

B - Piège magnétostatique quadrupolaire

① Configuration de courants

- 2 bobines circulaires de même rayon R , de même axe Oz , avec des centres situés en $z = +A$ et $z = -A$, parcourues par des courants opposés I et $-I$ supposés indépendants du temps (Fig. 9a)

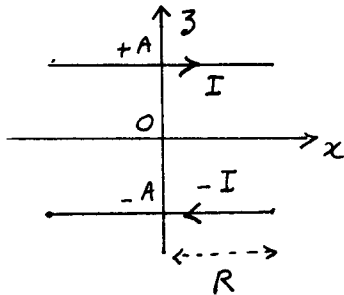


Fig. 9a

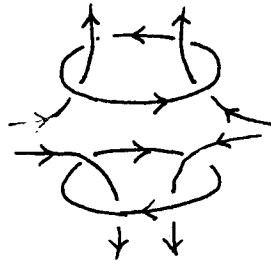


Fig. 9b

- Allure des lignes de champ (Fig. 9b). Le champ est nul au centre par symétrie et son module croît quand on s'éloigne du centre.
- Une formule utile : Composante suivant Oz du champ créé par la bobine en $z = +A$ de la figure 9a en un point de l'axe z

$$B_z(z, \rho=0) = \mu_0 I \frac{R^2}{2[R^2 + (A-z)^2]^{3/2}} \quad (3.1)$$

- Le but de ce § B est de calculer les caractéristiques du piège magnétostatique associé à la configuration de champ de la figure 9, puis de discuter les avantages et les inconvénients d'un tel piège, ainsi que certaines méthodes qui ont été proposées et démontrées pour remédier à ces inconvénients.

② Développement multipolaire des champs créé par des bobines d'axe Oz

- Comme $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}$ (en dehors des courants supposés statiques), on a

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \phi \quad (3.2)$$

où ϕ est un potentiel scalaire. L'équation $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ entraîne que :

$$\Delta \phi = 0 \quad (3.3)$$

- On peut donc développer ϕ sur les polynômes harmoniques $r^L Y_L^M(\theta, \varphi)$

$$\phi = \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^{+L} C_{LM} r^L Y_L^M(\theta, \varphi) \quad (3.4)$$

Comme nous nous limitons ici au champ créé par des bobines d'axe Oz , le potentiel ϕ est invariant par rotations autour de Oz et ne dépend donc pas de l'angle azimutal φ . Par ailleurs, la dépendance en φ de $Y_L^M(\theta, \varphi)$ est en $e^{iM\varphi}$. On en déduit que seuls les termes $M=0$ de (3.4) sont non nuls

$$\phi(r, \theta) = \sum_{L=0}^{\infty} C_L r^L Y_L^0(\theta) \quad (3.5)$$

- L'harmonique sphérique $Y_L^0(\theta)$ est proportionnelle au polynôme de Legendre $P_L(\cos \theta)$. Nous donnons ci-dessous, en coordonnées cylindriques (z, ρ, φ) , l'expression des polynômes $r^L Y_L^0(\theta)$ pour $L=0, 1, 2, 3$: (voir Ref. [21]). La normalisation est choisie pour que le coefficient des

III-2) terme de puissance la plus élevée en z soit 1

$$r^L Y_L^0(\theta) \propto \begin{cases} 1 & \text{pour } L=0 \\ z & \text{pour } L=1 \\ z^2 - \frac{\rho^2}{2} & \text{pour } L=2 \\ z^3 - \frac{3}{2}\rho^2 z & \text{pour } L=3 \end{cases} \quad (3.6)$$

- En reportant (3.6) dans l'équation (3.2), on obtient l'expression des champs multipolaires $\vec{B}_0, \vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ correspondant à $L=0, 1, 2, 3$

$$\begin{cases} \vec{B}_0 = \vec{0} \\ \vec{B}_2 = 2z\hat{z} - \rho\hat{\rho} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{B}_1 = \hat{z} \\ \vec{B}_3 = 3\left(z^2 - \frac{\rho^2}{2}\right)\hat{z} - 3\rho z\hat{\rho} \end{cases} \quad (3.7)$$

où \hat{z} et $\hat{\rho}$ sont les vecteurs unitaires le long des directions z et ρ .

③ Expression du champ quadripolaire

- D'après ce qui précède, le champ créé, au voisinage de l'origine O , par des bobines d'axe Oz peut s'écrire

$$\vec{B} = b_1 \vec{B}_1 + b_2 \vec{B}_2 + b_3 \vec{B}_3 + \dots \quad (3.8)$$

où les b_i sont des coefficients et les \vec{B}_i sont donnés en (3.7)

- Revenons au champ quadripolaire de la figure 9. Une réflexion par rapport à l'origine change I en $-I$. Le champ \vec{B} créé par une telle configuration de courant est donc impair dans une telle réflexion. Comme la parité de $Y_L^0(\theta)$ est $(-1)^L$ et que \vec{B}_2 est le gradient de $r^L Y_L^0(\theta)$, on en déduit que seuls les L pairs apparaissent dans le développement (3.8)

$$\vec{B} = b_2 \vec{B}_2 + b_4 \vec{B}_4 + \dots \quad (3.9)$$

- Si on se limite au terme d'ordre le plus bas dans (3.9) et qu'on utilise (3.7) on obtient pour les composantes du champ en coordonnées cylindriques

$$B_z = 2bz \quad B_\rho = -b\rho \quad B_\varphi = 0 \quad (3.10)$$

où b est une constante que l'on peut calculer en développant l'expression (3.1) au voisinage de $z=0$ et en sommant les contributions des 2 bobines de la figure (9.a). On obtient ainsi

$$b = \frac{3}{2} \mu_0 I \frac{AR^2}{(A^2 + R^2)^{5/2}} \quad (3.11)$$

Un tel champ est appelé quadripolaire car il correspond à $L=2$

- Le module du champ (3.10) vaut

$$\begin{aligned} |\vec{B}| &= b \sqrt{4z^2 + \rho^2} = br \sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta} \\ &= br \sqrt{3\cos^2\theta + 1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Le long d'une droite passant par l'origine, $|\vec{B}|$ croît linéairement avec la distance à l'origine r , avec un coefficient qui dépend de l'angle θ .

- Le module (3.12) de $|\vec{B}|$ a clairement un minimum à l'origine. Il est donc possible (à la limite adiabatique) de piéger dans un tel champ des atomes dont l'énergie Zeeman croît avec $|\vec{B}|$ ("low-field seekers" - Voir Fig. 1 et discussion du § A 3 du cours II). Si μ est le moment magnétique de tels atomes, le potentiel de piégeage $W = \mu |\vec{B}|$ vaut donc

$$W = \mu |\vec{B}| = \mu b \sqrt{4z^2 + \rho^2} = \mu b r \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1} \quad (3.13)$$

- Ordre de grandeur des profondeurs de puits : Si $|\vec{B}|$ varie de $B_0 = 200$ gauss entre le minimum de $|\vec{B}|$ et la valeur de $|\vec{B}|$ à l'extérieur du puits, l'équation $\mu B_0 = k_B T$ donne pour $\mu = 1$ magnéton de Bohr, $T \approx 13$ mK. Seuls des atomes prérefroidis peuvent être piégés.

- Les expressions (3.12) et (3.13) ne sont valables qu'au voisinage immédiat de l'origine. On peut, comme dans la référence [21], calculer les termes suivants du développement (3.9). Le rayon de convergence de la série est cependant fini et un calcul exact de $|\vec{B}|$ devient nécessaire loin du centre. La figure (10) donne par exemple les lignes de contours de $|\vec{B}|$ (lignes d'égalité valeurs de $|\vec{B}|$) obtenues à partir d'un calcul exact [ref (21)]. Quand on se déplace le long de Oz à partir de 0, $|\vec{B}|$ croît passe par un maximum, puis décroît. Il en est de même lorsqu'on se déplace le long de Ox . Ces 2 maxima donnent les hauteurs des barrières de potentiel le long de Oz et Ox . La figure 10 est tracé dans le cas où ces 2 hauteurs sont égales, ce qui est réalisé quand

$$A/R = 0.6267$$

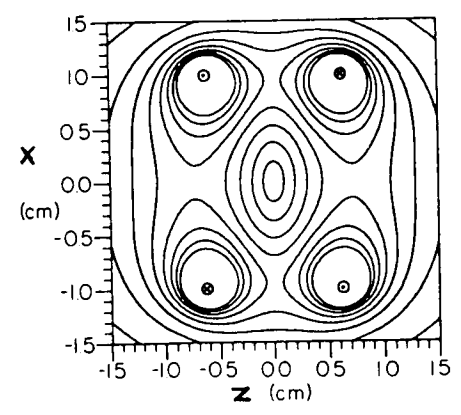


Fig. 10 (extraite de [21])

4) Un autre exemple de configuration

- On peut également réaliser des configurations où seuls les termes L impair du développement (3.8) sont non nuls. Le champ \vec{B} est alors pair par réflexion par rapport à l'origine [$r^L Y_L^0(\theta)$ est impair si L est impair et son gradient est pair].

- Une telle situation est réalisée par exemple si l'on prend 3 bobines de même axe Oz (Fig. 11). La 1^{ère} bobine, dans le plan xOy , est parcourue par un courant I . Les 2 autres bobines, de même rayon, sont disposées symétriquement par rapport à la 1^{ère} et sont parcourues par le même courant I' . En choisissant des sens opposés pour I et I' et en ajustant le rapport $|I/I'|$, on peut annuler le terme $b_1 \vec{B}_1$ de (3.8) et obtenir un champ qui, à l'ordre le plus bas, se réduit au champ octupolaire \vec{B}_3 de (3.7)

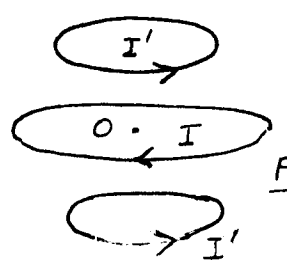


Fig. 11

- On a alors pour les composantes de \vec{B} en coordonnées cylindriques

$$B_z = b(z^2 - \frac{\rho^2}{2}) \quad B_\rho = -b\rho z \quad B_\varphi = 0 \quad (3.14)$$

ou $b = 3b_3$ est un coefficient. le module $|\vec{B}|$ de \vec{B} vaut

$$|\vec{B}| = b [z^4 + \frac{\rho^4}{4}]^{1/2} = br^2 [\cos^4\theta + \frac{\sin^4\theta}{4}]^{1/2} \quad (3.15)$$

le long d'une droite passant par 0, $|\vec{B}|$ croit quadratiquement avec r , avec un coefficient qui dépend de l'angle θ .

Remarques

- (i) Les 3 bobines de la figure 11 peuvent avoir même rayon et être enroulées sur le même cylindre.
- (ii) Le terme $L=1$ de (3.8) peut être nul si les 3 bobines de la figure 11 sont sur une même sphère de rayon S , les latitudes des 2 bobines extrêmes valant $+\pi/4$ et $-\pi/4$.
Le coefficient b de (3.14) vaut alors $b = 15\mu_0 I / 8S^3$ (ref [21]).

5) Pertes dues aux transitions de Majorana

Existence de transitions non adiabatiques

- Revenons au piège quadrupolaire et considérons une trajectoire rectiligne le long de Ox . D'après (3.10), le champ décroît quand on s'approche de 0, s'annule et change de signe [flèches simples de la figure 12]

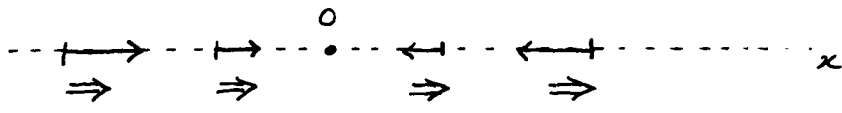


Fig. 12

Le spin (arrivant de la gauche) et initialement orienté le long du champ ne peut pas basculer lorsque l'atome passe en 0 et que le champ change de signe. Il se retrouve alors dans un état antiparallèle au champ et donc non piégeant [flèches doubles de la Fig. 12]

- Par contre, si l'atome passe suffisamment loin de 0, le champ qu'il "voit" ne s'annule pas. Il tourne en passant par une valeur minimale B_{min} . Si la fréquence de Larmor Ω_L autour de B_{min} est grande devant la fréquence de rotation apparente du champ Ω_R , le spin reste orienté le long du champ et l'expression (3.13) du potentiel de piégeage est valable

- les transitions non adiabatiques qui apparaissent entre états de spins piégeants et non piégeants lorsque la condition $\Omega_L \gg \Omega_R$ n'est pas vérifiée sont appelées "transitions de Majorana" et introduisent des fuites hors du piège avec un temps $1/\tau_0$ dont nous calculons maintenant un ordre de grandeur.

Ordre de grandeur des temps de fuite. (ref. [22])

- Evaluons tout d'abord un ordre de grandeur de la vitesse de rotation Ω_R du champ vu par un atome, de masse m , de moment magnétique μ , passant à la vitesse v à une distance minimale a du centre 0 du piège (Fig. 13)

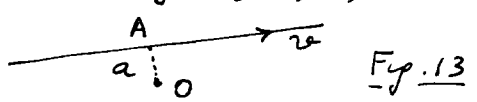


Fig. 13

- L'angle dont tourne le champ "vu" est de l'ordre de 1 quand l'atome se déplace sur une distance de l'ordre de a au voisinage de son point d'approche minimale A. On a donc

$$\Omega_R \sim \frac{1}{a/v} = \frac{v}{a} \quad (3.16) \quad \text{III-5}$$

- D'après les résultats du § 3 ci-dessus, le module de \vec{B} au point A est de l'ordre de $B'a$, où B' est le gradient de champ. La fréquence de Larmor minimale Ω_L est donc de l'ordre de

$$\Omega_L \sim \frac{1}{\hbar} \mu B'a \quad (3.17)$$

- Les transitions non adiabatiques deviennent importantes quand $\Omega_L \sim \Omega_R$, c'est à dire quand a est de l'ordre de ou inférieur à a_0 , où a_0 est la valeur de a pour laquelle $\Omega_L = \Omega_R$

$$a_0 \sim \sqrt{\frac{\hbar v}{\mu B'}} \quad (3.18)$$

Tout atome de vitesse v arrivant dans une sphère de rayon a_0 autour de O sera donc perdu (en réalité, il s'agit plutôt d'un ellipsoïde car les gradients ne sont pas les mêmes sur les deux axes)

- Calculons l'ordre de grandeur du flux d'atomes traversant une telle sphère. On suppose qu'il y a N atomes piégés dans un volume l^3 , où l est la taille du piège. Un tel flux F , qui est égal au nombre d'atomes perdus par unité de temps $-dN/dt$, est de l'ordre de

$$F = -\frac{dN}{dt} \sim \frac{N}{l^3} v a_0^2 \quad (3.19)$$

En combinant (3.18) et (3.19), on obtient $dN/dt \sim -N/\tau_0$ où

$$\frac{1}{\tau_0} \sim \frac{1}{l^3} \frac{\hbar v^2}{\mu B'} \quad (3.20)$$

- On peut encore transformer une telle expression du temps de perte $1/\tau_0$ en reliant v et l par le raisonnement suivant. A l'extrémité du piège, le champ vaut $B'l$, puisque l est la taille du piège, et l'énergie, essentiellement potentielle, est de l'ordre de $\mu B'l$. Cette énergie potentielle se transforme en énergie cinétique quand les atomes se rapprochent de O , de sorte que leur vitesse v au point d'approche minimale est donnée par

$$m v^2 \sim \mu B'l \quad (3.21)$$

En reportant (3.21) dans (3.20), on obtient alors

$$\tau_0 \sim \frac{m}{\hbar} l^2 \quad (3.22)$$

A cause des transitions de Majorana, les atomes ne peuvent donc rester piégés que pendant un temps τ_0 , d'autant plus court que la taille l du piège est plus petite.

- De telles fuites sont très gênantes pour l'efficacité du refroidissement évaporatif. Quand un tel refroidissement commence, $m v^2$ diminue, et les atomes se concentrent dans un volume l^3 autour de O qui, d'après (3.21), est de plus en plus petit. Mais d'après (3.22), le temps de vie est de plus en plus court et empêche la densité spatiale des atomes d'augmenter.

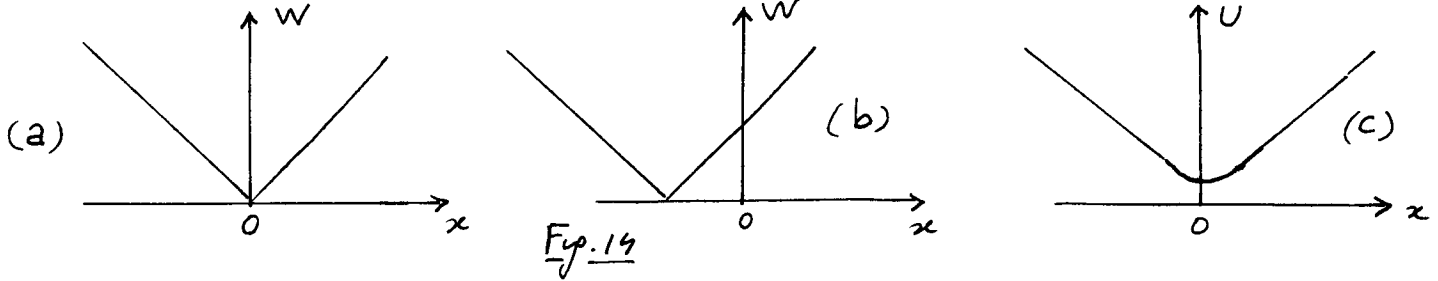
- Ordres de grandeur. Pour ^{87}Rb , $m/\hbar \sim 10^5 \text{ s/cm}^2$.

Pour un piège de $200 \mu\text{m} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$, on obtient d'après (3.22) une durée de vie de l'ordre de 40 s .

⑥ Le piège TOP ("Time-averaged Orbiting Potential - Ref. [22])

Motivations - Idée générale

- Le but poursuivi est de réduire les pertes dues aux transitions de Majorana en supprimant le zéro de champ au centre du piège.
- L'idée, mise en oeuvre dans la référence [22], consiste à ajouter un champ uniforme \vec{B}_b le long de Ox , le potentiel de piège, qui était de forme triangulaire et centré en $x=0$ (Fig. 14 a) est alors déplacé le long de Ox en gardant la même forme (Fig. 14 b). On fait tourner le champ \vec{B}_b dans le plan xOy à une vitesse angulaire ω_b , suffisamment rapide devant la fréquence du mouvement orbital des atomes dans le piège pour que ces atomes voient un potentiel effectif moyen, et suffisamment lente devant la fréquence de Larmor du spin des atomes piégés pour que ces spins puissent suivre adiabatiquement la rotation du champ (Nous reviendrons plus loin sur les conditions de validité de ces approximations) Nous allons voir que le potentiel effectif moyen n'a alors plus de zéro en $\vec{r}=\vec{0}$ et qu'il est harmonique au voisinage du centre (Fig. 14 c)



- L'idée générale est donc de faire tourner le zéro du piège quadrupolaire suffisamment loin du centre O du piège et suffisamment rapidement pour que les atomes ne tombent plus dans le "trou".

Calcul du potentiel effectif moyen

- Les composantes cartésiennes du champ quadrupolaire valent, d'après (3.10)

$$B_x = -B'x \quad B_y = -B'y \quad B_z = 2B'z \quad (3.23)$$

où $B' = b$ est le gradient de champ suivant Ox et Oy , 2 fois plus petit que le gradient suivant Oz et de signe opposé.

- Les composantes cartésiennes du champ d'amplitude B_b tournant à la fréquence ω_b autour de Oz sont égales à

$$B_b \cos \omega_b t \quad B_b \sin \omega_b t \quad 0 \quad (3.24)$$

- Le potentiel de piège $W(x, y, z, t)$ est le produit du moment magnétique μ par le module du champ magnétique total

$$W(x, y, z, t) = \mu \left[(B_b \cos \omega_b t - B'x)^2 + (B_b \sin \omega_b t - B'y)^2 + 4B'^2 z^2 \right]^{1/2}$$

$$= \mu B_b \left[1 + (x^2 + y^2 + 4z^2) \frac{B'^2}{B_b^2} - 2x \frac{B'}{B_b} \cos \omega_b t - 2y \frac{B'}{B_b} \sin \omega_b t \right]^{1/2} \quad (3.25)$$

- Le développement de (3.25) à l'ordre 2 inclus en x, y, z donne alors :

$$W(x, y, z, t) = -\mu B_b - \mu \frac{B'^2}{2B_b} (x^2 + y^2 + 4z^2) + \mu \frac{B'^2}{8B_b} (4x^2 \cos^2 \omega_b t + 4y^2 \sin^2 \omega_b t) \quad (3.26)$$

En moyennant (3.26) sur le temps, on obtient finalement pour le potentiel effectif moyen

$$V(x, y, z) = -\mu B_b - \mu \frac{B'^2}{4B_b} (\rho^2 + 8z^2) \quad (3.27)$$

L'allure de ce potentiel est représentée sur la figure (14c). Il n'est plus nul en 0 et varie paraboliquement le long de l'axe Oz et des axes perpendiculaires à Oz. La courbure en 0 est inversement proportionnelle au champ B_b .

Conditions de validité des approximations

- Les fréquences du mouvement d'un atome dans un piège quadrupolaire sont de l'ordre d'une centaine de Hz. Il est donc facile de réaliser un champ tournant à une fréquence ω_b beaucoup plus élevée (quelques KHz), de manière que l'atome se déplace peu pendant une période $2\pi/\omega_b$ du champ tournant et qu'il ne soit sensible qu'à la moyenne temporelle du potentiel (3.25).
- Etudions maintenant à quelles conditions le spin peut suivre adiabatiquement le champ tournant.

Considérons tout d'abord un atome au centre du piège. Comme le champ quadrupolaire est nul, l'atome ne voit que le champ tournant. Si l'on se place dans le référentiel tournant à la fréquence ω_b , le spin voit un champ transverse fixe, d'amplitude B_b , et un champ inertiel vertical $\frac{\omega_b}{\gamma} \hat{z}$ dû à la rotation (γ est le rapport gyromagnétique), beaucoup plus petit que le précédent, si ω_b est petit devant la fréquence de Larmor $\omega_L = B_b/\gamma$ autour de B_b . Si le spin est orienté le long du champ total dans le référentiel tournant, champ qui est constant, il reste orienté le long de ce champ au cours du temps. Dans le référentiel du laboratoire, le spin tourne à la fréquence ω_b en restant pratiquement parallèle au champ tournant si $\omega_b \ll \omega_L$.

Considérons maintenant un point à une distance ρ de 0 dans le plan xOy . Le champ quadrupolaire est fixe et vaut en ce point $-B'\rho$. Il s'y ajoute le champ tournant. Si $B'\rho < B_b$, le champ total vu par l'atome oscille à la fréquence ω_b entre une valeur maximale $B_b + B'\rho$ et une valeur minimale $B_b - B'\rho$. Si la fréquence de Larmor autour du champ minimal n'est pas assez grande devant ω_b , le spin ne pourra plus suivre adiabatiquement le champ et l'expression (3.27) ne sera plus valable. En particulier, si $\rho = \rho_0$, où ρ_0 est donné par

$$B_b = B'\rho_0 \quad (3.28)$$

le champ total vu par le spin s'annule à certains instants et l'approximation adiabatique pour le spin ne sera certainement plus valable. Les conditions de validité de l'approximation

adiabatique sont donc

$$\omega_b \ll \omega_L \quad (a)$$

$$\rho \ll \rho_0 \quad (b) \quad (3.29)$$

Avec des champs tournants de l'ordre de 10 gauss, on obtient des fréquences de Larmor de l'ordre de 10 MHz, c-à-d grandes devant ω_b . Par ailleurs, avec des gradients de champ de l'ordre d'une centaine de Gauss/cm, ρ_0 est, d'après (3.28), de l'ordre de 1 mm et est suffisamment grand devant la taille du piège, de l'ordre d'une fraction de mm.

Discussion physique

- L'intérêt du piège quadropolaire est d'avoir des parois qui varient linéairement avec z et ρ . Il est donc plus confinant pour les atomes qu'un piège parabolique. Pour le voir de manière plus précise, considérons l'ordre de grandeur du gradient de champ B' et de la courbure B'' du champ créé par une bobine de rayon R_c . Soit B_0 le champ au centre de cette bobine

$$B' \approx \frac{B_0}{R_c} \quad (a) \quad B'' \approx \frac{B_0}{R_c^2} = \frac{B'}{R_c} \quad (b) \quad (3.30)$$

Soient l_1 (et l_2) les dimensions d'un nuage d'atomes de température T confinés dans un piège linéaire (et parabolique). On a

$$\mu \frac{B_0}{R_c} l_1 \approx k_B T \quad \mu \frac{B_0}{R_c^2} l_2^2 \approx k_B T \quad (3.31)$$

On en déduit

$$l_1 \approx l_2 \left(\frac{l_2}{R_c} \right) \ll l_2 \quad (3.32)$$

car l_2 est très petit devant R_c .

- En fait, comme nous l'avons vu plus haut au § 5, la présence du zéro en $\vec{r} = \vec{0}$ dans le piège quadropolaire introduit des pertes de plus en plus élevées quand $l_1 \rightarrow 0$. La solution du TOP étudié dans ce paragraphe élimine cette difficulté, mais remplace le piège linéaire par un piège parabolique. Montrons cependant que la courbure du TOP est plus élevée que celle d'un piège parabolique satisfaisant (3.30.b). L'équation (3.27) montre en effet que la courbure du TOP est, compte tenu de (3.28) donnée par

$$(B'')_{\text{TOP}} \approx \frac{B'^2}{B_b} \approx \frac{B'}{\rho_0} \quad (3.33)$$

Elle est donc R_c/ρ_0 fois plus grande que la courbure d'un piège parabolique ordinaire. En effet, ρ_0 peut être plus grand que la taille l du piège, pour satisfaire à (3.29.b), tout en étant très petit devant R_c , puisque $R_c \gg l$.

Etude expérimentale

- Le 1^{er} piège pour atomes neutres a été réalisé en 1985 au NIST Gaithersburg sur des atomes de sodium (Ref [23]). C'est un piège quadropolaire. La durée de piégeage des atomes, de l'ordre de 1 s, était limitée, non pas par les transitions non adiabatiques

de Majorana, mais par les collisions avec le gaz résiduel.

- La référence [22] présente la 1^{ère} étude des pertes dues aux transitions de Majorana.

Voir par exemple la figure 15 qui donne l'évolution du temps τ de piégeage avec la taille du piège. Les triangles correspondent à un piège quadropolaire et sont en accord avec les prédictions théoriques (ligne en pointillé) déduites de (3.22) et incluant l'effet des collisions avec le gaz résiduel. La transformation du piège quadropolaire en TOP fait disparaître en grande partie les transitions de Majorana et allonge considérablement τ (ronds de la figure)

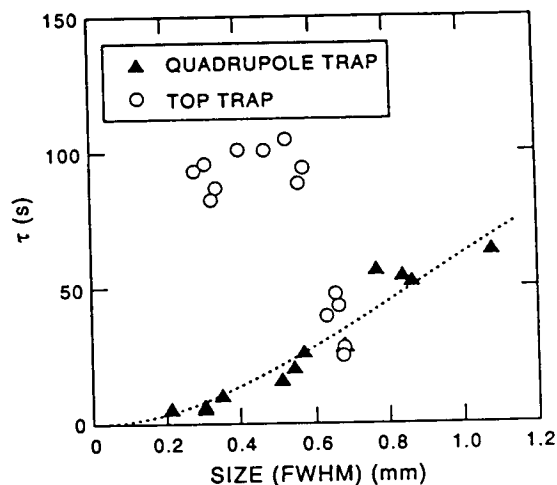


Fig. 15 (extraite de [22])

Une autre solution possible : Le "bouchon optique" (ref. [24])

Une autre solution pour éliminer le zéro du piège quadropolaire en $\vec{r} = \vec{0}$ consiste à ajouter un faisceau laser focalisé en $\vec{r} = \vec{0}$ et désaccordé vers le bleu, de manière à repousser les atomes et à les empêcher d'arriver en $\vec{r} = \vec{0}$. On "bouche" en quelque sorte le trou du piège avec un potentiel optique répulsif.

Références (suite de la page II-9)

21 - T. Bergeman, G. Erez, H. Metcalf, Phys. Rev. A 35, 1535 (1987)
 22 - W. Petrich, M. Anderson, J. Ensher, E. Cornell, Phys. Rev. Lett. 74, 3352 (1995)
 23 - A. Migdall, J. Prodan, W. Phillips, T. Bergeman, H. Metcalf Phys. Rev. Lett. 54, 2596 (1985)
 24 - K. Davis, M. Mewes, M. Andrews, N. van Druten, D. Durfee, D. Kurn, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. 75, 3969 (1995)