collisions élastiques. Elle montre enfin que pour chaque type de piège, caractérisé par δ , il existe une plage de valeurs optimales de η .

Références (suite de la liste de la page VII-9)

- [5] D. Guéry Odelin, Notes non publiées, résultant de calculs faits dans l'équipe de J. Dalibard, en collaboration avec M.J. Reynolds.