

26.11.96

# Atomes en quasi-équilibre dans un piège de profondeur finie

VII-1

## ① Introduction

### Système étudié

- Gaz d'atomes identiques dans un puits de potentiel  $V(\vec{r})$  de profondeur finie égale à  $E_f$ .
- Mouvement suffisamment ergodique pour que la fonction de distribution  $f(\vec{r}, \vec{p})$  ne dépende que de l'énergie  $E = \vec{p}^2/2m + V(\vec{r})$ . D'après les résultats du cours VI, l'état du gaz est alors décrit à chaque instant par une fonction très proche d'une exponentielle de Maxwell-Boltzmann tronquée à  $E_f$  :

$$f(E) = z e^{-E/k_B T} \chi(E_f - E) \quad (7.1)$$

- Etat du gaz décrit à chaque instant par 3 paramètres :
  - $T$  : température effective
  - $z$  : Paramètre de normalisation, analogue à une fugacité ou à un paramètre de dégénérescence, relié au nombre total  $N$  d'atomes.
  - $E_f$  : Profondeur du puits, que l'on peut faire varier éventuellement.

### Notion de quasi-équilibre

- L'état (7.1) n'est pas un vrai état d'équilibre. La résolution numérique de l'équation cinétique (voir Ref. [1]) montre que  $T$  et  $N$  varient. Cette variation est due au processus d'évaporation.
- On suppose cependant qu'il y a 2 échelles de temps dans le problème : le temps d'évaporation  $\tau_{ev}$ , très long devant le temps  $\tau_{el}$  séparant 2 collisions élastiques subies par le même atome. En d'autres termes,  $T$  et  $N$  varient suffisamment lentement à cause de l'évaporation pour que, à chaque instant, un quasi-équilibre ait le temps de s'établir après quelques collisions élastiques. A une échelle de temps, courte devant  $\tau_{ev}$ , mais longue devant  $\tau_{el}$ , on peut considérer l'état décrit par (7.1) comme un état d'équilibre.

### Buts de ce chapitre

- (i) Calculer un certain nombre de grandeurs physiques : volume effectif, densité spatiale, énergie totale... dans l'état de quasi-équilibre (7.1). On considère  $T$  et  $z$  comme fixés et on se limite au cas important de pièges décrits par des lois de puissance. Le fait de disposer d'une expression analytique simple (7.1) pour  $f(E)$  permet d'obtenir pour toutes les grandeurs physiques des expressions analytiques qu'on peut ensuite comparer aux expressions correspondantes établies dans le cours V pour un puits de potentiel infini (conduisant à un véritable état d'équilibre).

On pourra ainsi évaluer de manière quantitative l'effet sur les diverses grandeurs physiques du système de la troncature à  $E_f$ .

VII-2/ (ii) Calculer, à partir de l'équation cinétique établie dans le cours VI, les temps des mécanismes de pertes qui font que l'état (7.1) n'est pas un véritable état d'équilibre : perte d'atomes et perte d'énergie (dus au processus d'évaporation) par unité de temps ; interprétation des expressions analytiques obtenues pour le temps d'évaporation  $\tau_{ev}$  ; comparaison de  $\tau_{ev}$  à  $\tau_{el}$ .

Nous incluons également dans cette étude les mécanismes de pertes autres que l'évaporation : pertes dues aux collisions inélastiques qui font passer l'atome dans des états non piégés ; pertes de déversement ("spilling") qui apparaissent quand on abaisse le seuil  $E_t$  et qu'on laisse s'échapper les atomes d'énergie voisine de  $E_t$ .

Les résultats obtenus dans le cours VII nous permettront ensuite d'étudier dans le cours VIII comme l'état de quasi-équilibre (7.1), et les grandeurs physiques correspondantes, évoluent au cours du temps.

② Propriétés de quasi-équilibre du gaz d'atomes piégés.

2.1 Fonction de partition  $\zeta(T)$

- Comme on se limite aux pièges décrits par des lois de puissance et que, seules, les énergies  $E < E_t$  sont accessibles aux atomes piégés, la formule généralisant (5.35) pour la densité d'états s'écrit :

$$\rho(E) = A_{PL} E^{\frac{1}{2} + \delta} \gamma(E_t - E) \quad (7.2)$$

de sorte que la fonction de partition  $\zeta(T)$  est donnée par

$$\begin{aligned} \zeta(T) &= \int_0^\infty \rho(E) e^{-E/k_B T} dE = A_{PL} \int_0^{E_t} E^{\frac{1}{2} + \delta} e^{-E/k_B T} dE \\ &= A_{PL} (k_B T)^{\frac{3}{2} + \delta} \int_0^\eta u^{\frac{1}{2} + \delta} e^{-u} du \end{aligned} \quad (7.3)$$

où l'on a posé

$$\eta = \frac{E_t}{k_B T} \quad (7.4)$$

- Introduisons la fonction Gamma incomplète (voir Ref [2], l'appendice C, et l'appendice de [3])

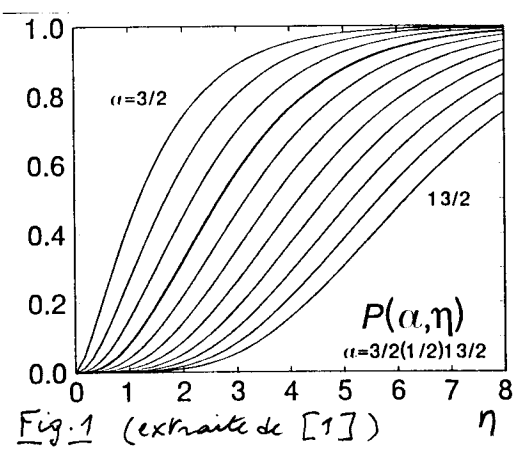
$$P(a, \eta) = \frac{\int_0^\eta u^{a-1} e^{-u} du}{\int_0^\infty u^{a-1} e^{-u} du} = \frac{\int_0^\eta u^{a-1} e^{-u} du}{\Gamma(a)} \quad (7.5)$$

Il est clair sur (7.5) que

$$P(a, \eta) \rightarrow 1 \text{ si } \eta \rightarrow \infty.$$

Quelques propriétés de  $P(a, \eta)$  sont données dans [1], [2], [3] et l'appendice C.

La figure 1, extraite de [1], donne un réseau de courbes  $P(a, \eta)$  en fonction de  $\eta$  pour diverses valeurs de  $a$  variant par des sauts de  $1/2$  de  $a = 3/2$  à  $a = 13/2$



- Compte tenu de (7.5), l'équation (7.3) peut être réécrite

$$\begin{aligned} \zeta(T) &= A_{PL} \Gamma\left(\frac{3}{2} + \delta\right) (k_B T)^{\frac{3}{2} + \delta} P\left(\frac{3}{2} + \delta, \eta\right) \\ &= \zeta_{\infty}(T) P\left(\frac{3}{2} + \delta, \eta\right) \end{aligned} \quad (7.6)$$

où  $\zeta_{\infty}(T)$  est la fonction de partition (5.37) pour un puits infini.

### 2.2 Densité spatiale

- Par analogie avec (5.17), nous écrivons le paramètre sans dimensions  $z$  apparaissant dans (7.1) sous la forme

$$z = n_0 \Lambda^3 \quad (7.7)$$

où  $\Lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T}$  est la longueur d'onde de de Broglie thermique et où  $n_0$  a les dimensions d'une densité spatiale, qui ne coïncide plus, comme nous le verrons plus loin, avec la densité  $n(\vec{0})$  en  $\vec{r} = \vec{0}$ .

- On peut reprendre le calcul du § 2.2 du cours V, des équations (5.6) à (5.14) (en remplaçant toutefois  $\sum_{\epsilon=1}^{\infty} z^{\epsilon} e^{-\epsilon/k_B T}$  par le premier terme  $z e^{-\epsilon/k_B T}$  puisqu'on se limite au cas non dégénéré  $z \ll 1$ ). La seule différence est qu'en chaque point  $\vec{r}$ ,  $\vec{p}^2$  ne varie plus de 0 à  $+\infty$ , mais de 0 à  $2m[\epsilon_t - U(\vec{r})]$  puisque  $\epsilon = \vec{p}^2/2m + U(\vec{r}) \leq \epsilon_t$ . On doit donc remplacer l'intégrale

$$\int d^3p e^{-\vec{p}^2/2mk_B T} = 4\pi \int_0^{\infty} p^2 e^{-p^2/2mk_B T} dp = 2\pi (2mk_B T)^{3/2} \int_0^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du \quad (7.8)$$

par

$$4\pi \int_0^{2m(\epsilon_t - U(\vec{r}))} p^2 e^{-p^2/2mk_B T} dp = 2\pi (2mk_B T)^{3/2} \int_0^{\eta_t(\vec{r})} u^{1/2} e^{-u} du \quad (7.9)$$

où

$$\eta_t(\vec{r}) = \frac{\epsilon_t - U(\vec{r})}{k_B T} \quad (7.10)$$

- Pour trouver l'expression qui généralise (5.27), il faut donc remplacer  $n(\vec{0})$  par  $n_0$  et  $\int_0^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du$  par  $\int_0^{\eta_t(\vec{r})} u^{1/2} e^{-u} du$ , ce qui revient à multiplier l'équation par  $\int_0^{\eta_t(\vec{r})} u^{1/2} e^{-u} du / \int_0^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du = P(\frac{3}{2}, \eta_t(\vec{r}))$ .  
On a donc

$$n(\vec{r}) = n_0 e^{-U(\vec{r})/k_B T} P\left(\frac{3}{2}, \eta_t(\vec{r})\right) \quad (7.11)$$

La présence de  $P(\frac{3}{2}, \eta_t(\vec{r}))$  au second membre de (7.11) revient à couper  $n(\vec{r})$  quand on se rapproche de la surface  $U(\vec{r}) = \epsilon_t$ . Alors que la coupure en  $\epsilon = \epsilon_t$  est brutale sur la fonction de distribution (7.1), la coupure apparaissant en (7.11) est progressive et se fait sur une zone correspondant à une variation de  $\epsilon_t - U(\vec{r})$  de quelques  $k_B T$  (voir Fig. 1)

- Notons également que, en  $\vec{r} = \vec{0}$ ,  $U(\vec{r}) = 0$  et  $\eta_t(\vec{r}) = \epsilon_t/k_B T = \eta$ , de sorte que

$$n(\vec{0}) = n_0 P\left(\frac{3}{2}, \eta\right) \quad (7.12)$$

ce qui montre bien que  $n(\vec{0}) \neq n_0$ , sauf si  $\eta \rightarrow \infty$ .

### 2.3 Volume de référence $V_e$

Au lieu de définir  $V_e$  par  $V_e = N/n(\vec{0})$  comme dans le cours V, il est plus commode mathématiquement d'utiliser  $n_0$  et de poser

$$V_e = \frac{N}{n_0} \quad (7.13)$$

- En utilisant alors  $N = z \int_0^{E_t} \rho(E) e^{-E/k_B T} dE = z \zeta(T)$  et  $z = n_0 \Lambda^3$ , on obtient, compte tenu de (7.13) et (7.6)

$$V_e = \Lambda^3 \zeta(T) = \Lambda^3 \zeta_\infty(T) P(\frac{3}{2} + \delta, \eta) \quad (7.14)$$

### 2.4 Energie interne

- Les calculs du cours V (équations 5.28 à 5.31) peuvent être répétés, moyennant le remplacement de la borne supérieure des intégrales sur  $E$ , qui passe de  $+\infty$  à  $E_t$ , et le remplacement de  $n(\vec{0})$  par  $n_0$ . On obtient ainsi pour l'énergie totale  $E$  des  $N$  atomes :

$$E = N k_B T d \ln \zeta(T) / d \ln T \quad (7.15)$$

où  $\zeta(T)$  est la nouvelle fonction de partition qui est maintenant donnée par (7.6), de sorte que

$$\ln \zeta(T) = \ln \zeta_\infty(T) + \ln P(\frac{3}{2} + \delta, \eta) \quad (7.16)$$

$P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)$  dépend de  $T$  via  $\eta = E_t/k_B T$  et contribue donc à (7.15).

- Contribution de  $\ln \zeta_\infty(T)$  à  $E$ . C'est la même que celle du cours V puisque  $\zeta_\infty(T)$  est l'expression de  $\zeta$  pour  $E_t \rightarrow \infty$ . D'après (5.43),

$$\text{Contribution de } \ln \zeta_\infty(T) \text{ à } E = N(\frac{3}{2} + \delta) k_B T \quad (7.17)$$

- Contribution de  $\ln P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)$  à  $E$ .

$$N k_B T \frac{d \ln P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)}{d \ln T} = N k_B T^2 \frac{1}{P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)} \frac{d P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)}{d \eta} \frac{d \eta}{dT} \quad (7.18)$$

Utilisons  $d\eta/dT = -E_t/k_B T^2 = -\eta/T$  et la formule (C.5) de l'appendice C qui donne  $dP(a, \eta)/d\eta$ . On obtient

$$\text{Contribution de } \ln P(\frac{3}{2} + \delta, \eta) \text{ à } E = N(\frac{3}{2} + \delta) k_B T \left[ -1 + \frac{P(\frac{5}{2} + \delta, \eta)}{P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)} \right] \quad (7.19)$$

- Il suffit alors d'ajouter (7.17) à (7.19) pour obtenir

$$E = N(\frac{3}{2} + \delta) k_B T \frac{P(\frac{5}{2} + \delta, \eta)}{P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)} = N(\frac{3}{2} + \delta) k_B T R(\frac{3}{2} + \delta, \eta) \quad (7.20)$$

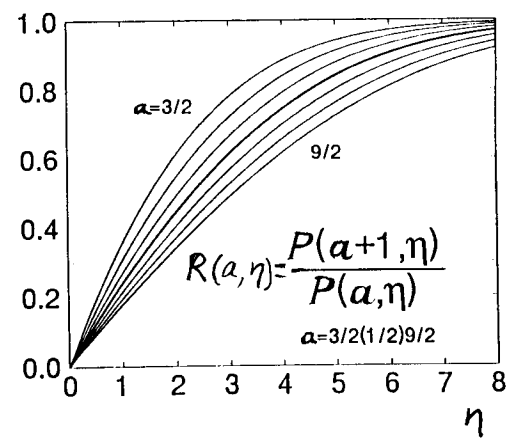
où l'on a posé

$$R(a, \eta) = \frac{P(a+1, \eta)}{P(a, \eta)} \quad (7.21)$$

- La figure 2, extraite de [1], donne les variations de  $R(a, \eta)$  avec  $\eta$  pour diverses valeurs de  $a$  variant par des sauts de  $1/2$  de  $a = 3/2$  à  $a = 9/2$ .

On voit que  $R \rightarrow 1$  si  $\eta \gg 1$  et que l'expression (7.20) tend vers la valeur asymptotique correspondant à  $\eta \rightarrow \infty$  dès que  $\eta > 8$

Fig. 2  
(extraite de [1])



- Finalement, toutes les expressions des grandeurs physiques d'équilibre établies dans le cours V, ont pu être étendues à l'état de quasi-équilibre (7.1), moyennant de faibles multiplicatifs simples faisant intervenir  $P(a, \eta)$ .

### ③ Etude des temps de pertes par évaporation

[VII-5]

#### 3-1 Nombre d'atomes s'évaporant par unité de temps

- Nous voulons calculer le nombre d'atomes arrivant par unité de temps au dessus du seuil  $E_t$  sous l'effet des collisions élastiques.

- Revenons pour cela à l'équation cinétique (6.39)

$$\rho(E_4) \dot{f}(E_4) = \frac{8\pi m \sigma}{h^3} \iiint dE_1 dE_2 dE_3 \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) [f(E_1)f(E_2) - f(E_3)f(E_4)] \rho(E_{\text{min}}) \quad (7.22)$$

et supposons que  $E_4$ , la plus grande des 4 énergies  $E_1, E_2, E_3, E_4$ , soit au dessus du seuil  $E_t$ , les 3 autres énergies  $E_1, E_2, E_3$  étant en dessous.  $\rho(E_4) \dot{f}(E_4) dE_4$  est le nombre d'atomes arrivant par unité de temps dans l'intervalle  $[E_4, E_4 + dE_4]$  sous l'effet des collisions entre 2 atomes d'énergies initiales  $E_1$  et  $E_2$ , devenant  $E_3$  et  $E_4$  après la collision. Comme  $E_3 + E_4 = E_1 + E_2$ , le milieu de  $[E_3, E_4]$

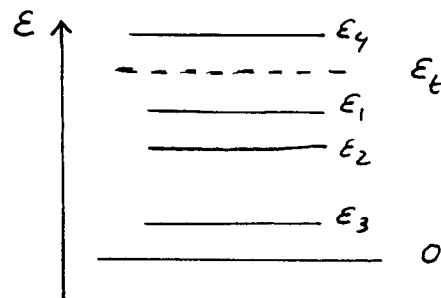


Fig. 3

est le même que celui de  $[E_1, E_2]$ , de sorte que  $E_3$  est la plus petite de 4 énergies (Fig. 3). On peut donc remplacer  $\rho(E_{\text{min}})$  par  $\rho(E_3)$  dans (7.22)

- Seul le terme d'arrivée  $f(E_1)f(E_2)$  est à considérer dans (7.22) car l'état  $E_4$  est initialement non peuplé ( $f(E_4) = 0$ ). D'autre part,  $E_1$  et  $E_2$  doivent être au dessous du seuil, sinon  $f(E_1)$  et  $f(E_2)$  seraient nuls.

- La diminution par unité de temps du nombre d'atomes piégés due à l'évaporation peut donc s'écrire :

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{ev}} = \dot{N}_{\text{ev}} = - \int_{E_t}^{\infty} dE_4 \rho(E_4) \dot{f}(E_4) \quad (7.23)$$

- Le fait que  $E_4$  doit être supérieur à  $E_t$ , alors que  $E_1, E_2, E_3$  doivent être inférieurs à  $E_t$ , introduit des contraintes sur les bornes des intégrales obtenues lorsqu'on reporte le terme en  $f(E_1)f(E_2)$  de (7.22) dans (7.23)

Fixons  $E_3$  et  $E_2$  qui doit être supérieure à  $E_3$  d'après la figure 3. Comme  $E_4$  est au moins égal à  $E_t$ ,  $E_1 = E_4 + E_3 - E_2$  est au moins égal à  $E_t + E_3 - E_2$ , qui est inférieur à  $E_t$  puisque  $E_3 - E_2 < 0$ . On en déduit que  $E_1$  varie entre  $E_t + E_3 - E_2$  et  $E_t$ . Les bornes d'intégration sont donc  $[0, E_t]$  pour  $E_3$ ,  $[E_3, E_t]$  pour  $E_2$ ,  $[E_t + E_3 - E_2, E_t]$  pour  $E_1$ .  $E_4$  n'apparaissant que dans  $\delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4)$ , l'intégrale sur  $E_4$  donne 1 et on obtient ainsi

$$\dot{N}_{\text{ev}} = - \frac{8\pi m \sigma}{h^3} \int_0^{E_t} dE_3 \int_{E_3}^{E_t} dE_2 \int_{E_t + E_3 - E_2}^{E_t} dE_1 f(E_1)f(E_2) \rho(E_3) \quad (7.24)$$

Remplaçons les  $f(E_i)$  par  $n_0 \Lambda^3 e^{-E_i/k_B T}$ . Les intégrales sur  $E_1$  et  $E_2$  sont élémentaires, et on obtient, en remplaçant  $E_3$  par  $E$

$$\dot{N}_{\text{ev}} = - \frac{8\pi m \sigma}{h^3} (n_0 \Lambda^3)^2 k_B T e^{-\eta} \left\{ \int_0^{E_t} \rho(E) \left[ e^{-E/k_B T} (E_t - E - k_B T) + k_B T e^{-\eta} \right] dE \right\} \quad (7.25)$$

- Une telle expression peut être réécrite sous la forme

$$\dot{N}_{\text{ev}} = - n_0^2 \sigma \bar{v} e^{-\eta} v_{\text{ev}} \quad (7.26)$$

VII-6/  
où

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}} \quad (7.27)$$

expression qui coïncide avec la vitesse thermique moyenne pour un gaz dans un piège de profondeur infinie et où

$$V_{ev} = \frac{\Lambda^3}{k_B T} \int_0^{E_t} \rho(\epsilon) \left[ e^{-\epsilon/k_B T} (\epsilon_t - \epsilon - k_B T) + k_B T e^{-\eta} \right] d\epsilon \quad (7.28)$$

- Utilisons  $\rho(\epsilon) = A_{PL} \epsilon^{\frac{1}{2} + \delta}$  et mettons en facteur dans (7.28) l'expression de  $\zeta_{\infty}(T) = A_{PL} (k_B T)^{\frac{3}{2} + \delta} \Gamma(\frac{3}{2} + \delta)$ . On obtient, en posant  $u = \epsilon/k_B T$

$$V_{ev} = \Lambda^3 \zeta_{\infty}(T) \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2} + \delta)} \int_0^{\eta} du u^{\frac{1}{2} + \delta} \left[ (\eta - u - 1) e^{-u} + e^{-\eta} \right] \quad (7.29)$$

L'intégrale de (7.29) peut être exprimée en fonction de fonctions gamma incomplètes (voir Appendice C et notamment l'équation C.4). On obtient

$$V_{ev} = \Lambda^3 \zeta_{\infty}(T) \left[ \eta P(\frac{3}{2} + \delta, \eta) - (\frac{5}{2} + \delta) P(\frac{5}{2} + \delta, \eta) \right] \quad (7.30)$$

- Finalement, il est commode de faire apparaître  $N$  au 2<sup>ème</sup> membre de (7.26) en utilisant  $n_0 = N/V_e$ . On obtient ainsi

$$\dot{N}_{ev} = -\Gamma_{ev} N \quad (7.31)$$

où le taux d'évaporation  $\Gamma_{ev}$  est donné par

$$\Gamma_{ev} = \frac{1}{T_{ev}} = n_0 \sigma \bar{v} e^{-\eta} \frac{V_{ev}}{V_e} \quad (7.32)$$

avec, compte tenu de (7.14), (7.21) et (7.30) :

$$\frac{V_{ev}}{V_e} = \eta - (\frac{5}{2} + \delta) \frac{P(\frac{5}{2} + \delta)}{P(\frac{3}{2} + \delta)} = \eta - (\frac{5}{2} + \delta) R(\frac{3}{2} + \delta, \eta) \quad (7.33)$$

### 3-2 Energie perdue par unité de temps à cause de l'évaporation

- Le même raisonnement que celui fait plus haut conduit à

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{ev} = \dot{E}_{ev} = - \int_{\epsilon_t}^{\infty} \epsilon_3 \rho(\epsilon_3) f(\epsilon_3) d\epsilon_3 \quad (7.34)$$

On obtient alors une intégrale triple analogue à (7.24) où  $f(\epsilon_1) f(\epsilon_2) \rho(\epsilon_3)$  est remplacé par  $\epsilon_3 f(\epsilon_1) f(\epsilon_2) \rho(\epsilon_3)$  avec  $\epsilon_3 = \epsilon_t - \epsilon_1 - \epsilon_2$ . Les intégrales sur  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont élémentaires. L'intégrale sur  $\epsilon_3$  fait apparaître des fonctions Gamma incomplètes et on obtient finalement

$$\dot{E}_{ev} = \dot{N}_{ev} \left[ \epsilon_t + \left(1 - \frac{x_{ev}}{V_{ev}}\right) k_B T \right] \quad (7.35)$$

avec

$$\frac{x_{ev}}{V_{ev}} = \frac{P(\frac{7}{2} + \delta, \eta)}{P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)} \frac{V_e}{V_{ev}} \quad (7.36)$$

- L'interprétation de (7.35) est que chaque atome qui s'évapore sort avec une énergie supérieure à  $\epsilon_t$  d'une quantité égale en moyenne à  $\left(1 - \frac{x_{ev}}{V_{ev}}\right) k_B T$ .

### 3.3 Discussion physique

#### Expression du taux d'évaporation $\Gamma_{ev}$ à la limite $\eta \gg 1$

- A la limite  $\eta \gg 1$ ,  $R(\frac{3}{2} + \delta, \eta) \approx 1$  (voir Fig. 2), de sorte que  $\Gamma_{ev}/\Gamma_{el}$  est, d'après (7.33), de l'ordre de  $\eta - (\frac{3}{2} + \delta)$ , c'est à dire de l'ordre de  $\eta$ .

- Par ailleurs, on reconnaît dans (7.32) le taux de collision élastique :

$$\Gamma_{el} = n_0 \sigma \bar{v} \tag{7.37}$$

On en déduit que 
$$\frac{\Gamma_{ev}}{\Gamma_{el}} \underset{\eta \gg 1}{\approx} \eta e^{-\eta} \tag{7.38}$$

- La décroissance de  $e^{-\eta}$  l'emporte sur celle de  $\eta$  quand  $\eta$  croît. Le taux d'évaporation décroît donc exponentiellement avec la profondeur du puits exprimée en unités de  $k_B T$ ,  $\eta = E_t / k_B T$

#### Indépendance de la forme du piège à la limite $\eta \gg 1$

- Il apparaît sur (7.38) que  $\Gamma_{ev}$  ne dépend plus de  $\delta$  à la limite  $\eta \gg 1$  et garde donc la même valeur quelle que soit la forme du piège

- L'interprétation d'un tel résultat est la suivante. Tout d'abord, l'évaporation est un phénomène local. Un atome qui s'évapore par collision au point  $\vec{r}$  doit gagner une énergie  $E_t - U(\vec{r})$  qui dépend du point  $\vec{r}$  où il se trouve. Cette évaporation est plus facile en un point  $\vec{r} \neq \vec{0}$  qu'en  $\vec{r} = \vec{0}$  par un facteur de l'ordre de  $e^{-[E_t - U(\vec{r})]/k_B T} / e^{-E_t/k_B T} = e^{U(\vec{r})/k_B T}$ . Ce gain dans la probabilité d'évaporation est cependant compensé par la diminution de la densité spatiale qui varie en  $e^{-U(\vec{r})/k_B T}$ . Le nombre d'atomes qui s'évaporent par unité de temps est donc, à la limite  $\eta \gg 1$ , indépendant de  $\vec{r}$  et c'est pourquoi  $\Gamma_{ev}$  ne dépend plus de la forme exacte de  $U(\vec{r})$ , mais seulement de la profondeur  $E_t$  du puits.

#### Interprétation de la dépendance en $\eta$ de $\Gamma_{ev}/\Gamma_{el}$

- Revenons à un gaz d'atomes piégés dans un puits de potentiel infini et considérons l'aile de la distribution d'énergie de ces atomes, au delà d'une certaine énergie  $E_t$  grande devant  $k_B T$  :  $E \gg E_t \gg k_B T$ . La proportion  $\zeta$  de ces atomes est très faible. Calculons la pour un puits de potentiel carré puisque, d'après ce qui précède, la forme exacte du puits n'est pas importante pour la valeur exacte de  $\Gamma_{ev}$  à la limite  $\eta \gg 1$ . On a

$$\zeta = \frac{\int_{v_t}^{\infty} v^2 e^{-mv^2/2k_B T} dv}{\int_0^{\infty} v^2 e^{-mv^2/2k_B T} dv} \tag{7.39}$$

avec  $mv_t^2/2 = E_t$ . Un changement simple de variable,  $u = mv^2/2k_B T$ , conduit alors au résultat suivant pour  $\zeta$  :

$$\zeta = \frac{\int_{\eta}^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du}{\int_0^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du} = 1 - P(\frac{3}{2}, \eta) \underset{\eta \gg 1}{\approx} \frac{e^{-\eta} \eta^{1/2}}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\eta} e^{-\eta} \tag{7.40}$$

On a posé  $\eta = E_t/k_B T$  et utilisé les équations C.1 et C.8 de l'Appendice C ainsi que  $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ . Pour  $\eta \gg 1$ , la proportion d'atomes dans l'aile,  $\zeta$ , est donc très faible.

- Comme  $\xi \ll 1$ , les collisions subies par les atomes dans l'aile  $E \geq E_f$  font surtout intervenir des atomes d'énergie beaucoup plus faible, de l'ordre de  $k_B T$ . La plupart de ces collisions font donc sortir les atomes de l'aile  $E \geq E_f$ , puisque les atomes correspondants cèdent une grande partie de leur énergie aux atomes lents avec lesquels ils entrent en collision. Au cours d'une telle collision, la vitesse relative entre l'atome  $E \geq E_f$  et l'atome  $E \approx k_B T$  est de l'ordre de  $\bar{v} \sqrt{E_f/k_B T} = \bar{v} \sqrt{\eta}$ . Le temps des collisions qui dépassent l'aile  $E \geq E_f$  est donc de l'ordre de  $n_0 \sigma \bar{v} \sqrt{\eta} = \Gamma_{el} \sqrt{\eta}$  (on néglige, comme dans l'équation cinétique, toute variation de  $\sigma$  avec l'énergie). Le nombre d'atomes quittant par unité de temps l'aile  $E \geq E_f$  est donc de l'ordre de  $N \xi \Gamma_{el} \sqrt{\eta}$ .

Par argument de bilan détaillé dans l'état d'équilibre, ce nombre d'atomes est compensé par ceux qui arrivent par collisions dans l'aile  $E \geq E_f$  en portant d'énergies plus basses.

- Considérons maintenant un puits de profondeur finie  $E_f$ . Il semble raisonnable de penser que le nombre d'atomes arrivant, par unité de temps, à acquérir une énergie supérieure à  $E_f$  sous l'effet de collisions, et donc à s'évaporer, est du même ordre de grandeur que le nombre d'atomes qui, dans un puits infini, arrivent dans l'aile  $E \geq E_f$ . On déduit alors d'un tel raisonnement que

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{ev} \underset{\eta \gg 1}{\approx} - N \xi \Gamma_{el} \sqrt{\eta} \approx - N \Gamma_{el} \frac{2}{\pi} \eta e^{-\eta} \quad (7.41)$$

On retrouve ainsi la dépendance en  $\eta e^{-\eta}$  de  $\Gamma_{ev}$ .

- Le calcul présenté dans le § 3.1 a l'avantage de justifier rigoureusement un tel résultat et de donner l'expression exacte du facteur  $V_{ev}/V_e$  multipliant  $e^{-\eta}$ , facteur qui ne se réduit à  $\eta$  que pour  $\eta \gg 1$  et qui en diffère de manière notable pour les valeurs de  $\eta$  couramment utilisées dans les expériences.

### Energie moyenne des atomes qui s'évaporent

- Nous avons déjà mentionné plus haut que les atomes qui s'évaporent quittent le puits avec une énergie moyenne située à  $(1 - \frac{X_{ev}}{V_{ev}}) k_B T$  au dessus du seuil  $E_f$ . Quand  $\eta \gg 1$ ,  $V_{ev}/V_e \approx \eta$ ,  $P(\frac{7}{2} + \delta, \eta) / P(\frac{3}{2} + \delta, \eta) \approx 1$ , de sorte que  $X_{ev}/V_{ev} \approx 1/\eta \ll 1$ . On en déduit que

$$\left(1 - \frac{X_{ev}}{V_{ev}}\right) k_B T \underset{\eta \gg 1}{\approx} k_B T \quad (7.42)$$

- Le facteur  $1 - \frac{X_{ev}}{V_{ev}}$  n'est autre que le facteur  $\kappa$  introduit de manière phénoménologique dans le cours  $V$  (§ 3.2). Le calcul présenté ici en donne une expression analytique valable pour tout  $\eta$ .

## ④ Autres mécanismes de pertes

### 4-1 Pertes dues aux collisions inélastiques

- Soit  $\Gamma_{inel}$  le taux correspondant

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{inel} = - \Gamma_{inel} N \quad (7.43)$$



Nous incluons également dans ces pertes, les transitions de VII-9 Majorana qui, comme les collisions inélastiques, font passer l'atome dans un niveau non piégé.

- Pour les alcalins,  $n_0$  est très faible, et les collisions inélastiques font en général intervenir les atomes du gaz résiduel, autres que les atomes piégés, de sorte que  $\Gamma_{inél}$  est indépendant de  $n_0$ . Par contre, pour l'hydrogène,  $n_0$  est plus élevé, et les collisions inélastiques se font entre atomes d'hydrogènes piégés de sorte que  $\Gamma_{inél} \propto n_0$ .

#### 4-2 Pertes de déversement ("spilling")

##### Origine physique

- Pour éviter que  $\Gamma_{ev}$  ne devienne trop faible quand  $T$  diminue et que  $\eta$  croît, on abaisse en général le seuil  $E_t$  au fur et à mesure que  $T$  décroît. Soit

$$\frac{1}{\tau_{tramp}} = - \frac{\dot{E}_t}{E_t} \quad (7.44)$$

un paramètre décrivant la vitesse à laquelle on abaisse  $E_t$ .

- En procédant ainsi, on laisse s'échapper les atomes d'énergie voisine de  $E_t$ . Le nombre de tels atomes s'échappant par unité de temps vaut :

$$\dot{N}_t = \rho(E_t) f(E_t) \dot{E}_t = - \frac{1}{\tau_{tramp}} \rho(E_t) f(E_t) E_t \quad (7.45)$$

Cette perte d'atomes ne fait intervenir aucune collision. Les atomes  $E < E_t$  restent inaffectés et gardent la même température effective.

##### Calcul du temps de perte correspondant

$$\rho(E_t) f(E_t) E_t = A_{PL} E_t^{\frac{3}{2} + \delta} n_0 \Lambda^3 e^{-\eta} \quad (7.46)$$

Mettons en facteur, au second membre de (7.46),  $\xi_{\infty}(T) = A_{PL} (k_B T)^{\frac{3}{2} + \delta} \Gamma(\frac{3}{2} + \delta)$ . On obtient, compte tenu de l'équation (C.4) de l'appendice C :

$$\rho(E_t) f(E_t) E_t = \xi_{\infty}(T) \frac{\eta^{\frac{3}{2} + \delta} e^{-\eta}}{\Gamma(\frac{3}{2} + \delta)} n_0 \Lambda^3 = \left(\frac{3}{2} + \delta\right) \left[ P\left(\frac{3}{2} + \delta, \eta\right) - P\left(\frac{5}{2} + \delta, \eta\right) \right] \xi_{\infty}(T) n_0 \Lambda^3 \quad (7.47)$$

- Reportons (7.47) dans (7.45) et faisons apparaître  $N = n_0 V_e = n_0 \Lambda^3 \xi_{\infty}(T) P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)$  (voir Eq. 7.14). On obtient

$$\dot{N}_t = - \Gamma_t N \quad (7.48)$$

avec 
$$\Gamma_t = \frac{1}{\tau_{tramp}} \tilde{\xi} \quad (7.49)$$

et 
$$\tilde{\xi} = \left(\frac{3}{2} + \delta\right) \left[ 1 - \frac{P(\frac{5}{2} + \delta, \eta)}{P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)} \right] = \left(\frac{3}{2} + \delta\right) \left[ 1 - R(\frac{3}{2} + \delta, \eta) \right] \quad (7.50)$$

$\tilde{\xi}$  est appelé paramètre de déversement.

##### Références

- 1 - O.J. Luiten, M.W. Reynolds, J.T.M. Walraven, Phys. Rev. A53, 381 (1996)
- 2 - M. Abramowitz, I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover (1965)
- 3 - J.T.M. Walraven in "Quantum Dynamics of Simple Systems", Proceedings of the 44th. Scottish Universities Summer School, Stirling (1996)
- 4 - W. Ketterle, N.J. van Druten, in "Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics", Vol 36 (1996) ed. by B. Bederson and H. Walther

Fonctions Gamma incomplètes [2][3]

Définition 
$$P(a, \eta) = \frac{\int_0^\eta u^{a-1} e^{-u} du}{\int_0^\infty u^{a-1} e^{-u} du} = \frac{\int_0^\eta u^{a-1} e^{-u} du}{\Gamma(a)} \quad (C.1)$$

Relation de récurrence

- Par intégration par parties, on obtient

$$\int_0^\eta u^{a-1} e^{-u} du = \frac{\eta^a e^{-\eta}}{a} + \frac{1}{a} \int_0^\eta u^a e^{-u} du \quad (C.2)$$

qui devient pour  $\eta = \infty$

$$\Gamma(a+1) = a \Gamma(a) \quad (C.3)$$

- De (C.2) et (C.3), on déduit compte tenu de (C.1)

$$\frac{\eta^a e^{-\eta}}{a \Gamma(a)} = P(a, \eta) - P(a+1, \eta) \quad (C.4)$$

- Par ailleurs, d'après (C.1),  $\partial P(a, \eta) / \partial \eta = \eta^{a-1} e^{-\eta} / \Gamma(a)$ , de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial \eta} P(a, \eta) = \frac{a}{\eta} [P(a, \eta) - P(a+1, \eta)] \quad (C.5)$$

Développement en puissances de  $1/\eta$ 

- D'après C.1 
$$P(a, \eta) = 1 - \frac{\int_\eta^\infty u^{a-1} e^{-u} du}{\Gamma(a)} \quad (C.6)$$

- Par intégration par parties, on obtient

$$\int_\eta^\infty u^{a-1} e^{-u} du = \eta^{a-1} e^{-\eta} + (a-1) \int_\eta^\infty u^{a-2} e^{-u} du \quad (C.7)$$

- En itérant (C.8) et en reportant le développement obtenu dans (C.6), on obtient

$$P(a, \eta) = 1 - e^{-\eta} \frac{\eta^{a-1}}{\Gamma(a)} \left[ 1 + \frac{a-1}{\eta} + \frac{(a-1)(a-2)}{\eta^2} + \dots \right] \quad (C.8)$$

Autres relations utiles (extraites de l'Appendice de [3])

$$P(a, \eta) = e^{-\eta} \eta^a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta^m}{\Gamma(m+a+1)} \quad (C.9)$$

$a$  entier  $\rightarrow$  
$$P(a, \eta) = 1 - e^{-\eta} \sum_{m=0}^{a-1} \frac{\eta^m}{m!} \quad (C.10)$$

$$R(a, \eta) \equiv \frac{P(a+1, \eta)}{P(a, \eta)} = 1 - e^{-\eta} \frac{\eta^a}{\Gamma(a+1)} \frac{1}{P(a, \eta)} \quad (C.11)$$

$$\frac{1}{R(a, \eta)} = 1 + \frac{a+1}{\eta} [1 - R(a+1, \eta)] \quad (C.12)$$

$$\frac{\partial R(a, \eta)}{\partial \eta} = \frac{R(a, \eta)}{\eta} [1 + a R(a, \eta) - (a+1) R(a+1, \eta)] \quad (C.13)$$