

COLLÈGE DE FRANCE

COURS DE PHYSIQUE

ATOMIQUE ET MOLÉCULAIRE

Claude COHEN-TANNOUJJI

ANNÉE SCOLAIRE : 1996 - 1997

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE	I-1
Résumé du cours 1995-1996	I-1
Introduction au cours 1996-1997	I-7
1 - Thème choisi et motivations de ce choix.....	I-7
2 - Evolution des recherches sur l'Hydrogène polarisé	I-7
3 - La situation des alcalins.....	I-9
PIÉGEAGE NON DISSIPATIF D'ATOMES NEUTRES	II-1
A - Considérations générales	II-1
1 - Comparaison avec les ions	II-1
2 - Pourquoi des pièges non dissipatifs ?	II-1
3 - Forces de piégeage	II-2
4 - Le théorème de Wing	II-5
5 - Les contraintes imposées par le théorème de Wing.....	II-6
6 - Revue de quelques types de pièges non dissipatifs.....	II-6
B - Piège magnétostatique quadrupolaire.....	III-1
1 - Configuration de courants.....	III-1
2 - Développement multipolaire du champ créé par des bobines d'axe Oz.....	III-1
3 - Expression du champ quadrupolaire.....	III-2
4 - Un autre exemple de configuration.....	III-3
5 - Pertes dues aux transitions de Majorana.....	III-4
6 - Le piège TOP (« Time-averaged Orbiting Potential »).....	III-6
C - Piège de Ioffé-Pritchard.....	IV-1
1 - Configuration de courants.....	IV-1
2 - Champ créé par des fils verticaux symétriquement disposés.....	IV-1
3 - Calcul du champ dans un piège de Ioffé-Pritchard.....	IV-3
4 - Discussion physique.....	IV-5
5 - Revue de quelques expériences	IV-8

INTRODUCTION AU REFROIDISSEMENT ÉVAPORATIF	V-1
1 - Buts de ce chapitre.....	V-1
2 - Rappels sur les propriétés d'un gaz d'atomes piégés en équilibre thermodynamique	V-1
2.1 - Système étudié - Approximations.....	V-1
2.2 - Etude de quelques grandeurs physiques	V-1
2.3 - Cas non dégénéré	V-3
2.4 - Potentiels décrits par une loi de puissance	V-5
3 - Principe du refroidissement évaporatif.....	V-7
3.1 - Description qualitative	V-7
3.2 - Evaluation de l'efficacité.....	V-7
3.3 - Dépendance en N des diverses grandeurs physiques au cours de l'évaporation	V-8
4 - Les problèmes qui se posent.....	V-9
Appendice A	V-10

DESCRIPTION DU REFROIDISSEMENT ÉVAPORATIF PAR UNE ÉQUATION CINÉTIQUE..... VI-1

1 - Buts de ce chapitre.....	VI-1
2 - Rappels sur l'équation cinétique de Boltzmann.....	VI-1
2.1 - Description des particules	VI-1
2.2 - Description d'une collision.....	VI-1
2.3 - Equation cinétique de Boltzmann.....	VI-3
3 - Hypothèse simplificatrice : mouvement suffisamment ergodique	VI-5
4 - Transformation de l'équation cinétique.....	VI-5
5 - Résolution numérique de l'équation cinétique décrivant le refroidissement évaporatif	VI-7
Appendice B	VI-9

ATOMES EN QUASI-ÉQUILIBRE DANS UN PIÈGE DE PROFONDEUR FINIE..... VII-1

1 - Introduction	VII-1
2 - Propriétés de quasi-équilibre du gaz d'atomes piégés.....	VII-2
2.1 - Fonction de partition $\zeta(T)$	VII-2
2.2 - Densité spatiale.....	VII-3
2.3 - Volume de référence V_e	VII-3
2.4 - Energie interne	VII-4

3 - Etude des taux de pertes par évaporation	VII-5
3.1 - Nombre d'atomes s'évaporant par unité de temps	VII-5
3.2 - Energie perdue par unité de temps à cause de l'évaporation	VII-6
3.3 - Discussion physique.....	VII-7
4 - Autres mécanismes de pertes.....	VII-8
4.1 - Pertes dues aux collisions inélastiques.....	VII-8
4.2 - Pertes de déversement (« spilling »)	VII-9
Appendice C	VII-10

LE REFROIDISSEMENT ÉVAPORATIF - ÉTUDE QUANTITATIVE VIII-1

1 - Introduction	VIII-1
2 - Les équations de base.....	VIII-2
2.1 - Equation décrivant le changement de quasi-équilibre.....	VIII-2
2.2 - Equations décrivant les pertes.....	VIII-2
3 - Evaporation à N constant	VIII-4
3.1 - Simplification des équations.....	VIII-4
3.2 - Constantes du mouvement et lois de puissance.....	VIII-5
3.3 - Changement de variables.....	VIII-6
3.4 - Evolution du taux de collisions élastiques.....	VIII-8
3.5 - Evolution temporelle de quelques grandeurs physiques	IX-1
3.6 - Importance d'une compression adiabatique	IX-4
Appendice D	IX-7

OPTIMISATION DU REFROIDISSEMENT ÉVAPORATIF X-1

1 - Choix de nouvelles variables : $X = \ln N$ $Y = \ln D$	X-1
2 - Equations du mouvement de $X = \ln N$, $Y = \ln D$	X-1
3 - Etude du cas $r = 0$	X-2
4 - Allure de la trajectoire Γ pour $r \neq 0$	X-3
5 - Discussion physique	X-5
5.1 - Pente à l'origine de la courbe Γ	X-5
5.2 - Vitesse initiale le long de la trajectoire Γ	X-7
5.3 - Courbe des maxima en dessous du seuil d'emballement.....	X-7

Résumé du cours 1995-1996

Au cours des dix dernières années, plusieurs méthodes nouvelles ont été mise au point, comme le refroidissement laser subrecul ou le refroidissement évaporatif permettant d'obtenir des échantillons d'atomes ultrafroids, avec des températures effectives de l'ordre du microkelvin, voire du nanokelvin. Le cours 1995-96 est le premier d'une série de cours se proposant d'analyser de manière quantitative les possibilités de ces méthodes, leur optimisation, les perspectives nouvelles qu'elles ouvrent, concernant notamment l'étude de nouveaux états de la matière que la récente observation d'une condensation de Bose-Einstein d'atomes alcalins permet d'envisager. Ce premier cours a porté plus particulièrement sur le refroidissement laser subrecul et sur la présentation d'approches statistiques nouvelles permettant d'analyser les propriétés asymptotiques d'un tel refroidissement aux longs temps d'interaction.

Le cours commence par une introduction générale faisant le point sur l'état actuel et les tendances d'évolution du domaine de recherches. Le principe des diverses méthodes de refroidissement et de piégeage d'atomes neutres est brièvement rappelé

Le refroidissement subrecul

La limite associée au recul

Le refroidissement laser consiste à utiliser des échanges quasi-résonnants d'impulsion entre atomes et photons pour diminuer la dispersion δp des impulsions p d'un ensemble d'atomes, ou encore la dispersion δv de leurs vitesses v (p et v sont reliées par $p = Mv$ où M est la masse de l'atome). Le bilan des échanges d'impulsion lors de cycles absorption-émission (induite ou spontanée) fait en général apparaître une "force de friction" qui diminue la valeur moyenne $\langle p \rangle$ de p . Par ailleurs, le caractère aléatoire de la direction d'émission et de l'instant d'émission des photons émis spontanément est à l'origine d'une dispersion δp des valeurs possibles de p autour de leur valeur moyenne $\langle p \rangle$, dispersion qui est en général supérieure à l'impulsion élémentaire $\hbar k$ des photons. La limite inférieure $\delta p > \hbar k$ qui apparaît ainsi pour δp lorsque l'atome ne cesse d'absorber et de réémettre des photons est appelée la "limite de recul", car elle est liée au recul aléatoire communiqué à l'atome par les photons qu'il émet spontanément.

Comment franchir une telle limite ?

En fait, la limite de recul peut être contournée. Deux méthodes pour y parvenir ont été proposées et démontrées : la première, utilisant un piégeage cohérent de population sélectif en vitesses, méthode appelée "VSCPT" ("Velocity Selective Coherent Population Trapping"), mise en œuvre par notre équipe à Paris à partir de 1988 ; la seconde, appelée "refroidissement Raman" car elle utilise des séquences d'impulsions Raman stimulées et spontanées, mise en œuvre à Stanford en 1992. L'idée géné-

rale commune à ces deux méthodes consiste à bloquer l'absorption de lumière par les atomes de vitesse nulle. La probabilité par unité de temps $\Gamma'(v)$ d'absorber un photon est, pour un atome de vitesse v , une fonction de v qui s'annule en $v = 0$. Les atomes ultrafroids, de vitesse quasi-nulle $v \simeq 0$, sont ainsi protégés des effets néfastes de la lumière puisque, n'absorbant plus de lumière, ils ne subissent plus le recul aléatoire que leur communiqueraient les photons réémis ensuite spontanément. Quant aux autres atomes, de vitesse non nulle $v \neq 0$, ils peuvent eux absorber de la lumière. Le recul qu'ils subissent ensuite lors de la réémission spontanée de photons change leur vitesse de manière aléatoire. Si la vitesse finale, après un cycle absorption-émission spontanée, se retrouve proche de zéro, les atomes sont piégés dans l'état $v \simeq 0$, appelé "état noir". Le refroidissement subrecul consiste donc en un transfert des atomes des états $v \neq 0$ dans lesquels ils peuvent absorber de la lumière vers les états $v \simeq 0$ dans lesquels ils se retrouvent piégés et s'accumulent.

Quelques problèmes posés par le refroidissement subrecul

(i) L'image donnée plus haut du refroidissement subrecul est celle d'une marche au hasard dans l'espace des vitesses, avec un "piège" dans cet espace autour de $v = 0$. Le refroidissement est d'autant plus efficace que les atomes tombent plus facilement dans le piège. Le problème qui se pose alors est celui de l'efficacité d'une marche au hasard pour aboutir en un point donné, notamment lorsqu'on essaie de généraliser la première expérience réalisée à une dimension à deux et trois dimensions, c'est-à-dire lorsqu'on essaie de refroidir non plus une seule composante de la vitesse, mais les trois. Il est bien connu en effet qu'une marche au hasard dans un espace à D dimensions est d'autant moins efficace pour revenir en un point donné que D est plus grand. On peut donc se demander s'il n'est pas possible d'augmenter l'efficacité du refroidissement subrecul en combinant le mécanisme décrit plus haut de marche au hasard, en présence d'un piège, avec un mécanisme de refroidissement plus habituel, comme le refroidissement Doppler où le refroidissement Sisyphe, qui donne naissance à une force de friction poussant les atomes vers le point $v = 0$.

(ii) Lorsque la limite de recul est franchie, δp est inférieur à $\hbar k$, et $h/\delta p$, c'est-à-dire la longueur d'onde de de Broglie des atomes, devient supérieure à $h/\hbar k$, qui n'est autre que la longueur d'onde des lasers utilisés pour refroidir les atomes. Le caractère ondulatoire du mouvement du centre de masse de l'atome ne peut plus alors être ignoré, de sorte qu'un traitement entièrement quantique du mouvement atomique devient nécessaire. Les équations de Bloch optiques, qui sont utilisées habituellement pour analyser le refroidissement laser, deviennent alors beaucoup plus complexes, puisque les éléments de la matrice densité atomique dépendent de deux types de nombres quantiques, les nombres quantiques internes et les nombres quan-

tiques externes décrivant l'état du centre de masse. Des solutions analytiques de ces équations deviennent impossibles à obtenir, surtout aux dimensions $D=2$ et $D=3$. Les calculs numériques deviennent également trop imprécis car l'apparition de structures de plus en plus étroites dans la distribution des vitesses nécessite de discrétiser l'impulsion p sur une grille de plus en plus fine quand le temps d'interaction θ croît, et le nombre d'équations différentielles couplées à résoudre devient de plus en plus élevé.

Des questions importantes se posent cependant, auxquelles il semble difficile de répondre en utilisant les méthodes traditionnelles de l'optique quantique. Comment évolue la largeur de la distribution des vitesses quand θ croît ? Tend-elle vers zéro ? Quelle est la proportion d'atomes refroidis ? Quelle augmentation de la densité atomique dans l'espace des phases peut-on espérer obtenir avec le refroidissement subrecul ? Le but du cours de cette année est précisément de présenter des modèles simples et des approches théoriques nouvelles apportant un éclairage physique nouveau et quantitatif sur les deux types de problèmes évoqués ci-dessus.

Etude d'un modèle simple combinant effet Sisyphe et refroidissement subrecul

Le refroidissement Sisyphe, étudié en détail dans un cours antérieur, repose sur l'existence d'une modulation spatiale des niveaux d'énergie d'un atome et des taux de transitions radiatives d'un niveau à l'autre. Ces deux modulations spatiales sont corrélées de telle manière que l'atome en mouvement gravit plus souvent des collines de potentiel qu'il n'en descend, comme le héros de la mythologie grecque. Son énergie cinétique diminue donc au profit de son énergie potentielle, le gain d'énergie potentielle étant dissipé par les photons émis spontanément qui ont en moyenne une énergie supérieure à celle des photons absorbés. Plusieurs séances du cours 1995-96 ont été consacrées à l'étude d'un modèle montrant qu'un tel refroidissement Sisyphe peut coexister avec un refroidissement subrecul VSCPT. Le but fixé était d'identifier, de manière plus approfondie que dans la littérature existante sur ce sujet, l'origine physique des transitions d'un niveau à l'autre et d'évaluer l'ordre de grandeur de la force de friction associée.

Traitement semiclassique

Le modèle choisi consiste en une transition atomique reliant deux niveaux atomiques g et e de moment cinétique égal à 1, $J_g = J_e = 1$, excitée par deux faisceaux laser se propageant en sens opposés le long de l'axe z avec des polarisations linéaires faisant entre elles un angle θ (configuration "Lin θ Lin"). Si θ est différent de $\pi/2$, l'intensité totale $I(z)$ au point z est une fonction oscillante de z .

On commence par utiliser une description semiclassique des degrés de liberté de translation, l'atome étant considéré comme une particule classique de vitesse imposée v . Les degrés de liberté internes sont par contre traités quantiquement. Les déplacements lumineux des divers sous-niveaux de l'état fondamental g sont calculés en chaque point z . On trouve qu'il existe en chaque point z un état non couplé aux lasers, $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$, dont le déplacement lumineux est nul. Dans cet état, qui est une superposition linéaire des deux sous-niveaux Zeeman $|g_{-1}\rangle$ et $|g_{+1}\rangle$, les deux amplitudes d'excitation vers l'état $|e_0\rangle$, $|g_{-1}\rangle \rightarrow |e_0\rangle$ et $|g_{+1}\rangle \rightarrow |e_0\rangle$, interfèrent destructivement. Par contre, l'état $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$ orthogonal à $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$ est lui couplé aux champs laser et son déplacement lumineux $\hbar\delta'_{\text{C}}(z)$ est une fonction oscillante de z comme l'intensité totale $I(z)$. Pour un désaccord positif, $\delta = \omega_L - \omega_A > 0$, entre la fréquence laser ω_L et la fréquence atomique ω_A , l'état couplé $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$ est au dessus de l'état $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$.

L'interprétation qualitative habituellement donnée du refroidissement Sisyphe apparaissant pour une telle configuration est la suivante. Par suite de la variation spatiale des états $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$ et $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$, un atome en mouvement, initialement dans l'état $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$, peut subir une transition non adiabatique vers l'état $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$, cette transition étant la plus probable au point où les deux niveaux sont les plus proches. L'atome ainsi transféré dans l'état $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$ gravit alors une colline de potentiel, la possibilité de retourner par pompage optique vers l'état non couplé $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$ étant la plus grande au sommet de la colline de potentiel, et ainsi de suite... L'atome ne fait ainsi que gravir des collines de potentiel, d'où l'apparition d'un effet Sisyphe.

Les grandes lignes du calcul semiclassique utilisant les équations de Bloch optiques sont ensuite exposées. Les vitesses de variations de la matrice densité atomique sous l'effet de l'interaction avec les lasers et sous l'effet du mouvement sont explicitées. Les équations de Bloch optiques sont enfin résolues de manière perturbative, à la limite des très faibles vitesses. On trouve une force de friction variant en v^3 .

Identification des mécanismes physiques

L'explication habituelle du transfert de l'atome de l'état $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$ à l'état $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$ sous l'effet d'une transition non adiabatique laisse dans l'ombre un certain nombre de points. Est-ce une transition du type Landau-Zener ? Fait-elle intervenir des processus radiatifs dissipatifs ? D'où vient l'énergie qu'il faut fournir à l'atome pour le faire passer de l'état $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$ à $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$?

On présente une étude approfondie des divers types de transitions radiatives spontanées entre niveaux d'énergie du système global atome + photons laser, appelé encore "atome habillé par les photons laser". L'effet essentiel est la contamination de l'état non couplé $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$ par l'état couplé $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$ sous l'effet du Hamiltonien V_{mot} ,

proportionnel à la vitesse v de l'atome, et décrivant l'effet du mouvement. Quand $v = 0$, aucune transition radiative ne peut partir de l'état non couplé $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$, alors que des transitions Raman spontanées (anti-Stokes) se produisent à partir de $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$ et font passer l'atome de $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$ à $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$. Quand v est non nul, $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$ est contaminé par $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$ et des transitions Raman spontanées (Stokes) peuvent apparaître à partir de $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$ et faire passer l'atome de $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$ à $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$. La probabilité de ces transitions est d'autant plus élevée que la contamination de $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$ par $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$ est plus grande, c'est-à-dire que la vitesse v est plus élevée et que les niveaux $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$ et $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$ sont plus proches. Le transfert $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle \rightarrow |\psi_{\text{C}}(z)\rangle$ est donc en fait une transition Raman spontanée Stokes induite par le mouvement et non une transition Landau-Zener. L'énergie fournie à l'atome provient du rayonnement, le photon Raman Stokes émis ayant une énergie inférieure à l'énergie du photon laser absorbé.

Un calcul simple du taux de transition associé à un tel processus physique redonne le même résultat que celui obtenu à partir d'une résolution perturbative des équations de Bloch optiques à la limite des faibles vitesses. On retrouve en particulier la force de friction en v^3 avec le bon coefficient. Une telle approche a l'avantage supplémentaire de permettre d'évaluer l'ordre de grandeur de la force de friction aux vitesses plus élevées et de montrer qu'elle devient alors linéaire en v avant de décroître en $1/v$ aux vitesses très élevées. Le coefficient de diffusion de l'impulsion est également estimé, ce qui permet d'évaluer l'ordre de grandeur de la température d'équilibre à laquelle un tel effet Sisyphe conduit.

Le régime quantique

On présente également, dans le cadre du modèle simple choisi, les grandes lignes d'un traitement entièrement quantique du refroidissement qui devient indispensable quand la dispersion d'impulsion δp devient inférieure à $\hbar k$.

Deux représentations différentes sont choisies pour décrire l'état du centre de masse : la représentation position et la représentation impulsion. Les états couplés par absorption et émission induite de photons laser forment des familles infinies d'états $\mathcal{F}(p)$, indicées par le nombre p . La situation est donc plus complexe que pour la configuration $\sigma^+ - \sigma^-$ étudiée dans un cours antérieur et où les deux ondes laser se propageant en sens opposés ont des polarisations circulaires droite et gauche. Dans ce dernier cas en effet, les familles $\mathcal{F}(p)$ étaient de dimension finie, égale à 3.

On montre ensuite que dans chaque famille $\mathcal{F}(p)$ il y a un ensemble d'états non couplés faisant intervenir les états fondamentaux $|g_{-1}\rangle$ et $|g_{+1}\rangle$ et on identifie les interférences destructives à l'origine de cette absence de couplage. Lorsque l'effet du Hamiltonien d'énergie cinétique $P^2/2M$ est pris en compte, tous ces états non couplés sont déstabilisés par des couplages motionnels qui les contaminent par des états

couplés, sauf un état particulier de la famille $\mathcal{F}(p=0)$, qui demeure non contaminé et non couplé, et qui est l'état noir dans lequel le refroidissement subrecul accumule les atomes.

Une interprétation physique du paramètre p qui repère les familles $\mathcal{F}(p)$ est donnée dans le cadre de la théorie des bandes. L'interaction atome-laser donne en effet naissance à un potentiel effectif modulé spatialement, comme l'intensité totale $I(z)$, et les niveaux d'énergie de l'atome, en l'absence d'émission spontanée, se regroupent en bandes, les fonctions propres de l'énergie (états de Bloch) étant repérés par une quasi-impulsion et un indice de bande. Il se trouve en fait que $\mathcal{F}(p)$ est le sous-espace formé par tous les états de Bloch de même quasi-impulsion p . L'indice p est donc la quasi-impulsion de Bloch, définie dans la première zone de Brillouin.

Un autre éclairage physique intéressant est donné par la fonction délai $W(\tau)$ qui donne la distribution des intervalles de temps séparant deux émissions spontanées successives de photons par le même atome. On montre que $W(\tau)$ peut s'obtenir en diagonalisant, à l'intérieur de chaque famille $\mathcal{F}(p)$, un Hamiltonien effectif non hermitique décrivant l'amortissement dû à l'émission spontanée. L'évolution au cours du temps d'un atome apparaît ainsi comme formée par une suite de périodes d'évolution cohérente à l'intérieur d'une famille $\mathcal{F}(p)$, séparées par des sauts quantiques correspondant à l'émission spontanée d'un photon et faisant passer l'atome d'une famille $\mathcal{F}(p)$ à une autre famille $\mathcal{F}(p')$ avec $|p-p'| \leq \hbar k$. Des résultats de simulations Monte Carlo de l'évolution de p au cours du temps dans le cas simple des configurations $\sigma^+ - \sigma^-$ (où les familles $\mathcal{F}(p)$ sont de dimension 3) sont présentés. Ils mettent très clairement en évidence le caractère anormal de la suite aléatoire des délais τ , cette suite étant dominée par un petit nombre d'évènements rares.

Une nouvelle description du refroidissement subrecul : Piégeage et recyclage

Toutes les approches théoriques que nous venons de mentionner deviennent de plus en plus difficiles à mettre en œuvre aux temps d'interaction θ très longs où il serait pourtant très important de préciser les performances du refroidissement subrecul. Le cours se poursuit alors par la présentation d'une nouvelle approche à ces problèmes reposant sur une schématisation des mécanismes suffisamment simple pour permettre des calculs analytiques, tout en conservant les ingrédients essentiels qui caractérisent le refroidissement subrecul.

Comme le suggèrent les simulations Monte Carlo évoquées plus haut et utilisant la fonction délai, on peut associer au refroidissement subrecul une marche au hasard dans l'espace des impulsions, la longueur de chaque pas étant de l'ordre de $\hbar k$ et la probabilité par unité de temps $\Gamma'(p)$ d'effectuer un saut étant une fonction de p qui

s'annule en $p = 0$. On peut se demander si une telle marche aléatoire classique peut représenter correctement un processus fondamentalement quantique comme le refroidissement subrecul. En fait, l'approche Monte Carlo quantique décrite plus haut associe rigoureusement au refroidissement subrecul une marche aléatoire classique d'un paramètre p que nous avons identifié comme étant la quasi-impulsion. Certes, l'état de l'atome n'est pas décrit de la même manière dans les deux approches. Entre deux sauts, l'état de l'atome est caractérisé par un seul nombre, p , dans la description classique, alors qu'il est décrit dans l'approche quantique par une fonction d'onde évoluant dans un sous-espace $\mathcal{F}(p)$. Un tel modèle se révèle cependant suffisant pour rendre compte du refroidissement subrecul, et c'est celui qui sera adopté dans la suite.

On commence donc par introduire les divers paramètres qui caractérisent le modèle : forme de $\Gamma'(p)$ au voisinage de $p = 0$, choisie de la forme $\Gamma'(p) \simeq p^\alpha$, où α est un exposant positif (qui vaut 2 pour le refroidissement VSCPT) ; comportement de $\Gamma'(p)$ aux grandes valeurs de p , avec éventuellement des "murs" réfléchissants en $|p| = p_{\max}$ pour schématiser la présence d'une force de friction.

Plutôt que d'effectuer des simulations Monte Carlo classiques à partir d'une telle probabilité de saut $\Gamma'(p)$, il semble alors plus intéressant de définir un piège dans l'espace des p autour de $p = 0$ par la condition $|p| < p_{\text{trap}}$. La valeur exacte de p_{trap} est arbitraire car, au bout d'un temps θ suffisamment long, la largeur δp de la distribution d'impulsion sera plus petite que p_{trap} . Un atome sera dit piégé si $|p| < p_{\text{trap}}$. Il sera considéré comme diffusant hors du piège si $|p| > p_{\text{trap}}$. L'évolution temporelle de l'atome apparaît alors comme une suite de phases de piégeage, de durées $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \dots$ alternant avec des phases de diffusion hors du piège, de durées $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3 \dots$. Les temps $\hat{\tau}_i$ sont en fait des temps de premier retour dans le piège.

Les τ_i sont des variables aléatoires indépendantes, comme les $\hat{\tau}_i$. Soient $P(\tau)$ la distribution des temps de piégeage τ , $\hat{P}(\hat{\tau})$ la distribution des temps de premier retour $\hat{\tau}$. Ces deux fonctions caractérisent les deux propriétés essentielles du refroidissement subrecul : le *filtrage* des atomes autour de $p = 0$ et le *recyclage* des atomes qui permet à ceux qui s'échappent du piège d'y revenir au bout d'un certain temps. Le calcul de $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ est effectué dans un certain nombre de cas, pour plusieurs valeurs de l'exposant α et de la dimension d'espace D , en présence ou en l'absence de friction.

Le résultat important est que, dans de nombreux cas, les distributions sont larges, avec des ailes décroissant lentement, comme des lois de puissances : $P(\tau) \simeq \tau^{-(1+\mu)}$ quand $\tau \rightarrow \infty$, ou $\hat{P}(\hat{\tau}) \simeq \hat{\tau}^{-(1+\hat{\mu})}$ quand $\hat{\tau} \rightarrow \infty$. Par exemple, pour le refroidissement VSCPT à une dimension, on trouve $\mu = 1/2$. Considérons alors le temps total passé dans le piège après N entrées et N sorties : $T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i$. En

général, la distribution de la somme de N variables aléatoires indépendantes tend vers une gaussienne quand $N \rightarrow \infty$. C'est le théorème de la limite centrale. Dans le cas étudié ici, si $\mu < 1$, la distribution $P(\tau)$ est si large que la valeur moyenne de τ , $\langle \tau \rangle = \int_0^\infty \tau P(\tau) d\tau$, diverge ! Le théorème de la limite centrale ne peut plus s'appliquer. Il se trouve que, pour des distributions larges avec des ailes décroissant comme des lois de puissance, le théorème de la limite centrale peut être généralisé. Les statistiques correspondantes sont appelées "statistiques de Lévy". L'approche développée ici, qui résulte d'une collaboration avec Jean-Philippe Bouchaud, et qui a fait l'objet de la thèse de doctorat de François Bardou, a donc l'avantage de montrer d'emblée qu'il existe un lien étroit entre statistiques de Lévy et refroidissement subrecul.

Distributions larges - Lois de Lévy

Le cours se poursuit par un rappel des résultats essentiels concernant le théorème de la limite centrale généralisé de Lévy et Gnedenko et les statistiques de Lévy, de manière à pouvoir appliquer ensuite ces résultats au problème de la limite asymptotique du refroidissement subrecul. On se contente en fait de présenter des arguments simples permettant de rendre plausibles ces résultats, l'accent étant mis sur les caractéristiques originales des statistiques de Lévy et sur leurs différences avec les statistiques gaussiennes usuelles.

Après avoir énoncé le théorème de la limite centrale généralisé et donné la définition des lois de Lévy, on passe en revue un certain nombre de propriétés importantes des "sommes de Lévy" $T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i$: comportement en $N^{1/\mu}$ pour $\mu < 1$, et non en N comme cela serait le cas si $\langle \tau \rangle$ était fini ; ordre de grandeur du terme le plus grand de la somme qui est comparable à la somme T_N elle-même. Des résultats de simulation Monte Carlo sont présentés permettant d'illustrer l'importance d'évènements rares dans les marches au hasard associées aux lois de Lévy, et d'introduire la notion de "vols de Lévy".

On considère également un processus ponctuel associé à toute loi large $P(\tau)$ ayant des ailes décroissant en $\tau^{-(1+\mu)}$ avec $\mu < 1$. Il s'agit d'un ensemble de points $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$ sur l'axe des τ , la distance entre deux points successifs M_i et M_{i+1} étant distribuée suivant $P(\tau)$. Une quantité intéressante et qui sera utile pour la suite est la densité moyenne $A(t)$ de ces points, moyennée sur plusieurs réalisations différentes de l'ensemble $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$. Un calcul simple montre que, si la valeur moyenne $\langle \tau \rangle$ de τ est finie, $A(t)$ est indépendant de t et égal à $1/\langle \tau \rangle$, ce qui se comprend bien, la densité de points étant inversement proportionnelle à la distance moyenne entre points. Par contre, si $P(\tau)$ est une loi large avec $\mu < 1$, on montre que $A(t)$ varie au cours du temps et décroît comme $t^{\mu-1}$. Au fur et à mesure qu'on attend, des intervalles de temps de plus en plus longs peuvent apparaître et la densité

de points décroît. Le fait que $A(t)$ dépend du temps indique également qu'il n'y a plus d'invariance du processus par translation dans le temps.

Calcul de la proportion d'atomes piégés

Une première application du formalisme précédent consiste à calculer la proportion $f(\theta)$ d'atomes piégés au bout d'un temps d'interaction θ , quantité qui caractérise l'efficacité du refroidissement.

Un raisonnement simple est tout d'abord présenté dans le cas où les deux distributions $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ sont des distributions larges, d'exposant μ et $\hat{\mu}$ inférieurs à 1. Après N entrées et N sorties, l'atome a passé un temps $T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i$ dans le piège et un temps $\hat{T}_N = \sum_{i=1}^N \hat{\tau}_i$ hors du piège. D'après les résultats donnés plus haut, T_N et \hat{T}_N varient, respectivement, comme $N^{1/\mu}$ et $N^{1/\hat{\mu}}$, quand $N \rightarrow \infty$. On en déduit que, si $\mu < \hat{\mu}$, l'atome passe la plus grande partie de son temps dans le piège, de sorte que $f(\theta) \rightarrow 1$ si $\theta \rightarrow \infty$. Les conclusions sont inversées si $\hat{\mu} < \mu$ et $f(\theta) \rightarrow 0$ si $\theta \rightarrow \infty$.

Il est tentant alors de rendre ce raisonnement plus quantitatif et de relier la proportion d'atomes piégés à $T_N / (T_N + \hat{T}_N)$, c'est-à-dire à la proportion relative du temps passé dans le piège après un grand nombre d'entrées et de sorties. En fait, un tel résultat est erroné car il peut dans certains cas différer du résultat exact donné par le raisonnement plus rigoureux présenté plus loin. La raison est que $T_N / (T_N + \hat{T}_N)$ est une *moyenne temporelle*, alors que $f(\theta)$, probabilité de trouver l'atome dans le piège à l'instant θ , est une *moyenne d'ensemble*. Or, pour un processus non ergodique comme le refroidissement subrecul, ces deux moyennes peuvent être différentes.

L'expression exacte de $f(\theta)$ est la suivante :

$$f(\theta) = \int_0^\theta d\tau \ E(\theta - \tau) \mathcal{X}(\tau)$$

où $E(\theta - \tau)$ est la probabilité pour que l'atome rentre dans le piège à l'instant $\theta - \tau$, quel que soit le nombre d'entrées et de sorties effectuées auparavant, et où $\mathcal{X}(\tau)$ est la probabilité pour que l'atome rest piégé entre $\theta - \tau$ et θ , c'est-à-dire la probabilité pour qu'il reste piégé un temps plus long que τ

$$\mathcal{X}(\tau) = \int_\tau^\infty d\tau' \ P(\tau')$$

La probabilité $E(t)$ est calculée par une généralisation simple du calcul de la densité $A(t)$ introduite à la fin du paragraphe précédent, et est reliée à un processus ponctuel formé par la suite alternée d'entrées dans le piège et de sorties du piège.

La limite de $f(\theta)$ quand $\theta \rightarrow \infty$ est calculée dans un certain nombre de cas importants. La manière dont $f(\theta)$ tend vers sa limite est également calculée. Les résultats analytiques ainsi obtenus sont comparés avec les résultats numériques fournis par des simulations Monte Carlo. L'excellent accord obtenu justifie a posteriori le modèle simple choisi pour le refroidissement subrecul et donne confiance en l'approche utilisant les statistiques de Lévy pour aborder des problèmes plus complexes comme celui de la forme de la distribution d'impulsion.

Distribution d'impulsion

On commence par rappeler les arguments qualitatifs utilisés dans les premières descriptions du refroidissement VSCPT pour estimer la largeur δp de la distribution d'impulsion. L'effet du filtrage est seul pris en compte : pour rester dans le piège pendant un temps θ , l'atome doit avoir une impulsion suffisamment petite pour que la probabilité d'absorber un photon pendant le temps θ soit faible, ce qui donne $|p| < \delta p$ avec

$$\Gamma'(\delta p) \cdot \theta \simeq 1$$

Une telle équation définit une largeur δp qui décroît comme $\theta^{-1/\alpha}$ quand $\theta \rightarrow \infty$. En fait, le raisonnement précédent ne considère que les atomes restant dans le piège pendant toute la durée d'interaction θ . Or les atomes quittent le piège et y retournent en permanence. A l'instant θ , ceux qui sont dans le piège peuvent y séjourner depuis un temps bien inférieur à θ .

Une expression exacte, analogue à celle donnée plus haut pour $f(\theta)$, est établie pour le probabilité $\mathcal{P}(p, \theta)$ d'être dans le piège à l'instant θ avec une impulsion p . Elle fait intervenir la même fonction $E(\theta)$ que celle apparaissant dans l'expression de $f(\theta)$. Le calcul de la distribution d'impulsion est alors effectué pour $\mu < 1$ et $\mu > 1$. On se limite au cas important en pratique où une force de friction favorise le retour dans le piège. Des expressions analytiques sont établies pour tous les paramètres importants de la distribution d'impulsion : largeur à mi-hauteur δp ; hauteur h en $p = 0$; proportion r d'atomes refroidis, c'est-à-dire ayant une impulsion inférieure en module à δp , ou de l'ordre de δp ; décroissance des ailes.

Le cas $\mu < 1$ est particulièrement intéressant. Quant $\theta \rightarrow \infty$, tous les atomes sont refroidis : leur proportion r tend vers 1, la largeur δp tend vers 0 et la hauteur h tend vers l'infini. La forme de la distribution d'impulsion ne s'arrête jamais d'évoluer, ce qui montre l'absence d'état stationnaire et le caractère non ergodique du refroidissement. L'équation écrite plus haut pour δp demeure valable, ce qui montre l'importance des événements de piégeage très longs, de l'ordre du temps total θ lui-même. On retrouve là une caractéristique importante des statistiques de Lévy.

Quand $\mu > 1$, on retrouve toujours dans $\mathcal{P}(p, \theta)$ la présence d'un pic étroit dont la largeur δp est toujours donnée par l'équation écrite plus haut. Par contre, la proportion d'atomes contribuant à ce pic tend vers zéro quand $\theta \rightarrow \infty$, la hauteur du pic en $p = 0$ continuant cependant à croître quand $\theta \rightarrow \infty$. La distribution d'impulsion s'arrête d'évoluer sauf dans un intervalle de largeur δp autour de $p = 0$.

Notons enfin que dans les deux cas, les ailes de la distribution décroissent en $1/p^\alpha$. La distribution d'impulsion n'est donc pas Maxwellienne et on ne peut donc pas, en toute rigueur, définir une température d'équilibre thermodynamique.

Optimisation du refroidissement subrecul

Le fait de disposer d'expressions analytiques pour les diverses caractéristiques de la distribution d'impulsion des atomes refroidis permet, pour des conditions expérimentales données, de guider le choix des paramètres expérimentaux pour optimiser telle ou telle grandeur physique. Ces idées sont illustrées sur le refroidissement Raman pour lequel il est possible, en jouant sur la forme des impulsions laser, de changer l'exposant α caractérisant la croissance de la probabilité de saut $\Gamma'(p)$ au voisinage de $p = 0$. Pour le refroidissement VSCPT, on a toujours $\alpha = 2$ (départ parabolique en p^2 de $\Gamma'(p)$). Les premières impulsions laser utilisées pour le refroidissement Raman étaient des "impulsions Blackman", dont les profils spectraux n'ont pas de maxima secondaires et dont les ailes décroissent très vite. En fait, on peut montrer que, pour de telles impulsions, $\Gamma'(p)$ croît en p^4 au voisinage de $p = 0$ de sorte que $(\alpha)_{\text{Blackman}} = 4$. Par contre, si l'on utilise des impulsions temporelles carrées, dont la puissance spectrale est le carré d'une fonction de diffraction, et si l'on ajuste la fréquence centrale du spectre pour que le premier zéro de la fonction de diffraction coïncide avec la fréquence de résonance des atomes d'impulsion nulle, on trouve alors que $\Gamma'(p)$ a un départ parabolique en p^2 , de sorte que $(\alpha)_{\text{carré}} = 2$.

Après un rappel du principe du refroidissement Raman, on se pose le problème du choix de la forme optimale d'impulsion à utiliser pour réaliser le refroidissement à une dimension. Le paramètre $\mu = D/\alpha$ qui caractérise la distribution $P(\tau)$ des temps de piégeage est égal à $1/\alpha$ puisque $D = 1$. Il vaut donc $1/2$ pour des impulsions carrées, $1/4$ pour des impulsions Blackman. Comme dans les deux cas on a $\mu < 1$, la proportion r d'atomes refroidis tend vers 1 quand $\theta \rightarrow \infty$. Par contre, la largeur δp de la distribution d'impulsion, qui décroît comme $\theta^{-1/\alpha}$, décroît comme $\theta^{-1/2}$ pour des impulsions carrées, et comme $\theta^{-1/4}$ pour des impulsions Blackman. Une telle analyse permet donc de prévoir très simplement que les impulsions carrées sont plus avantageuses que les impulsions Blackman. Elles sont non seulement plus faciles à réaliser, mais elles permettent de plus un refroidissement plus rapide.

La durée τ_0 de l'impulsion Raman la plus longue est également un paramètre

physique important. Les autres impulsions plus brèves, nécessaires pour recycler les atomes dont les vitesses tombent en dehors du spectre de l'impulsion la plus longue, contribuent en effet de manière négligeable à la durée globale du cycle d'impulsions Raman qui est égale à τ_0 , à un facteur 2 près. Si τ_0 est très long, la courbure de $\Gamma'(p)$ au voisinage de $p = 0$ est très élevée et le filtrage très efficace. Par contre, le nombre de cycles pouvant être répétés pendant le temps θ , de l'ordre de θ/τ_0 , est peu élevé et le recyclage est insuffisant. Par contre, si τ_0 est très court, un plus grand nombre de cycles est possible, conduisant à un très bon recyclage. Mais le filtrage est alors moins bon. On conçoit donc qu'il doit y avoir une valeur optimale de τ_0 si l'on veut refroidir le plus grand nombre possible d'atomes dans l'intervalle δp le plus étroit possible. Cette valeur optimale de τ_0 est déterminée analytiquement à partir des expressions obtenues précédemment à partir des statistiques de Lévy.

Toutes ces considérations ont fait l'objet de vérifications expérimentales dans notre laboratoire. Les expériences correspondantes, qui ont permis notamment de refroidir à une dimension des atomes de Césium en dessous de 3 nK, sont brièvement décrites.

Conclusion

Le cours se termine par une récapitulation générale des résultats obtenus. Le cas, important en pratique, où une imperfection expérimentale empêche $\Gamma'(p)$ d'être rigoureusement nul en $p = 0$ est brièvement analysé. Supposons que $\Gamma'(p)$ soit, au voisinage de $p = 0$, de la forme

$$\Gamma'(p) \simeq \Gamma_{\text{dissip}} + Cp^\alpha$$

où Γ_{dissip} est une constante décrivant les processus dissipatifs parasites. On montre que le paramètre Γ_{dissip} fait apparaître une nouvelle échelle de temps $T_{\text{dissip}} = 1/\Gamma_{\text{dissip}}$. Pour les temps d'interaction θ inférieurs à T_{dissip} , l'effet de Γ_{dissip} est négligeable et le comportement du système est très voisin de celui prédit à partir des statistiques de Lévy. Par contre, pour $\theta \gg T_{\text{dissip}}$, on retrouve un comportement plus normal, en accord avec le théorème de la limite centrale et les statistiques gaussiennes. De telles "lois de Lévy tronquées" permettent ainsi de faire le raccord entre les statistiques de Lévy et les statistiques gaussiennes.

1 - Thème choisi et motivations de ce choix

"Atomes ultrafroids - Piégeage non dissipatif et refroidissement évaporatif."

- Les développements récents ayant conduit à l'observation d'une condensation de Bose-Einstein portent sur des atomes alcalins piégés dans des gradients de champ magnétique et portés à des températures très basses grâce à un refroidissement laser suivi d'un refroidissement évaporatif.
- Les pièges magnéto-statiques et le refroidissement évaporatif étaient en fait utilisés déjà depuis plusieurs années dans les expériences essayant de mettre en évidence une condensation de Bose-Einstein sur des atomes d'Hydrogène polarisés. Les 2 méthodes d'étude se situent donc à un carrefour où se rejoignent 2 lignes de recherches différentes, les gaz quantiques polarisés et la manipulation laser des atomes. Il semble donc intéressant d'étudier en détail ces 2 méthodes, leurs performances et leurs limites, de manière à pouvoir ensuite analyser les problèmes physiques nouveaux qu'elles permettent d'explorer.

2 - Evolution des recherches sur l'Hydrogène polarisé

(Recherches poursuivies depuis une vingtaine d'années à Amsterdam et MIT)

Problème de gaz quantique

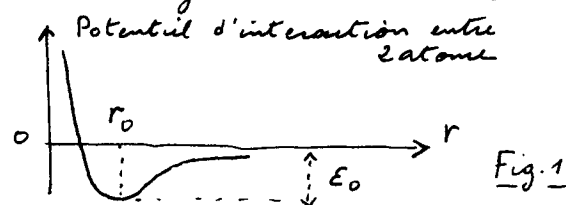
Peut-on avoir un ensemble d'atomes restant dans un état métastable gazeux pendant un temps très long avant de se condenser sous forme liquide ou solide ?

Plusieurs indicateurs d'un tel régime quantique.

- (i) Energie de point zéro, $\hbar^2/2m r_0^2$, due au confinement de l'atome dans une région de dimensions r_0 , comparée à l'énergie de liaison E_0

$$\eta = \frac{\hbar^2}{m r_0^2 E_0} \quad (1.1)$$

Plus ce paramètre est grand, plus grandes sont les chances d'observer un gaz quantique



Intérêt de l'Hydrogène polarisé : L'interaction se fait par l'intermédiaire du potentiel triplet qui est très peu profond et qui n'a pas d'état lié. E_0 est très petit, de même que m . η a la valeur la plus grande possible.

- (ii) Longueur d'onde de de Broglie $\Lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T}$ comparée à la portée ($\sim r_0$) du potentiel

Si $\Lambda \gg r_0$, la collision entre 2 bosons identiques polarisés a lieu dans l'onde s ($l=0$) et est caractérisée par un seul ^(de la valeur) paramètre : la longueur de diffusion a . Importance du signe et \sqrt{a} de a pour caractériser l'énergie de l'état fondamental d'un ensemble d'atomes dans le régime des collisions binaires

- (iii) Paramètre de dégénérescence quantique : $n \Lambda^3$ (n : densité)
Longueur d'onde de de Broglie Λ comparée à la distance moyenne $n^{-1/3}$ entre 2 atomes

Pour $n \Lambda^3$ suffisamment grand ($n \Lambda^3 > 2.612$), condensation de Bose Einstein dans l'état fondamental.

Stabilisation d'un gaz d'Hydrogène à très basse température T dans une cellule placée dans un champ magnétique \vec{B} intense et dont les parois sont recouvertes d'un film d'Helium liquide (Amsterdam - 1979)

A cause du facteur de Boltzmann $\exp(-\mu_B/k_B T)$, les spins électroniques des atomes H sont polarisés dans l'état \downarrow . Les atomes $H\downarrow$ interagissent via le potentiel Van der Waals qui est très profond et restent à l'état gazeux pendant un temps très long.

Les seules interactions susceptibles de coupler l'état triplet de spins à l'état singulet (qui a un puits de potentiel beaucoup plus profond) sont les interactions magnétiques (couplage hyperfin entre les spins électronique et nucléaire, couplages magnétiques dipôle-dipôle) qui sont beaucoup plus faibles. C'est ce qui explique pourquoi les temps de recombinaison sont très longs à basse densité.

De plus, dans une collision binaire, l'énergie cinétique des atomes entrant en collision à basse température est insuffisante pour fournir au spin l'énergie nécessaire pour basculer de l'état \downarrow à l'état \uparrow qui a une énergie beaucoup plus grande dans un champ \vec{B} élevé. Le caractère endothermique de la réaction est défavorable.

Les divers chemins suivis initialement pour essayer d'augmenter $n\Lambda^3$

(i) Augmenter n à T fixé (par un environnement cryogénique avec film d'Helium liquide sur les parois du récipient)

On peut augmenter n de manière considérable par des méthodes de compression, mais le gaz est déstabilisé, avant d'atteindre le seuil de la condensation, par des collisions ternaires



Recombinaison induite par interaction dipôle-dipôle. L'énergie libérée dans la recombinaison permet à la réaction de se produire et peut être évacuée sous forme d'énergie cinétique d'un ou plusieurs des partenaires de la collision.

(ii) Pour éviter les collisions ternaires, on reste à des faibles valeurs de n et on essaie de diminuer T pour augmenter Λ , le système étant toujours enfermé dans une cellule dont les parois sont recouvertes d'Helium liquide.

Bien que l'énergie d'adsorption E_a d'un atome H soit la plus basse possible pour une surface d'Helium liquide ($E_a/k_B = 1^\circ K$), la densité surfacique des atomes H adsorbés devient trop élevée quand T décroît. Des processus de recombinaison à 3 corps se produisent sur la surface et empêchent d'atteindre le seuil.

Le piégeage magnétostatique : un moyen d'éviter toute surface de confinement

- L'idée de piéger les atomes H dans des gradients de champs magnétiques s'est alors imposée pour se débarrasser de tous les effets de recombinaison sur les surfaces de confinement.
- Une difficulté : les pièges magnétostatiques ne peuvent piéger que $H\uparrow$ (Théorème de Wigner). Les collisions binaires avec basculement du spin par interactions magnétiques sont exothermiques et se produisent

plus aisément que pour $H\downarrow$, ce qui impose de travailler à des densités plus basses I-9

De nouvelles méthodes de refroidissement

Comme il n'y a plus de refroidissement cryogénique par contact avec une surface et qu'il faut diminuer encore davantage T , de nouvelles méthodes de refroidissement sont nécessaires.

- Refroidissement laser. Pas facile avec H , car les longueurs d'onde des raies de résonance tombent dans l'UV. De plus, l'énergie de recul est élevée, car m est petit.

Un tel refroidissement a été cependant réalisé à Amsterdam.

- Refroidissement évaporatif (suggéré par Hess et réalisé à MIT et Amsterdam).

Méthode très efficace consistant à utiliser les collisions élastiques entre atomes piégés pour faire sortir du piège les atomes les plus énergétiques et obtenir, par rethermalisation, une température beaucoup plus basse pour les atomes qui restent piégés.

Importance d'avoir un taux de collisions élastiques beaucoup plus élevé que celui des collisions inélastiques.

Il a été ainsi possible d'arriver à un facteur 2 ou 3 du seuil de condensation.

L'évolution des recherches sur H polarisé montre donc clairement que les méthodes de piégeage magnéto-statique et de refroidissement évaporatif se sont avérées comme des outils privilégiés pour ce type de recherches.

3 - La situation des alcalins

- A première vue, les alcalins semblent constituer un système peu favorable pour l'étude des gaz quantiques. Même dans l'état triplet, les potentiels d'interaction sont très profonds et admettent plusieurs états liés. La masse m est élevée et le paramètre η introduit en (1.1) est beaucoup plus petit que pour $H\downarrow$.

- Par contre, la manipulation laser de tels atomes est beaucoup plus aisée. On peut les refroidir à des températures très basses de l'ordre de quelques dizaines de mK, en les conservant dans des pièges non dissipatifs (magnéto-statiques ou pièges laser très désaccordés) qui les isolent de parois sur lesquelles ils se condenseraient.

- De plus, les sections efficaces de collisions élastiques sont beaucoup plus élevées pour les alcalins que pour l'hydrogène ce qui permet un refroidissement évaporatif très efficace.

Toutes ces raisons expliquent comment des méthodes mises au point pour l'hydrogène se sont révélées également très efficaces pour les alcalins et ont permis récemment d'observer la condensation de Bose-Einstein sur des systèmes dilués comme des gaz.

A. Considérations générales

① Comparaison avec les ions

- Le piégeage des atomes neutres est plus difficile que celui des ions
Pas de charge globale sur laquelle puissent agir des champs électriques et magnétiques.
- Nécessité d'utiliser des couplages faisant intervenir des moments dipolaires magnétiques ou électriques, permanents ou induits.
Couplages beaucoup plus faibles
Puits de potentiel beaucoup moins profonds que les pièges de Penning ou de Paul utilisés pour les ions.
- Nécessité d'un refroidissement préalable des atomes pour que leur énergie cinétique soit inférieure à la profondeur des puits
Le développement des pièges pour atomes neutres a été grandement stimulé par le développement de méthodes de plus en plus efficaces de refroidissement laser.
- Les forces de piégeage pour atomes neutres font intervenir les degrés de liberté internes (dipôle électrique ou magnétique). Les niveaux d'énergie internes sont donc déplacés d'une quantité qui varie d'un point à l'autre de l'espace.
Difficultés pour la spectroscopie de haute résolution, pour le refroidissement laser in situ des atomes piégés.
- Par contre, pas de charge d'espace comme pour les ions.
Possibilité d'atteindre des densités d'atomes neutres piégés beaucoup plus élevées que celles des ions.
Intérêt pour l'étude des collisions entre atomes ultrafroids, pour le développement de nouvelles méthodes de refroidissement utilisant les collisions (refroidissement évaporatif), pour la recherche d'effets de dégénérescence quantique.

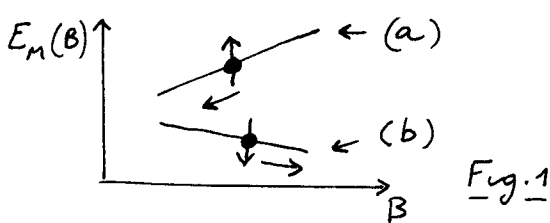
② Pourquoi des pièges non dissipatifs ?

- Pour éviter des processus de relaxation, comme l'émission spontanée de photons, qui réduisent la longueur de cohérence spatiale des atomes piégés, qui élargissent les niveaux d'énergie, qui communiquent aux atomes un recul aléatoire qui peut les faire sortir du piège.
- Pour pouvoir considérer que le mouvement des atomes dans le piège est, à une bonne approximation, décrit par un Hamiltonien.
Possibilité d'introduire des niveaux d'énergie bien définis pour le centre de masse de l'atome, avec des largeurs petites devant leurs séparations.
- Les pièges dissipatifs, comme le piège magnéto-optique (M.O.T), jouent cependant un rôle très important pour, dans une première étape, capturer le plus grand nombre possible d'atomes à partir d'un jet ralenti, et les prérefroidir. Les pièges dissipatifs sont en général plus profonds. Ils permettent d'adapter l'énergie cinétique des atomes à la profondeur des pièges non dissipatifs qu'on applique ensuite dans une deuxième étape.

(3) Forces de piégeage

Dipôles magnétiques

- Atome ou molécule paramagnétique, c'est à dire ayant un moment magnétique permanent, interagissant avec un gradient de champ magnétique statique.
- Exemple : énergie $E_M(B)$ d'un sous-niveau Zeeman $|M\rangle$ d'un atome dans un champ magnétique \vec{B} inhomogène



$$\text{Force: } \vec{F}_M = -\vec{\nabla} E_M(\vec{B}) \quad (2.1)$$

Ce sont ces forces qui sont à l'origine de l'effet Stern et Gerlach bien connu

- Problème : D'un point à l'autre, \vec{B} change non seulement en module, mais en direction. Les états propres de l'hamiltonien Zeeman varient donc dans l'espace. Faut-il tenir compte des gradients des fonctions d'onde ?

Si l'atome se déplace suffisamment lentement pour que la vitesse de rotation du champ qu'il "voit" dans son référentiel soit très inférieure à la fréquence de précession de Larmor autour de ce champ, le spin reste aligné sur le champ. L'atome en mouvement suit adiabatiquement le niveau dans lequel il se trouve initialement. On peut alors ignorer les variations spatiales des fonctions d'onde. Seules comptent les variations de $E_M(\vec{B})$, c'est à dire les variations spatiales du module $B = |\vec{B}|$ de \vec{B} .

Par contre, si l'atome se déplace trop vite pour que la vitesse de rotation du champ "vu" puisse être négligée, des transitions non adiabatiques se produisent entre sous-niveaux Zeeman différents ("transitions de Majorana"). L'atome peut passer d'un niveau piégeant à un niveau non piégeant et être expulsé hors du piège.

- Revenons à une situation où l'approximation adiabatique est valable. Si l'atome se trouve sur un niveau de type (a) sur la Fig. 1, c'est à dire un niveau dont l'énergie croît quand B croît, il est attiré vers les champs faibles ("low-field seeker"). Pour piéger un tel atome avec des champs magnétiques statiques, il faut réaliser une configuration de champs présentant un minimum de B en un point. Nous verrons plus loin que de telles configurations existent.

Par contre, si l'atome est sur un niveau de type (b), dont l'énergie décroît quand B croît, il est attiré vers les champs forts ("high-field seeker"). Pour le piéger, il faudrait un maximum de B . Nous verrons plus loin (théorème de Wigner étudié au § 4 [1]) qu'il est impossible pour un champ électrique ou magnétique statique d'avoir un module présentant un maximum dans une région sans charges ni courants.

Dipôles électriques

Dipôles induits par un champ statique

- Sauf en cas de dégénérescence de 2 niveaux de parités opposées, l'effet Stark produit par un champ électrique statique E est quadratique

en E et non linéaire, comme c'est le cas pour l'effet Zeeman.

- L'effet Stark de l'état fondamental d'un atome est négatif (Vous les dénominateurs d'énergie sont négatifs dans l'expression du déplacement au 2^{im} ordre de la théorie des perturbations). L'atome est donc attiré vers les champs E forts. Pour piéger un atome dans l'état fondamental par un gradient de champ électrique statique, il faudrait donc un maximum de E, ce qui est exclu par le théorème de Wirng.
- Par contre, l'effet Stark d'un niveau excité peut être positif. Il peut être même linéaire en E quand des niveaux de parités opposées sont suffisamment proches, ce qui est en particulier le cas pour de états de Rydberg. L'instabilité des états excités due à l'émission spontanée de photons est cependant un inconvénient, même si les durées de vie de certains états peuvent être très longues (voir Ref. [2]).

Dipôles induits par un champ oscillant

- Le déplacement des niveaux est alors appelé "effet Stark dynamique", ou déplacement lumineux quand le champ oscillant est un champ optique de fréquence voisine de celle d'une transition atomique.
- Le théorème de Wirng ne s'applique pas à un champ oscillant. L'amplitude d'un tel champ peut être maximale en un point de l'espace. C'est ce qui se passe au foyer d'un faisceau laser par exemple.
- Les forces correspondant aux gradients d'intensité du champ sont parfois appelés "forces dipolaires". Elles s'interprètent simplement en termes d'atome habillé (voir Ref [3] et Fig. 2).

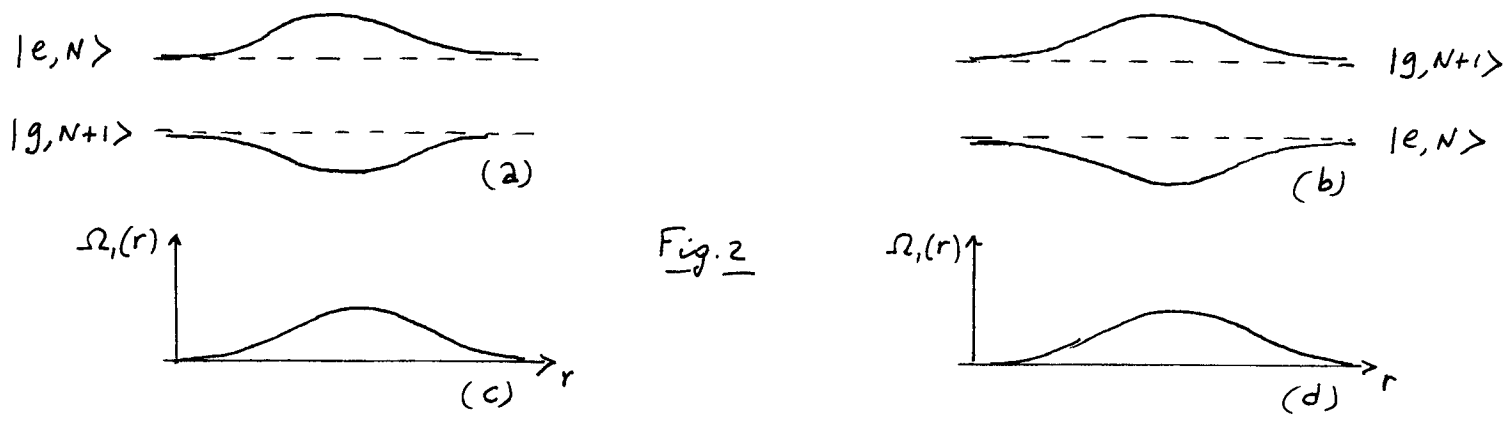


Fig. 2

Les figures 2a et 2b donnent en traits tiretés les énergies des états non couplés $|g, N+1\rangle$ et $|e, N\rangle$ du système "atome + photons laser", séparés de $\hbar\delta = \hbar(\omega_L - \omega_A)$, où δ est le désaccord entre la fréquence laser ω_L et la fréquence atomique ω_A . La figure 2a correspond à $\delta < 0$, la figure 2b à $\delta > 0$. Ces 2 états sont couplés par l'interaction atome-laser V_{AL}

$$\langle e, N | V_{AL} | g, N+1 \rangle = \frac{\hbar \Omega_1}{2} \quad (2.2)$$

Ω_1 est la fréquence de Rabi caractérisant l'interaction atome champ. Sous l'effet de ce couplage, les états couplés, ou encore "habillés", se repoussent d'autant plus que Ω_1 est plus grand. Pour une fréquence de Rabi $\Omega_1(r)$ dépendant de r, comme c'est le cas le long d'une trajectoire traversant un faisceau laser (voir Figures 2c et 2d), les niveaux habillés ont l'allure représentée par les traits pleins des figures 2a et 2b.

Le déplacement de l'état habillé qui se raccorde à l'état $|g, N+1\rangle$ hors du faisceau laser (quand $\Omega_1 = 0$) est donné, quand $|\Omega_1| \ll |\delta|$, par la théorie de perturbations du 2^{ème} ordre. Il représente le déplacement lumineux δE_g de l'état fondamental g

$$\delta E_g = \frac{\hbar \Omega_1^2(\vec{r})}{4\delta} \quad (2.3)$$

Il est négatif pour $\delta < 0$, positif pour $\delta > 0$. On peut donc piéger un atome dans l'état fondamental au foyer d'une onde laser désaccordée vers le rouge.

- Dans ce qui précède, on a ignoré l'instabilité radiative de l'état excité qui a une largeur Γ . Le couplage V_{AL} contient l'état stable $|g, N+1\rangle$ par l'état instable $|e, N\rangle$ et confère à l'état habillé qui se raccorde à $|g, N+1\rangle$ une partie de l'instabilité radiative de e . Pour trouver la largeur naturelle Γ_g de l'état fondamental, il faut ajouter une partie imaginaire $-i\hbar\Gamma/2$ à l'énergie de l'état $|e, N\rangle$, diagonaliser l'hamiltonien effectif

$$H_{\text{eff}} = \hbar \begin{pmatrix} \delta & \Omega_1/2 \\ \Omega_1/2 & -i\frac{\Gamma}{2} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

qui décrit l'évolution réduite à l'intérieur de la multiplicité $\{|e, N\rangle, |g, N+1\rangle\}$ et calculer la partie imaginaire, $-i\hbar\Gamma_g/2$, de la valeur propre qui se raccorde à l'énergie de l'état $|g, N+1\rangle$ quand $\Omega_1 \rightarrow 0$. On trouve ainsi, à la limite perturbative ($|\Omega_1| \ll |\delta|$)

$$\Gamma_g = \Gamma \frac{\Omega_1^2(\vec{r})}{4\delta^2} \quad (2.5)$$

En comparant (2.3) et (2.5), on déduit

$$\frac{|\delta E_g|}{\hbar\Gamma_g} = \frac{\Gamma}{|\delta|} \quad (2.6)$$

Quand on augmente le désaccord $|\delta|$, l'élargissement radiatif devient donc négligeable devant le déplacement lumineux. Quand on augmente le désaccord par 10, tout en augmentant par 10 la puissance ($\propto \Omega_1^2$) du laser, on garde la même profondeur de puits, tout en diminuant par 10 la largeur des niveaux.

Pour $|\delta|$ suffisamment grand, et à condition de disposer de suffisamment d'intensité, un piège laser pourra donc être considéré comme non dissipatif. De manière plus précise, si l'on veut garder les atomes piégés pendant un temps T , il faut réaliser $\Gamma_g T \ll 1$ pour pouvoir négliger toute émission spontanée pendant le temps de piégeage T .

- Ordre de grandeur des profondeurs des puits (pour $\delta < 0$)

Pour Ω_1 fixé, la profondeur des puits dépend de δ . La profondeur maximale est obtenue pour $\delta \simeq -|\Omega_1|$ et est de l'ordre de $\hbar\Omega_1$,

Pour un faisceau laser de 1 watt, focalisé sur un rayon focal (waist) de $10\mu\text{m}$, on trouve une profondeur maximale U_0 qui, exprimée en degrés K, est de l'ordre de 1°K : $U_0/k_B \sim 1^\circ\text{K}$.

4) Le théorème de Wing [1]

- Equations de Maxwell

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{J} \end{cases} \quad (2.8)$$

- Dans une région sans charges, ni courants ($\rho=0, \vec{J}=\vec{0}$) et pour des champs statiques ($\partial \vec{E} / \partial t = \vec{0}, \partial \vec{B} / \partial t = \vec{0}$), on a donc

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0} \end{cases} \quad (2.10)$$

- De l'identité $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V}$ (2.11)

on déduit alors

$$\Delta \vec{E} = \vec{0} \quad (2.12)$$

$$\Delta \vec{B} = \vec{0} \quad (2.13)$$

- Montrons que le module d'un tel champ ne peut pas avoir de maximum en un point. Supposons qu'un tel maximum existe pour \vec{B} en $\vec{r} = \vec{0}$ (le raisonnement est le même pour \vec{E}).

Soit \vec{B}_0 la valeur de \vec{B} en $\vec{r} = \vec{0}$. Soit \vec{r} un point voisin de $\vec{0}$.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0 + \delta \vec{B}(\vec{r}) \quad (2.14)$$

$$\delta \vec{B}(\vec{0}) = \vec{0} \quad (2.15)$$

L'équation (2.13) entraîne que

$$\Delta \delta \vec{B}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (2.16)$$

- Prenons l'axe z suivant \vec{B}_0

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z \quad \text{avec } B_0 > 0 \quad (2.17)$$

et calculons $\vec{B}^2(\vec{r})$

$$\begin{aligned} \vec{B}^2(\vec{r}) &= \vec{B}_0^2 + 2 \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{B}(\vec{r}) + \delta \vec{B}^2(\vec{r}) \\ &= B_0^2 + 2 B_0 \delta B_z(\vec{r}) + \delta \vec{B}^2(\vec{r}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Le dernier terme de la 2^{ème} ligne de (2.18) est positif. Le module de $\vec{B}(\vec{r})$ ne peut être maximal en $\vec{r} = \vec{0}$ que si $\vec{B}^2(\vec{r}) < B_0^2$, c-à-d si le 2^{ème} terme de la 2^{ème} ligne de (2.18) est négatif sur tous les points d'une sphère de centre $\vec{0}$. Comme $B_0 > 0$, $\delta B_z(\vec{r})$ doit être négatif en tous les points d'une telle sphère. Nous allons montrer que ceci est incompatible avec (2.16)

- les fonctions $\varphi_{lm}(\vec{r}) = r^l Y_l^m(\theta, \varphi)$ forment une base de fonctions satisfaisant $\Delta \varphi_{lm}(\vec{r}) = 0$. Pour le voir, il suffit d'utiliser l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2} \quad (2.19)$$

où \vec{L} est l'opérateur moment cinétique orbital, et le fait que les harmoniques sphériques sont des fonctions propres de \vec{L}^2 de valeur propre $l(l+1)\hbar^2$. On obtient alors $\Delta r^l Y_l^m(\theta, \varphi) = 0$.

II-6

- Comme $\Delta \delta B_3(\vec{r}) = 0$, on peut développer $\delta B_3(\vec{r})$ sur les $r^l Y_e^m(\theta, \varphi)$

$$\delta B_3(\vec{r}) = \sum_l \sum_m c_{lm} r^l Y_e^m(\theta, \varphi) \quad (2.20)$$

avec $c_{00} = 0$ puisque $\delta B_3(\vec{0}) = 0$ d'après (2.15)

Comme $\int d\Omega Y_e^m(\theta, \varphi) = 0$ si $l \neq 0$, on en déduit que

$$\int_{|\vec{r}|=r} d\Omega \delta B_3(\vec{r}) = 0 \quad (2.21)$$

La valeur moyenne de $\delta B_3(\vec{r})$ sur une sphère de centre 0 est donc nulle. Il s'ensuit que $\delta B_3(\vec{r})$ ne peut pas être négatif en tous les points d'une telle sphère.

Ceci démontre le théorème de Wint, à savoir que le module d'un champ statique électrique ou magnétique ne peut pas avoir de maximum dans une région sans charge ni courant.

Par contre, nous verrons plus loin sur des exemples précis que des minima du module de \vec{E} ou \vec{B} peuvent exister.

5) Les contraintes imposées par le théorème de Wint

- Impossibilité de piéger un atome dans l'état fondamental au moyen de champs statiques.

L'énergie de l'état fondamental décroît quand on augmente le champ statique, électrique ou magnétique, dans lequel il est plongé (cas (b) de la Fig. 1). Pour le piéger, il faudrait un maximum de $|\vec{E}|$ ou $|\vec{B}|$, ce qui est impossible.

- Caractère exothermique des collisions inélastiques entre atomes piégés dans un champ statique.

Lors d'une collision inélastique entre 2 atomes piégés, les atomes peuvent retourner à l'état fondamental en gagnant de l'énergie cinétique, ce qui les fait en général sortir du piège.

S'ils pouvaient être piégés dans l'état fondamental, les collisions inélastiques seraient endothermiques et leur probabilité serait considérablement réduite si l'énergie cinétique des atomes entrant en collision était trop faible pour permettre à l'un des atomes de passer dans un niveau d'énergie supérieure.

6) Revue de quelques types de pièges non dissipatifs.

Dans les parties B et C de ce chapitre, nous étudierons en détail les pièges magnéto-statiques les plus couramment utilisés dans les expériences récentes réalisées sur l'Hydrogène et sur les atomes alcalins. Auparavant, nous passons rapidement en revue dans ce paragraphe les autres types de pièges non dissipatifs, en particulier ceux qui ne sont pas soumis aux contraintes du théorème de Wint.

Pièges laser

- Nous en avons indiqué plus haut le principe à la fin du § 3. Ces pièges reposent sur l'existence de gradients spatiaux de niveaux habillés, résultant eux-mêmes de variations spatiales de la fréquence de Rabi associée à un champ laser inhomogène. Ces pièges peuvent s'appliquer à des atomes dans l'état fondamental.

- Premier piège laser [4] sur des atomes de sodium

- Utilise un seul faisceau laser suffisamment focalisé et désaccordé pour que les forces dipolaires piègeantes l'emportent sur la pression de radiation expulsante.

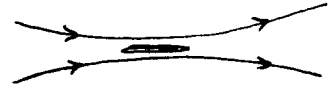


Fig. 3

- Alternance de phases de piégeage et de refroidissement, suivant la suggestion de [5] pour compenser l'échauffement dû aux fluctuations des forces dipolaires.
- Forme très allongée du piège

- Utilisation de désaccords plus grands (65 nm au lieu de 1.5 nm) et de puissances plus élevées [6]

Pièges appelés "FORT" (Far Off Resonance optical Traps)

- Pièges dipolaires croisés. Utilisation de faisceaux laser se croisant au voisinage de leurs foyers. La zone de piégeage se situe à l'intersection des 2 faisceaux et a une forme plus "ronde".

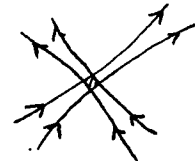


Fig. 4

Expériences réalisées à Stanford [7] et Paris [8].

Pièges microondes

- Toute l'analyse de la fin du § 3 porte sur des transitions dipolaires électriques. Elle s'applique également à des transitions dipolaires magnétiques, comme celle qui relie 2 niveaux hyperfins d'un état fondamental atomique. On peut ici aussi introduire des niveaux habillés dont la position varie dans l'espace si le champ microonde, et par suite la fréquence de Rabi associée, sont inhomogènes spatialement.

- Comme un champ laser, un champ microonde peut avoir un maximum en un point et il a été proposé de piéger des atomes dans le niveau hyperfin le plus bas en les faisant interagir avec le champ microonde inhomogène à l'intérieur d'une cavité [9].

Des pièges microondes de ce type ont été réalisés sur des alcalins [10].

Pièges magnétodynamiques

- Le principe est le même que celui des pièges de Paul pour les ions

- Partons d'un potentiel statique quadripolaire présentant une symétrie axiale

$$\Phi = A \left(z^2 - \frac{\rho^2}{2} \right) \quad \text{avec } \rho^2 = x^2 + y^2 \quad (2.22)$$

et modulons un tel potentiel à la fréquence Ω . On obtient

$$\Phi(t) = A \cos \Omega t \left(z^2 - \frac{\rho^2}{2} \right) \quad (2.23)$$

Quand $\cos \Omega t$ est positif, le potentiel est piègeant sur Oz , expulsant sur Ox et Oy . Une demi-période plus tard, il est expulsant sur Oz et piègeant sur Ox et Oy .

En étudiant le mouvement d'une particule dans un tel potentiel, on trouve que, pour toute une série de valeurs de A et Ω , l'atome reste confiné dans une région finie. A un micromouvement de fréquence Ω , se superpose un mouvement plus lent. On obtient ainsi un piège "magnétodynamique" avec une profondeur plus faible que celle des pièges magnétostatiques étudiés plus loin.

Notons que le micromouvement intervenant dans un tel piège est un mouvement du centre de masse de l'atome. Dans les pièges laser et microonde étudiés plus haut, il y a également un micromouvement, mais il est relatif à une variable interne, le dipôle électrique ou magnétique qui oscille sous l'effet du champ laser ou microonde.

De tels pièges magnétodynamiques ont été proposés pour piéger des atomes d'Hydrogène dans l'état de spin \downarrow [11]. Ils ont été réalisés sur des atomes de Césium [12].

Cavités gravitationnelles

- Combinaison de la force de pesanteur et de la répulsion produite par une onde lumineuse non résonnante désaccordée vers le bleu.

- "Trampoline" atomique sur l'onde évanescente à la surface d'un miroir parabolique [13]

La forme parabolique du miroir stabilise le mouvement transversal de l'atome [14] alors que ce mouvement est instable sur un miroir plan [15] [16].

Récente observation d'effets ondulatoires lors de la réflexion de l'onde de de Broglie sur le miroir pour atomes [17] [18].

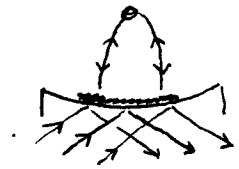


Fig. 5

- Autre configuration possible [19]

Nappes de lumière (avec $\delta > 0$) se croisant

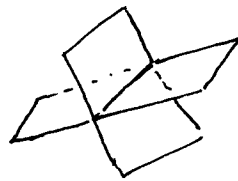
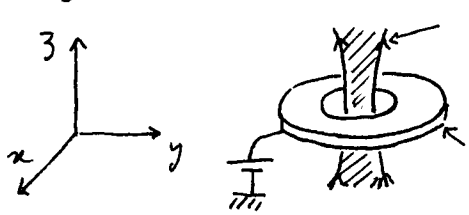


Fig. 6

Piège électrooptique [20]



Laser désaccordé vers le rouge
Electrode en forme d'anneau

Fig. 7

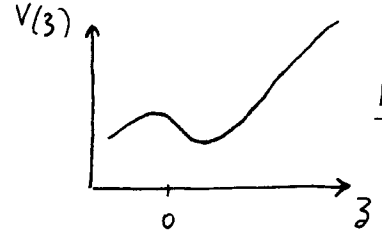


Fig. 8

- Le long de l'axe Oz , le champ électrique, nul au milieu de l'électrode, présente un maximum. L'effet Stark correspondant, négatif, fait apparaître un puits de potentiel et compense la gravité.

- L'effet Stark (statique) ne peut confiner latéralement (Règne de Wigner). Le confinement transverse est assuré par un faisceau laser focalisé et désaccordé vers le rouge.

- Avantages

- Le faisceau laser n'a pas à compenser la gravité et peut être plus large.
- Piège plus gros et de forme plus sphérique.
- Peut piéger un atome dans l'état fondamental.

References

- 1 - W. Wang, in "Laser cooled and trapped atoms", ed. by W. Phillips Natl. Bur. Stand. (U.S.) Special Public. 653 (1983), p. 74
W. Wang, Progr. Quant. Electr. 8, 181 (1984)
Voir aussi la généralisation du théorème de Wang par W. Ketterle et D. Pritchard, Appl. Phys. B54, 403 (1992)
- 2 - W. Wang, Phys. Rev. Lett. 45, 631 (1980)
- 3 - J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, J.O.S.A. B2, 1707 (1985)
- 4 - S. Chu, J. Bjorkholm, A. Ashkin, A. Cable, Phys. Rev. Lett. 57, 314 (1986)
- 5 - J. Dalibard, S. Reynaud, C. Cohen-Tannoudji, Opt. Commun. 47, 395 (1983)
- 6 - C. Miller, R. Chien, D. Heinzen, Phys. Rev. A47, R4567 (1994)
- 7 - C. Adams, H. Lee, N. Davidson, M. Kasevich, S. Chu
Phys. Rev. Lett. 74, 3577 (1995)
- 8 - A. Kuhn, H. Perrin, W. Hänsel, C. Salomon, à paraître dans
Optics and Photonics Series, Ultracold Atoms and BEC at EPEC'96
- 9 - C. Agosta, I. Silvera, H. Stoeff, B. Verhaar, Phys. Rev. Lett. 62, 2361 (1989)
- 10 - R. Spreuw, C. Gerz, L. Goldner, W. Phillips, S. Rolston, C. Westbrook,
M. Reynolds, I. Silvera, Phys. Rev. Lett. 72, 3162 (1994)
- 11 - R. Lovelace, C. Mehanian, T. Tammila, D. Lee.
Nature, 318, 30 (1985)
- 12 - E. Cornell, C. Monroe, C. Wieman, Phys. Rev. Lett. 67, 2439 (1991)
- 13 - C. Amini-off, A. Steane, P. Bouyer, P. Desbiolles, J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji
Phys. Rev. Lett. 71, 3083 (1993)
- 14 - H. Wallis, J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, Appl. Phys. B54, 407 (1992)
- 15 - M. Kasevich, D. Weiss, S. Chu, Opt. Lett. 15, 607 (1990)
- 16 - V. Balykin, V. Letokhov, Y. Ovchinnikov, A. Sidorov, Phys. Rev. Lett. 60, 2137 (1988)
- 17 - A. Steane, P. Szriftgiser, P. Desbiolles, J. Dalibard,
Phys. Rev. Lett. 74, 4972 (1995)
- 18 - P. Szriftgiser, D. Guéry-Odelin, M. Arndt, J. Dalibard
Phys. Rev. Lett. 77, 4 (1996)
- 19 - N. Davidson, H. Lee, C. Adams, M. Kasevich, S. Chu, Phys. Rev. Lett. 74, 1311 (1995)
- 20 - P. Lemonde, O. Moril, E. Peik, J. Reichel, H. Perrin, W. Hänsel,
C. Salomon, Europhys. Lett. 32, 555 (1995)

B - Piège magnétostatique quadrupolaire

① Configuration de courants

- 2 bobines circulaires de même rayon R , de même axe Oz , avec des centres situés en $z = +A$ et $z = -A$, parcourues par des courants opposés I et $-I$ supposés indépendants du temps (Fig. 9a)

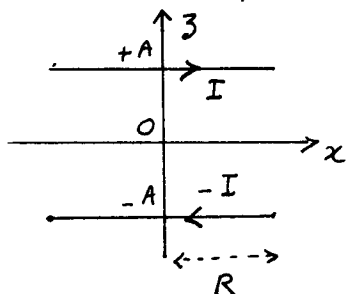


Fig. 9a

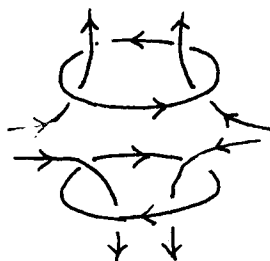


Fig. 9b

- Allure des lignes de champ (Fig. 9b). Le champ est nul au centre par symétrie et son module croît quand on s'éloigne du centre.
- Une formule utile : Composante suivant Oz du champ créé par la bobine en $z = +A$ de la figure 9a en un point de l'axe z

$$B_z(z, \rho=0) = \mu_0 I \frac{R^2}{2[R^2 + (A-z)^2]^{3/2}} \quad (3.1)$$

- Le but de ce § B est de calculer les caractéristiques du piège magnétostatique associé à la configuration de champ de la figure 9, puis de discuter les avantages et les inconvénients d'un tel piège, ainsi que certaines méthodes qui ont été proposées et démontrées pour remédier à ces inconvénients.

② Développement multipolaire des champs créé par des bobines d'axe Oz

- Comme $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}$ (en dehors des courants supposés statiques), on a

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \phi \quad (3.2)$$

où ϕ est un potentiel scalaire. L'équation $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ entraîne que :

$$\Delta \phi = 0 \quad (3.3)$$

- On peut donc développer ϕ sur les polynômes harmoniques $r^L Y_L^M(\theta, \varphi)$

$$\phi = \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^{+L} C_{LM} r^L Y_L^M(\theta, \varphi) \quad (3.4)$$

Comme nous nous limitons ici au champ créé par des bobines d'axe Oz , le potentiel ϕ est invariant par rotations autour de Oz et ne dépend donc pas de l'angle azimutal φ . Par ailleurs, la dépendance en φ de $Y_L^M(\theta, \varphi)$ est en $e^{iM\varphi}$. On en déduit que seuls les termes $M=0$ de (3.4) sont non nuls

$$\phi(r, \theta) = \sum_{L=0}^{\infty} C_L r^L Y_L^0(\theta) \quad (3.5)$$

- L'harmonique sphérique $Y_L^0(\theta)$ est proportionnelle au polynôme de Legendre $P_L(\cos \theta)$. Nous donnons ci-dessous, en coordonnées cylindriques (z, ρ, φ) , l'expression des polynômes $r^L Y_L^0(\theta)$ pour $L=0, 1, 2, 3$: (voir Ref. [21]). La normalisation est choisie pour que le coefficient des

III - 2) terme de puissance la plus élevée en z soit 1

$$r^L Y_L^0(\theta) \propto \begin{cases} 1 & \text{pour } L=0 \\ z & \text{pour } L=1 \\ z^2 - \frac{\rho^2}{2} & \text{pour } L=2 \\ z^3 - \frac{3}{2}\rho^2 z & \text{pour } L=3 \end{cases} \quad (3.6)$$

- En reportant (3.6) dans l'équation (3.2), on obtient l'expression des champs multipolaires $\vec{B}_0, \vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ correspondant à $L=0, 1, 2, 3$

$$\begin{cases} \vec{B}_0 = \vec{0} \\ \vec{B}_2 = 2z\hat{z} - \rho\hat{\rho} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{B}_1 = \hat{z} \\ \vec{B}_3 = 3\left(z^2 - \frac{\rho^2}{2}\right)\hat{z} - 3\rho z\hat{\rho} \end{cases} \quad (3.7)$$

où \hat{z} et $\hat{\rho}$ sont les vecteurs unitaires le long des directions z et ρ .

③ Expression du champ quadripolaire

- D'après ce qui précède, le champ créé, au voisinage de l'origine O , par des bobines d'axe Oz peut s'écrire

$$\vec{B} = b_1 \vec{B}_1 + b_2 \vec{B}_2 + b_3 \vec{B}_3 + \dots \quad (3.8)$$

où les b_i sont des coefficients et les \vec{B}_i sont donnés en (3.7)

- Revenons au champ quadripolaire de la figure 9. Une réflexion par rapport à l'origine change I en $-I$. Le champ \vec{B} créé par une telle configuration de courant est donc impair dans une telle réflexion. Comme la parité de $Y_L^0(\theta)$ est $(-1)^L$ et que \vec{B}_2 est le gradient de $r^L Y_L^0(\theta)$, on en déduit que seuls les L pairs apparaissent dans le développement (3.8)

$$\vec{B} = b_2 \vec{B}_2 + b_4 \vec{B}_4 + \dots \quad (3.9)$$

- Si on se limite au terme d'ordre le plus bas dans (3.9) et qu'on utilise (3.7) on obtient pour les composantes du champ en coordonnées cylindriques

$$B_z = 2b z \quad B_\rho = -b \rho \quad B_\varphi = 0 \quad (3.10)$$

où b est une constante que l'on peut calculer en développant l'expression (3.1) au voisinage de $z=0$ et en sommant les contributions des 2 bobines de la figure (9.a). On obtient ainsi

$$b = \frac{3}{2} \mu_0 I \frac{AR^2}{(A^2 + R^2)^{5/2}} \quad (3.11)$$

Un tel champ est appelé quadripolaire car il correspond à $L=2$

- Le module du champ (3.10) vaut

$$\begin{aligned} |\vec{B}| &= b \sqrt{4z^2 + \rho^2} = br \sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta} \\ &= br \sqrt{3\cos^2\theta + 1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Le long d'une droite passant par l'origine, $|\vec{B}|$ croît linéairement avec la distance à l'origine r , avec un coefficient qui dépend de l'angle θ .

- Le module (3.12) de $|\vec{B}|$ a clairement un minimum à l'origine. Il est donc possible (à la limite adiabatique) de piéger dans un tel champ des atomes dont l'énergie Zeeman croît avec $|\vec{B}|$ ("low-field seekers" - Voir Fig. 1 et discussion du § A 3 du cours II). Si μ est le moment magnétique de tels atomes, le potentiel de piégeage $W = \mu |\vec{B}|$ vaut donc

$$W = \mu |\vec{B}| = \mu b \sqrt{4z^2 + \rho^2} = \mu b r \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1} \quad (3.13)$$

- Ordre de grandeur des profondeurs de puits : Si $|\vec{B}|$ varie de $B_0 = 200$ gauss entre le minimum de $|\vec{B}|$ et la valeur de $|\vec{B}|$ à l'extérieur du puits, l'équation $\mu B_0 = k_B T$ donne pour $\mu = 1$ magnéton de Bohr, $T \approx 13$ mK. Seuls des atomes prérefroidis peuvent être piégés.

- Les expressions (3.12) et (3.13) ne sont valables qu'au voisinage immédiat de l'origine. On peut, comme dans la référence [21], calculer les termes suivants du développement (3.9). Le rayon de convergence de la série est cependant fini et un calcul exact de $|\vec{B}|$ devient nécessaire loin du centre. La figure (10) donne par exemple les lignes de contours de $|\vec{B}|$ (lignes d'égale valeur de $|\vec{B}|$) obtenues à partir d'un calcul exact [ref (21)]. Quand on se déplace le long de Oz à partir de 0, $|\vec{B}|$ croît passe par un maximum, puis décroît. Il en est de même lorsqu'on se déplace le long de Ox . Ces 2 maxima donnent les hauteurs des barrières de potentiel le long de Oz et Ox . La figure 10 est tracé dans le cas où ces 2 hauteurs sont égales, ce qui est réalisé quand

$$A/R = 0.6267$$

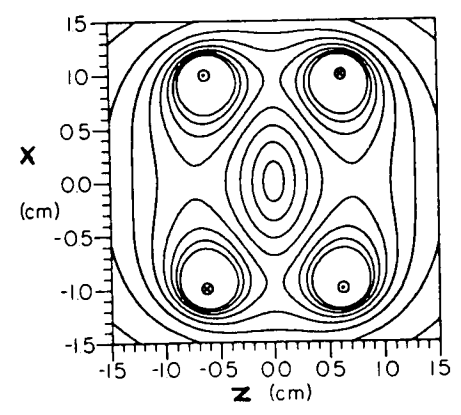


Fig. 10 (extraite de [21])

4) Un autre exemple de configuration

- On peut également réaliser des configurations où seuls les termes L impair du développement (3.8) sont non nuls. Le champ \vec{B} est alors pair par réflexion par rapport à l'origine [$r^L Y_L^0(\theta)$ est impair si L est impair et son gradient est pair].

- Une telle situation est réalisée par exemple si l'on prend 3 bobines de même axe Oz (Fig. 11). La 1^{ère} bobine, dans le plan xOy , est parcourue par un courant I . Les 2 autres bobines, de même rayon, sont disposées symétriquement par rapport à la 1^{ère} et sont parcourues par le même courant I' . En choisissant des sens opposés pour I et I' et en ajustant le rapport $|I/I'|$, on peut annuler le terme $b_1 \vec{B}_1$ de (3.8) et obtenir un champ qui, à l'ordre le plus bas, se réduit au champ octupolaire \vec{B}_3 de (3.7)

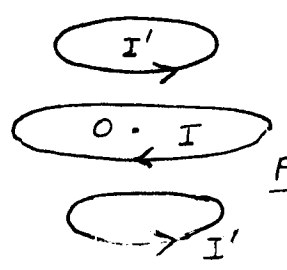


Fig. 11

- On a alors pour les composantes de \vec{B} en coordonnées cylindriques

$$B_z = b(z^2 - \frac{\rho^2}{2}) \quad B_\rho = -b\rho z \quad B_\varphi = 0 \quad (3.14)$$

ou $b = 3b_3$ est un coefficient. le module $|\vec{B}|$ de \vec{B} vaut

$$|\vec{B}| = b [z^4 + \frac{\rho^4}{4}]^{1/2} = br^2 [\cos^4\theta + \frac{\sin^4\theta}{4}]^{1/2} \quad (3.15)$$

Le long d'une droite passant par 0, $|\vec{B}|$ croit quadratiquement avec r , avec un coefficient qui dépend de l'angle θ .

Remarques

- (i) Les 3 bobines de la figure 11 peuvent avoir même rayon et être enroulées sur le même cylindre.
- (ii) Le terme $L=1$ de (3.8) peut être nul si les 3 bobines de la figure 11 sont sur une même sphère de rayon S , les latitudes des 2 bobines extrêmes valant $+\pi/4$ et $-\pi/4$.
Le coefficient b de (3.14) vaut alors $b = 15\mu_0 I / 8S^3$ (ref [21]).

5) Pertes dues aux transitions de Majorana

Existence de transitions non adiabatiques

- Revenons au piège quadrupolaire et considérons une trajectoire rectiligne le long de Ox . D'après (3.10), le champ décroît quand on s'approche de 0, s'annule et change de signe [flèches simples de la figure 12]

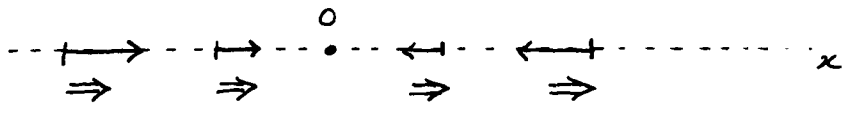


Fig. 12

Le spin (arrivant de la gauche) et initialement orienté le long du champ ne peut pas basculer lorsque l'atome passe en 0 et que le champ change de signe. Il se retrouve alors dans un état antiparallèle au champ et donc non piégeant [flèches doubles de la Fig. 12]

- Par contre, si l'atome passe suffisamment loin de 0, le champ qu'il "voit" ne s'annule pas. Il tourne en passant par une valeur minimale B_{min} . Si la fréquence de Larmor Ω_L autour de B_{min} est grande devant la fréquence de rotation apparente du champ Ω_R , le spin reste orienté le long du champ et l'expression (3.13) du potentiel de piégeage est valable

- Les transitions non adiabatiques qui apparaissent entre états de spins piégeants et non piégeants lorsque la condition $\Omega_L \gg \Omega_R$ n'est pas vérifiée sont appelées "transitions de Majorana" et introduisent des fuites hors du piège avec un temps $1/\tau_0$ dont nous calculons maintenant un ordre de grandeur.

Ordre de grandeur des temps de fuite. (ref. [22])

- Evaluons tout d'abord un ordre de grandeur de la vitesse de rotation Ω_R du champ vu par un atome, de masse m , de moment magnétique μ , passant à la vitesse v à une distance minimale a du centre 0 du piège (Fig. 13)

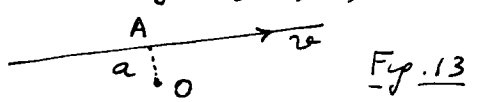


Fig. 13

- L'angle dont tourne le champ "vu" est de l'ordre de 1 quand l'atome se déplace sur une distance de l'ordre de a au voisinage de son point d'approche minimale A. On a donc

$$\Omega_R \sim \frac{1}{a/v} = \frac{v}{a} \quad (3.16) \quad \text{III-5}$$

- D'après les résultats du § 3 ci-dessus, le module de \vec{B} au point A est de l'ordre de $B'a$, où B' est le gradient de champ. La fréquence de Larmor minimale Ω_L est donc de l'ordre de

$$\Omega_L \sim \frac{1}{\hbar} \mu B'a \quad (3.17)$$

- Les transitions non adiabatiques deviennent importantes quand $\Omega_L \sim \Omega_R$, c'est à dire quand a est de l'ordre de ou inférieur à a_0 , où a_0 est la valeur de a pour laquelle $\Omega_L = \Omega_R$

$$a_0 \sim \sqrt{\frac{\hbar v}{\mu B'}} \quad (3.18)$$

Tout atome de vitesse v arrivant dans une sphère de rayon a_0 autour de O sera donc perdu (en réalité, il s'agit plutôt d'un ellipsoïde car les gradients ne sont pas les mêmes sur les deux axes)

- Calculons l'ordre de grandeur du flux d'atomes traversant une telle sphère. On suppose qu'il y a N atomes piégés dans un volume l^3 , où l est la taille du piège. Un tel flux F , qui est égal au nombre d'atomes perdus par unité de temps $-dN/dt$, est de l'ordre de

$$F = -\frac{dN}{dt} \sim \frac{N}{l^3} v a_0^2 \quad (3.19)$$

En combinant (3.18) et (3.19), on obtient $dN/dt \sim -N/\tau_0$ où

$$\frac{1}{\tau_0} \sim \frac{1}{l^3} \frac{\hbar v^2}{\mu B'} \quad (3.20)$$

- On peut encore transformer une telle expression du temps de perte $1/\tau_0$ en reliant v et l par le raisonnement suivant. A l'extrémité du piège, le champ vaut $B'l$, puisque l est la taille du piège, et l'énergie, essentiellement potentielle, est de l'ordre de $\mu B'l$. Cette énergie potentielle se transforme en énergie cinétique quand les atomes se rapprochent de O , de sorte que leur vitesse v au point d'approche minimale est donnée par

$$m v^2 \sim \mu B'l \quad (3.21)$$

En reportant (3.21) dans (3.20), on obtient alors

$$\tau_0 \sim \frac{m}{\hbar} l^2 \quad (3.22)$$

A cause des transitions de Majorana, les atomes ne peuvent donc rester piégés que pendant un temps τ_0 , d'autant plus court que la taille l du piège est plus petite.

- De telles fuites sont très gênantes pour l'efficacité du refroidissement évaporatif. Quand un tel refroidissement commence, $m v^2$ diminue, et les atomes se concentrent dans un volume l^3 autour de O qui, d'après (3.21), est de plus en plus petit. Mais d'après (3.22), le temps de vie est de plus en plus court et empêche la densité spatiale des atomes d'augmenter.

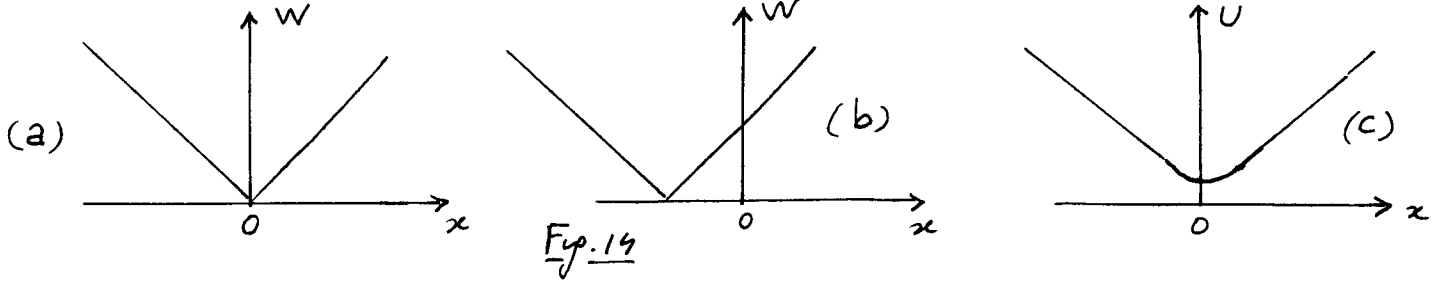
- Ordres de grandeur. Pour ^{87}Rb , $m/\hbar \sim 10^5 \text{ s/cm}^2$.

Pour un piège de $200 \mu\text{m} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$, on obtient d'après (3.22) une durée de vie de l'ordre de 40 s .

⑥ Le piège TOP ("Time-averaged Orbiting Potential - Ref. [22])

Motivations - Idée générale

- Le but poursuivi est de réduire les pertes dues aux transitions de Majorana en supprimant le zéro de champ au centre du piège.
- L'idée, mise en oeuvre dans la référence [22], consiste à ajouter un champ uniforme \vec{B}_b le long de Ox , le potentiel de piégeage, qui était de forme triangulaire et centré en $x=0$ (Fig. 14 a) est alors déplacé le long de Ox en gardant la même forme (Fig. 14 b). On fait tourner le champ \vec{B}_b dans le plan xOy à une vitesse angulaire ω_b , suffisamment rapide devant la fréquence du mouvement orbital des atomes dans le piège pour que ces atomes voient un potentiel effectif moyen, et suffisamment lente devant la fréquence de Larmor du spin des atomes piégés pour que ces spins puissent suivre adiabatiquement la rotation du champ (Nous reviendrons plus loin sur les conditions de validité de ces approximations) Nous allons voir que le potentiel effectif moyen n'a alors plus de zéro en $\vec{r}=\vec{0}$ et qu'il est harmonique au voisinage du centre (Fig. 14 c)



- L'idée générale est donc de faire tourner le zéro du piège quadrupolaire suffisamment loin du centre O du piège et suffisamment rapidement pour que les atomes ne tombent plus dans le "trou".

Calcul du potentiel effectif moyen

- Les composantes cartésiennes du champ quadrupolaire valent, d'après (3.10)

$$B_x = -B'x \quad B_y = -B'y \quad B_z = 2B'z \quad (3.23)$$

où $B' = b$ est le gradient de champ suivant Ox et Oy , 2 fois plus petit que le gradient suivant Oz et de signe opposé.

- Les composantes cartésiennes du champ d'amplitude B_b tournant à la fréquence ω_b autour de Oz sont égales à

$$B_b \cos \omega_b t \quad B_b \sin \omega_b t \quad 0 \quad (3.24)$$

- Le potentiel de piégeage $W(x, y, z, t)$ est le produit du moment magnétique μ par le module du champ magnétique total

$$W(x, y, z, t) = \mu \left[(B_b \cos \omega_b t - B'x)^2 + (B_b \sin \omega_b t - B'y)^2 + 4B'^2 z^2 \right]^{1/2}$$

$$= \mu B_b \left[1 + (x^2 + y^2 + 4z^2) \frac{B'^2}{B_b^2} - 2x \frac{B'}{B_b} \cos \omega_b t - 2y \frac{B'}{B_b} \sin \omega_b t \right]^{1/2} \quad (3.25)$$

- Le développement de (3.25) à l'ordre 2 inclus en x, y, z donne alors :

$$W(x, y, z, t) = -\mu B_b - \mu \frac{B'^2}{2B_b} (x^2 + y^2 + 4z^2) + \mu \frac{B'^2}{8B_b} (4x^2 \cos^2 \omega_b t + 4y^2 \sin^2 \omega_b t) \quad (3.26)$$

En moyennant (3.26) sur le temps, on obtient finalement pour le potentiel effectif moyen

$$V(x, y, z) = -\mu B_b - \mu \frac{B'^2}{4B_b} (\rho^2 + 8z^2) \quad (3.27)$$

L'allure de ce potentiel est représentée sur la figure (14c). Il n'est plus nul en 0 et varie paraboliquement le long de l'axe Oz et des axes perpendiculaires à Oz. La courbure en 0 est inversement proportionnelle au champ B_b .

Conditions de validité des approximations

- Les fréquences du mouvement d'un atome dans un piège quadrupolaire sont de l'ordre d'une centaine de Hz. Il est donc facile de réaliser un champ tournant à une fréquence ω_b beaucoup plus élevée (quelques KHz), de manière que l'atome se déplace peu pendant une période $2\pi/\omega_b$ du champ tournant et qu'il ne soit sensible qu'à la moyenne temporelle du potentiel (3.25).
- Etudions maintenant à quelles conditions le spin peut suivre adiabatiquement le champ tournant.

Considérons tout d'abord un atome au centre du piège. Comme le champ quadrupolaire est nul, l'atome ne voit que le champ tournant. Si l'on se place dans le référentiel tournant à la fréquence ω_b , le spin voit un champ transverse fixe, d'amplitude B_b , et un champ inertiel vertical $\frac{\omega_b}{\gamma} \hat{z}$ dû à la rotation (γ est le rapport gyromagnétique), beaucoup plus petit que le précédent, si ω_b est petit devant la fréquence de Larmor $\omega_L = B_b/\gamma$ autour de B_b . Si le spin est orienté le long du champ total dans le référentiel tournant, champ qui est constant, il reste orienté le long de ce champ au cours du temps. Dans le référentiel du laboratoire, le spin tourne à la fréquence ω_b en restant pratiquement parallèle au champ tournant si $\omega_b \ll \omega_L$.

Considérons maintenant un point à une distance ρ de 0 dans le plan xOy . Le champ quadrupolaire est fixe et vaut en ce point $-B'\rho$. Il s'y ajoute le champ tournant. Si $B'\rho < B_b$, le champ total vu par l'atome oscille à la fréquence ω_b entre une valeur maximale $B_b + B'\rho$ et une valeur minimale $B_b - B'\rho$. Si la fréquence de Larmor autour du champ minimal n'est pas assez grande devant ω_b , le spin ne pourra plus suivre adiabatiquement le champ et l'expression (3.27) ne sera plus valable. En particulier, si $\rho = \rho_0$, où ρ_0 est donné par

$$B_b = B'\rho_0 \quad (3.28)$$

le champ total vu par le spin s'annule à certains instants et l'approximation adiabatique pour le spin ne sera certainement plus valable. Les conditions de validité de l'approximation

adiabatique sont donc

$$\omega_b \ll \omega_L \quad (a)$$

$$\rho \ll \rho_0 \quad (b) \quad (3.29)$$

Avec des champs tournants de l'ordre de 10 gauss, on obtient des fréquences de Larmor de l'ordre de 10 MHz, c-à-d grandes devant ω_b . Par ailleurs, avec des gradients de champ de l'ordre d'une centaine de Gauss/cm, ρ_0 est, d'après (3.28), de l'ordre de 1 mm et est suffisamment grand devant la taille du piège, de l'ordre d'une fraction de mm.

Discussion physique

- L'intérêt du piège quadropolaire est d'avoir des parois qui varient linéairement avec z et ρ . Il est donc plus confinant pour les atomes qu'un piège parabolique. Pour le voir de manière plus précise, considérons l'ordre de grandeur du gradient de champ B' et de la courbure B'' du champ créé par une bobine de rayon R_c . Soit B_0 le champ au centre de cette bobine

$$B' \simeq \frac{B_0}{R_c} \quad (a) \quad B'' \simeq \frac{B_0}{R_c^2} = \frac{B'}{R_c} \quad (b) \quad (3.30)$$

Soient l_1 (et l_2) les dimensions d'un nuage d'atomes de température T confinés dans un piège linéaire (et parabolique). On a

$$\mu \frac{B_0}{R_c} l_1 \simeq k_B T \quad \mu \frac{B_0}{R_c^2} l_2^2 \simeq k_B T \quad (3.31)$$

On en déduit

$$l_1 \simeq l_2 \left(\frac{l_2}{R_c} \right) \ll l_2 \quad (3.32)$$

car l_2 est très petit devant R_c .

- En fait, comme nous l'avons vu plus haut au § 5, la présence du zéro en $\vec{r} = \vec{0}$ dans le piège quadropolaire introduit des pertes de plus en plus élevées quand $l_1 \rightarrow 0$. La solution du TOP étudié dans ce paragraphe élimine cette difficulté, mais remplace le piège linéaire par un piège parabolique. Montrons cependant que la courbure du TOP est plus élevée que celle d'un piège parabolique satisfaisant (3.30.b). L'équation (3.27) montre en effet que la courbure du TOP est, compte tenu de (3.28) donnée par

$$(B'')_{\text{TOP}} \simeq \frac{B'^2}{B_b} \simeq \frac{B'}{\rho_0} \quad (3.33)$$

Elle est donc R_c/ρ_0 fois plus grande que la courbure d'un piège parabolique ordinaire. En effet, ρ_0 peut être plus grand que la taille l du piège, pour satisfaire à (3.29.b), tout en étant très petit devant R_c , puisque $R_c \gg l$.

Etude expérimentale

- Le 1^{er} piège pour atomes neutres a été réalisé en 1985 au NIST Gaithersburg sur des atomes de sodium (Ref [23]). C'est un piège quadropolaire. La durée de piégeage des atomes, de l'ordre de 1 s, était limitée, non pas par les transitions non adiabatiques

de Majorana, mais par les collisions avec le gaz résiduel.

- La référence [22] présente la 1^{ère} étude des pertes dues aux transitions de Majorana.

Voir par exemple la figure 15 qui donne l'évolution du temps τ de piégeage avec la taille du piège. Les triangles correspondent à un piège quadrupolaire et sont en accord avec les prédictions théoriques (ligne en pointillé) déduites de (3.22) et incluant l'effet des collisions avec le gaz résiduel. La transformation du piège quadrupolaire en TOP fait disparaître en grande partie les transitions de Majorana et allonge considérablement τ (ronds de la figure)

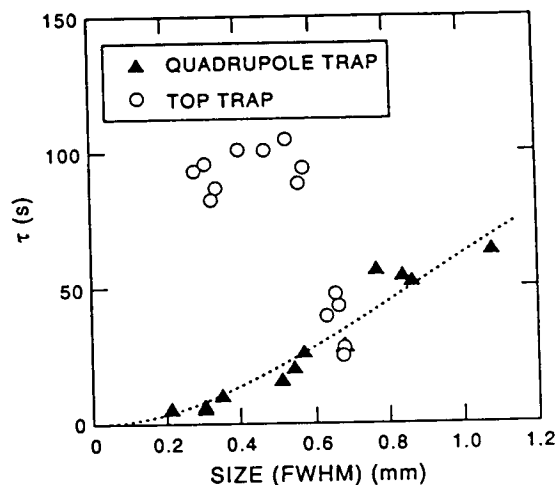


Fig. 15 (extraite de [22])

Une autre solution possible : Le "bouchon optique" (ref. [24])

Une autre solution pour éliminer le zéro du piège quadrupolaire en $\vec{r} = \vec{0}$ consiste à ajouter un faisceau laser focalisé en $\vec{r} = \vec{0}$ et désaccordé vers le bleu, de manière à repousser les atomes et à les empêcher d'arriver en $\vec{r} = \vec{0}$. On "bouche" en quelque sorte le trou du piège avec un potentiel optique répulsif.

Références (suite de la page II-9)

- 21 - T. Bergeman, G. Erez, H. Metcalf, Phys. Rev. A 35, 1535 (1987)
- 22 - W. Petrich, M. Anderson, J. Ensher, E. Cornell, Phys. Rev. Lett. 74, 3352 (1995)
- 23 - A. Migdall, J. Prodan, W. Phillips, T. Bergeman, H. Metcalf Phys. Rev. Lett. 54, 2596 (1985)
- 24 - K. Davis, M. Mewes, M. Andrews, N. van Druten, D. Durfee, D. Kurn, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. 75, 3969 (1995)

C - Piège de Ioffé-Pritchard

① Configurations de courants

- 4 fils verticaux (Fig. 16 a) passant par les 4 sommets d'un carré dans le plan xOy (Fig. 16 b) et parcourus par des courants valant, soit I , soit $-I$. L'allure des lignes de champ dans un plan horizontal est représentée sur la figure 16 b. Champ nul au centre avec des gradients de signes opposés le long de Ox et Oy .
- Aux 4 fils précédents on ajoute 2 bobines circulaires identiques, parcourues par le même courant I' , centrées autour de Oz (axe de symétrie des 4 fils), écartées d'une distance supérieure à celle correspondant à la position de Helmholtz. Le champ longitudinal le long de Oz passe donc par un minimum en $z=0$.
- Le champ des 4 fils permet de confiner le mouvement des atomes dans le plan xOy , celui des 2 bobines le long de l'axe Oz . Nous allons calculer plus loin le champ total et vérifier que son module peut bien être minimal en $\vec{r} = \vec{0}$. Nous discuterons ensuite les avantages et inconvénients d'un tel piège et le comparerons au piège TOP étudié dans la partie B.

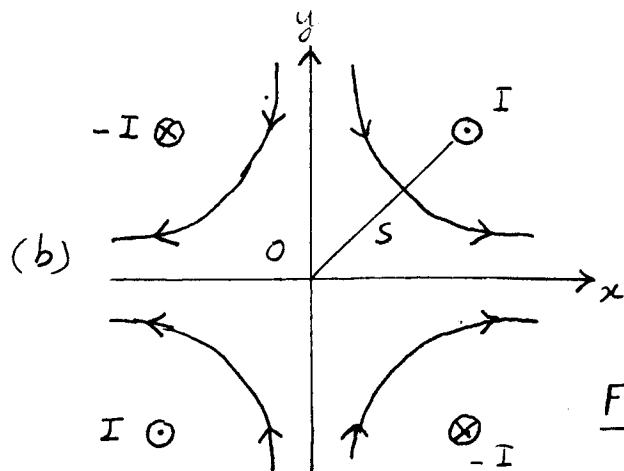
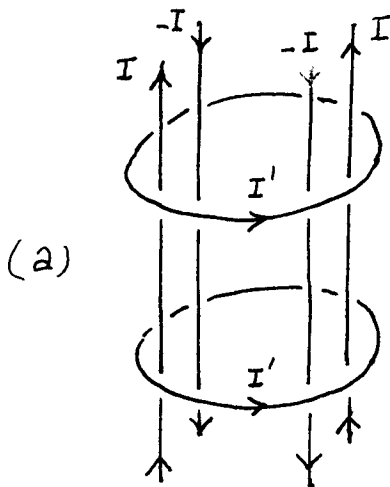


Fig. 16

Une formule utile

Composantes en coordonnées cylindriques du champ créé au voisinage de O par un fil vertical parallèle à Oz , passant par le point A de coordonnées polaires S, α et parcouru par un courant I (Fig. 17)

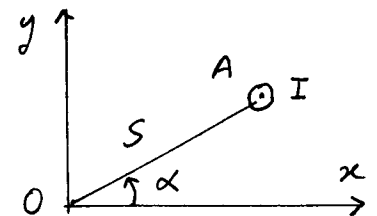


Fig. 17

$$B_\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{S \sin(\varphi - \alpha)}{S^2 + \rho^2 - 2S\rho \cos(\varphi - \alpha)} \quad B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{S \cos(\varphi - \alpha) - \rho}{S^2 + \rho^2 - 2S\rho \cos(\varphi - \alpha)} \quad B_z = 0 \quad (4.1)$$

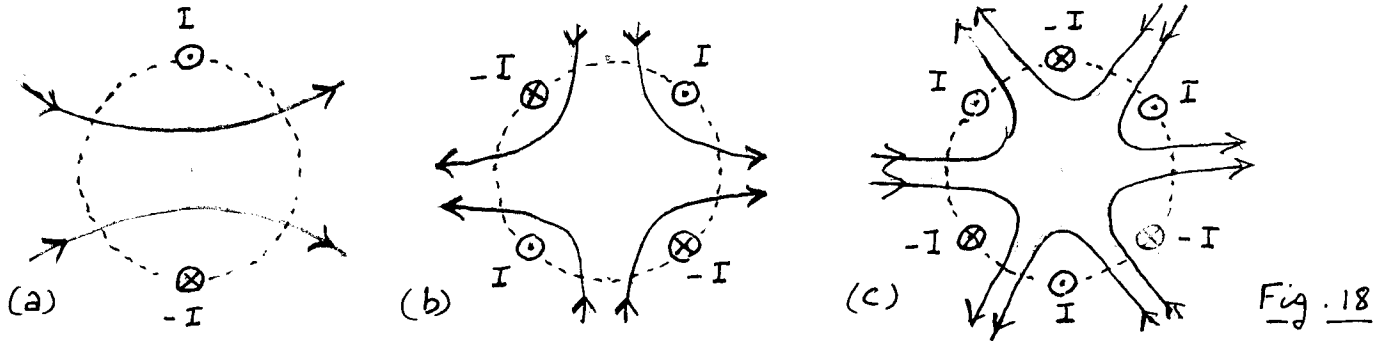
② Champ créé par des fils verticaux symétriquement disposés (ref [21])

Configurations considérées

Les figures 18 a, b, c représentent les intersections des fils

IV-2)

avec un plan horizontal pour 3 configurations formées de 2 fils (Fig. 18 a), 4 fils (Fig. 18 b), 6 fils (Fig. 18 c). Les points d'intersection sont sur un cercle de rayon S et font avec l'axe Ox des angles $\pm \pi/2$ (a), $\pm \pi/4$ et $\pm 3\pi/4$ (b), $\pm \pi/6, \pm 3\pi/6, \pm 5\pi/6$ (c). Les fils sont parcourus par des courants valant alternativement $+I$ et $-I$. Les lignes de champ sont représentées par les courbes



Considérations de symétrie

- D'après les résultats du § B2, on peut écrire

$$\vec{B} = \sum_L \sum_M c_{LM} \vec{B}_{LM} \quad (4.2.a)$$

$$\vec{B}_{LM} = \vec{\nabla} r^L Y_L^M(\theta, \varphi) \quad (4.2.b)$$

- Les configurations de la figure 18 sont invariantes dans des rotations autour de Oz d'un multiple de $2\pi, \pi, 2\pi/3$ respectivement. Les coordonnées cylindriques B_ρ et B_φ de \vec{B} sont donc des fonctions périodiques de φ , de période $2\pi, \pi, 2\pi/3$. Comme la dépendance angulaire en φ de $Y_L^M(\theta, \varphi)$ est $e^{iM\varphi}$, on en déduit que M doit être un multiple de $\pm 1, \pm 2, \pm 3$. Si on se limite, comme nous le ferons ici, aux termes d'ordre le plus bas dans le développement (4.2.a), les seuls termes à prendre en compte sont $L=1, M=\pm 1$ pour a, $L=2, M=\pm 2$ pour b, $L=3, M=\pm 3$ pour c. Les champs magnétiques des configurations de la figure 18 a, b, c sont donc des combinaisons linéaires de la partie réelle et de la partie imaginaire de $\vec{B}_{LL} = \vec{\nabla} r^L Y_L^L(\theta, \varphi)$ avec $L=1$ pour a, $L=2$ pour b, $L=3$ pour c.

Calcul du champ

- Comme $Y_L^L(\theta, \varphi) \propto (\sin \theta)^L e^{iL\varphi}$ et que $\rho = r \sin \theta$, on a

$$\vec{B}_{LL} = \vec{\nabla} (\rho^L e^{iL\varphi}) \quad (4.3)$$

- On en déduit l'expression de \vec{B}_{LL} en coordonnées cylindriques

$$\vec{B}_{LL} = L \rho^{L-1} e^{iL\varphi} \hat{\rho} + iL \rho^{L-1} e^{iL\varphi} \hat{\varphi} \quad (4.4)$$

où $\hat{\rho}$ et $\hat{\varphi}$ sont les vecteurs unitaires du système de coordonnées cylindriques. Les parties réelle et imaginaire de (4.4) valent

$$\text{Re } \vec{B}_{LL} = L \rho^{L-1} \cos L\varphi \hat{\rho} - L \rho^{L-1} \sin L\varphi \hat{\varphi} \quad (4.5.a)$$

$$\text{Im } \vec{B}_{LL} = L \rho^{L-1} \sin L\varphi \hat{\rho} + L \rho^{L-1} \cos L\varphi \hat{\varphi} \quad (4.5.b)$$

- Il est clair sur la figure 18 que $(\vec{B}_{LL})_p$ est non nul pour $\varphi=0$. (IV-3)
 les champs des configurations de la figure 18 sont donc proportionnels, à l'ordre le plus bas, à $\text{Re } \vec{B}_{LL}$.

Au voisinage de $\rho=0$, le module de ce champ est indépendant de ρ pour le champ dipolaire de la figure 18 a, linéaire en ρ pour le champ quadrupolaire de la figure 18 b, quadratique en ρ pour le champ sextupolaire de la figure 18 c.

③ Calcul du champ dans un piège de Ioffe-Pritchard

Champ des fils

D'après (4.5.a) écrit pour $L=2$, les composantes cylindriques de ce champ valent

$$B_\rho = c_2 \rho \cos 2\varphi \quad B_\varphi = -c_2 \rho \sin 2\varphi \quad B_z = 0 \quad (4.6)$$

où c_2 est une constante que l'on peut calculer en développant (4.1) au voisinage de $\rho=0$ et en sommant les contributions correspondant à $\alpha = \pm \pi/4$, $\alpha = \pm 3\pi/4$. On trouve

$$c_2 = \frac{2\mu_0 I}{\pi S^2} \quad (4.7)$$

Champ des bobines

- Utilisons les résultats des §§ B2 et B3 donnant le champ créé par des bobines d'axe Oz . Le champ est une superposition linéaire des champs $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3 \dots$ écrits en (3.7). Comme la configuration des 2 bobines de la figure 16 a est invariante dans une réflexion par rapport à l'origine, le champ \vec{B} créé par les 2 bobines est pair et ne se développe donc que sur $\vec{B}_1, \vec{B}_3, \vec{B}_5 \dots$. Nous ne gardons que les 2 premiers termes et obtenons, compte tenu de (3.7)

$$\vec{B} = c_1 \hat{z} + c_3 \left[\left(z^2 - \frac{\rho^2}{2} \right) \hat{z} - z\rho \hat{\rho} \right] \quad (4.8)$$

où c_1 et c_3 sont 2 constantes calculables à partir de (3.1)

- Le premier terme de (4.8) est un champ uniforme parallèle à Oz , le second un champ quadratique en z et ρ . Le long de l'axe Oz ($\rho=0$), le second terme de (4.8) vaut $c_3 z^2$. Le coefficient c_3 est donc nul quand les bobines sont en position de Helmholtz (le champ varie alors en z^4 au voisinage de $z=0$). Si les bobines sont plus écartées que dans la position de Helmholtz, le champ passe par un minimum en $z=0$ et c_3 est alors positif.

- Les composantes cylindriques du champ (4.8) valent

$$B_\rho = -c_3 z \rho \quad B_\varphi = 0 \quad B_z = c_1 + c_3 \left(z^2 - \frac{\rho^2}{2} \right) \quad (4.9)$$

Champ total

- En ajoutant (4.6) et (4.9), on obtient pour les composantes

cylindriques du champ total

$$\begin{cases} B_\rho = c_2 \rho \cos 2\varphi - c_3 z \rho \\ B_\varphi = -c_2 \rho \sin 2\varphi \\ B_z = c_1 + c_3 \left(z^2 - \frac{\rho^2}{2} \right) \end{cases} \quad (4.10)$$

- Le module carré du champ total vaut, à l'ordre 3 inclus en z et ρ

$$|\vec{B}|^2 = c_1^2 + 2c_1 c_3 z^2 + (c_2^2 - c_1 c_3) \rho^2 - 2c_2 c_3 \cos 2\varphi z \rho^2 \quad (4.11)$$

Conditions de confinement

- Le long de Oz

Le coefficient c_1 est positif car on prend l'axe Oz parallèle à la composante \vec{B}_1 uniforme du champ créé par les 2 bobines. Pour avoir un minimum de $|\vec{B}|^2$ le long de Oz , il faut $c_1, c_3 > 0$. On en déduit qu'il faut

$$c_3 > 0 \quad (4.12)$$

Les 2 bobines doivent donc être plus écartées que dans la position de Helmholtz

- Le long d'une direction radiale

Pour avoir un minimum de $|\vec{B}|^2$ en $\rho=0$, il faut :

$$c_2^2 - c_1 c_3 > 0 \quad (4.13)$$

Comme c_1 et c_3 sont positifs, il faut que c_2 soit suffisamment grand, le champ créé par les fils doit être suffisamment intense.

A cause du dernier terme de (4.11), en $z \rho^2$, il faut des valeurs encore plus grandes de c_2 pour confiner les atomes radialement en dehors du plan $z=0$.

Expression du potentiel de piégeage W

- A l'approximation adiabatique, $W = \mu |\vec{B}|$ (on suppose que les atomes sont des chercheurs de champ faible, μ étant le module du moment magnétique). Prenons la racine carrée de (4.11) et effectuons un développement limité à l'ordre 2 inclus en z et ρ . Il vient

$$W = \mu \left[c_1 + c_3 z^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{c_2^2}{c_1} - c_3 \right) \rho^2 \right] \quad (4.14)$$

Quelques autres configurations utilisées

La configuration de la figure 16 a porté le nom de Ioffé-Pritchard parce qu'elle a été utilisée pour le confinement des plasmas par Ioffé [25], puis par Pritchard pour le piégeage d'atomes neutres [26]. Plusieurs configurations voisines ont été proposées et utilisées, certaines différenciant les unes des autres par la manière dont on referme les courants des fils verticaux, d'autres utilisant d'autres types de géométries. Nous en indiquons ici quelques unes sans entrer dans le détail du calcul du champ.

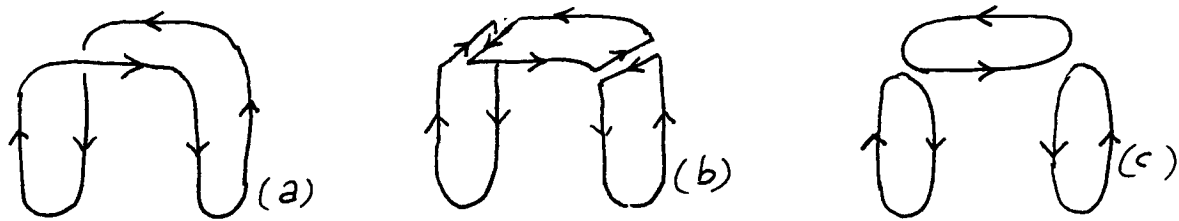


Fig. 19

- C'est la configuration de courants correspondant au circuit fermé de la figure 19.a
- On peut imaginer qu'on sépare ce circuit en 3 circuits fermés en ajoutant 2 paires de fils ^{voisins} parcourus par des courants opposés (Fig 19b)
- Le champ du piège baseball est donc voisin du champ quadripolaire produit par les 2 bobines verticales de la figure 19c auquel on ajoute le champ de la bobine horizontale.

Piège en "fleur de trèfle" [27]

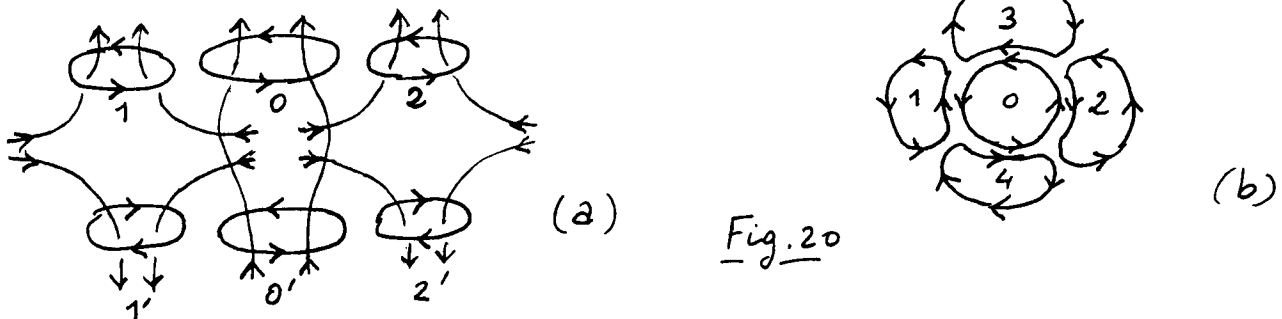


Fig. 20

- Le champ quadripolaire horizontal n'est plus créé par des fils verticaux mais par des bobines circulaires 1, 2, 1', 2' placés dans le même plan que les bobines 0 et 0' créant le champ longitudinal (Fig. 20a)
- On pourrait tout aussi bien utiliser des bobines 3, 4, 3', 4' déduites de 1, 2, 1', 2' par une rotation de $\pi/2$ autour de Oz et parcourus par des courants opposés.
- En ajoutant 1, 2, 3, 4 puis 1', 2', 3', 4' on renforce le champ quadripolaire horizontal. Vues de dessus, les 5 bobines 0, 1, 2, 3, 4 ont l'allure d'un trèfle à 4 feuilles (Fig. 20b)
- Avantage d'un tel dispositif : grand accès optique.

④ Discussion physique

Minimum non nul du champ dans le piège

Par rapport au champ quadripolaire, le champ ne s'annule pas au centre d'un piège de Ioffé-Pritchard (terme en C_1 de 4.8 et 4.10). Un tel champ introduit un axe de quantification privilégié et présente plusieurs avantages.

(i) Intérêt pour la spectroscopie

- les déplacements Zeeman sont moins inhomogènes spatialement au centre du piège où les atomes sont concentrés.

- Dans les applications spectroscopiques (voir par exemple [28]), on écarte beaucoup les 2 bobines d'axe vertical de la figure 16 a pour avoir le long de l'axe Oz un minimum aussi plat que possible (faible courbure) limité par 2 "murs" (Fig. 21). Au besoin, on ajoute avec un solénoïde un champ uniforme.

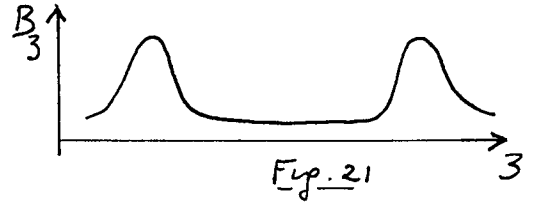


Fig. 21

De plus, au lieu de prendre 4 fils verticaux, comme sur la figure 16 a, on en prend 6 (configuration de la figure 18 c) ou même 8. Le champ radial croît alors en ρ^2 ou ρ^3 (voir Eq. 4.5 a avec $L=3$ ou 4). Avec le champ radial produit par les 2 bobines d'axe vertical, on obtient un champ radial plus plat (avec même un léger maximum au centre) et des murs raides (Fig. 22).

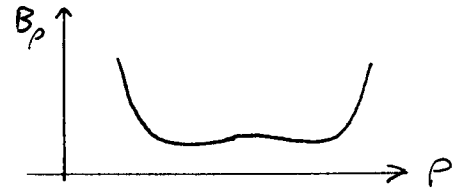


Fig. 22

La forme du piège se rapproche ainsi de celle d'une boîte cylindrique avec des parois raides, le champ étant relativement homogène à l'intérieur du volume.

(ii) Intérêt pour le refroidissement laser

L'existence d'un axe de quantification bien défini permet d'exciter une transition fermée $F, M_F = F \rightarrow F' = F + 1, M'_F = F + 1$ sur laquelle l'atome peut absorber et réémettre plusieurs photons, avec une probabilité beaucoup plus faible de retomber dans un sous-niveau Zeeman non piégeant.

(iii) Importance moindre des transitions de Majorana

Un atome passant près du centre du piège ne voit pas de changement rapide de la direction du champ, comme c'était le cas pour un piège quadripolaire (voir Fig. 12). Les transitions non adiabatiques sont alors beaucoup moins importantes. Elle dépendent de la valeur minimale du champ, c'est-à-dire de la valeur du champ au centre du piège.

Comment choisir la valeur minimale du champ au centre ?

- La fréquence de Larmor minimale est $\Omega_L = \gamma B_{1p}$, où nous notons B_{1p} la valeur minimale de \vec{B} au centre d'un piège de Ioffe-Pritchard. La fréquence de rotation apparente du champ Ω_R , quand l'atome oscille dans le piège à la fréquence ω_{vib} , est de l'ordre de ω_{vib} , car la direction du champ tourne d'un angle de l'ordre de π quand l'atome va d'un bout à l'autre du piège dans un temps de l'ordre de π/ω_{vib} . On a donc

$$\Omega_R \approx \omega_{\text{vib}} \quad (4.15)$$

Cette fréquence est beaucoup plus basse que dans un piège quadripolaire, où le champ apparent tourne très vite quand l'atome

passer très près du centre (voir Fig. 13 et Eq. 3.16).

IV-7

- Pour que le spin puisse suivre adiabatiquement le champ, il faut que

$$\Omega_L = \gamma B_{IP} \gg \omega_{\text{vib}} \quad (4.16)$$

Comme ω_{vib} est de l'ordre d'une centaine de Hz, il suffit d'avoir un champ de 0.1 G pour satisfaire (4.16).

Courbure longitudinale et courbure radiale

- D'après (4.14), la courbure longitudinale du piège le long de Oz est μc_3 . En reprenant les mêmes notations que dans les équations (3.30), on peut dire que la courbure $(B''_{IP})_z$ du champ le long de Oz est de l'ordre de

$$(B''_{IP})_z \sim \frac{B_0}{R_c^2} \sim \frac{B'}{R_c} \sim \frac{B'^2}{B_0} \quad (4.17)$$

où B_0 est le champ au centre d'une bobine de rayon R_c , et où $B' \sim B_0/R_c$ est de l'ordre du gradient de ce champ (à une distance $\sim R_c$).

- La courbure le long d'une direction radiale, Ox ou Oy , est d'après (4.11) $\mu c_2^2 / 2c_1$. D'après (4.10), c_2 est le gradient du champ quadrupolaire créé par les fils verticaux, lui-même de l'ordre de B' , alors que c_1 est la valeur du champ au centre du piège, égale à B_{IP} . La courbure du champ radial est donc de l'ordre de

$$(B''_{IP})_x = (B''_{IP})_y \sim \frac{B'^2}{B_{IP}} \quad (4.18)$$

Comme B_{IP} peut être beaucoup plus petit que B_0 , la courbure radiale est beaucoup plus grande que la courbure longitudinale.

Comparaison du piège de Joffé-Pritchard et du TOP

- D'après (3.33)

$$B''_{TOP} \sim \frac{B'^2}{B_b} = \frac{B'^2}{B_{TOP}} \quad (4.19)$$

où nous avons noté B_{TOP} le champ B_b tournant à la fréquence ω_b dans le TOP.

- La discussion de la page III-7 montre que dans un TOP la variation temporelle du champ "vu" par le spin peut avoir une fréquence égale à ω_b si l'atome n'est pas exactement au centre du TOP, alors que la fréquence de Larmor minimale est $\Omega_L = \gamma B_{TOP}$. Comme ω_b doit être grand devant la fréquence d'oscillation ω_{vib} de l'atome dans le piège (pour que l'atome puisse moyenner le potentiel), la condition de suivi adiabatique s'écrit

$$\Omega_L = \gamma B_{TOP} \gg \omega_b \gg \omega_{\text{vib}} \quad (4.20)$$

La comparaison de (4.16) et (4.20) montre que B_{IP} peut être beaucoup plus petit que B_{TOP} .

- On en déduit, compte tenu de (4.18) et (4.19), que la courbure transversale d'un piège de Ioffé-Pritchard peut être beaucoup plus élevée que la courbure d'un TOP. Par contre, comme B_{TOP} est beaucoup plus petit que B_0 , la comparaison de (4.17) et (4.19) montre que la courbure longitudinale d'un piège de Ioffé-Pritchard est beaucoup plus faible que celle d'un TOP

$$(B''_{IP})_x \gg B''_{TOP} \quad (B''_{IP})_z \ll B''_{TOP} \quad (4.21)$$

La forme du nuage d'atomes piégés est donc beaucoup plus allongé (forme d'un cigare) dans un piège de Ioffé-Pritchard que dans un TOP.

- Figure de mérite d'un piège

C'est le produit des 3 courbures, dont on peut montrer qu'il caractérise l'efficacité du piège pour le refroidissement évaporatif. Plus ce produit est élevé, plus le refroidissement est aisé.

$$(B''_x B''_y B''_z)_{IP} \sim \frac{B'^6}{B_0 B_{IP}^2} \quad (B''_x B''_y B''_z)_{TOP} \sim \frac{B'^6}{B_{TOP}^3}$$

Typiquement, $B_0 \sim 500$ G, $B_{TOP} \sim 5$ G, $B_{IP} \sim 0.2$ G, de sorte que $B_0 B_{IP}^2$ est en général inférieur à B_{TOP}^3 . La figure de mérite est donc en général meilleure pour un piège de Ioffé-Pritchard que pour un TOP.

5) Revue de quelques expériences

Nous nous contenterons ici de mentionner la 1^{ère} expérience de piégeage réalisée sur des particules neutres (en fait des neutrons) au moyen de champs magnétostatiques du type de ceux étudiés dans cette partie C ; puis une expérience très récente de spectroscopie à haute résolution effectuée sur des atomes d'Hydrogène piégés. Nous donnons aussi dans la liste des références quelques articles de revue sur les expériences de piégeage effectuées sur des alcalins [28] ou sur l'Hydrogène [32].

Expérience sur les neutrons [29]

- C'est la 1^{ère} expérience de piégeage de particules neutres.
- Principe (Fig. 23)

On reprend la configuration de 6 fils de la figure 18c pour en faire un tore. Le module du champ croît quadratiquement avec l'écart au cercle situé au centre du tore (Eq. 4.5a avec $L=3$).

La force de rappel correspondante compense la force centrifuge des neutrons effectuant un mouvement circulaire à l'intérieur du tore.

- Résultats (Fig. 24)

Après des pertes initiales importantes, le nombre de neutrons

détectés décroît au cours des temps avec un temps correspondant à la durée de vie des neutrons, ce qui prouve bien l'existence d'un piègeage

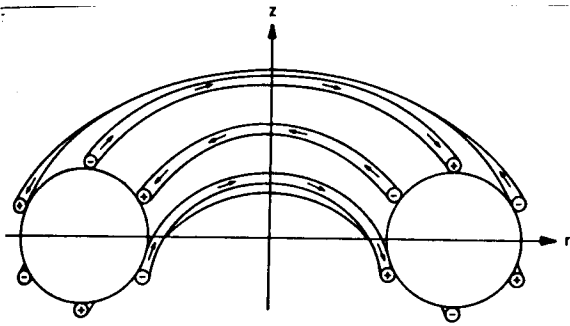


Fig. 23 (extraite de [30])

Expérience récente sur l'Hydrogène [31]

- Atomes H dans un piège de Ioffe'-Pritchard et refroidis par évaporation.
- Excitation laser de la transition 1S - 2S potentiellement très fine.
- La largeur de raie observée, due essentiellement pour le moment au bruit de fréquence du laser, est suffisamment fine cependant pour que l'on commence à voir une structure vibrationnelle due aux niveaux quantifiés du mouvement du centre de masse dans le piège (Fig. 25)

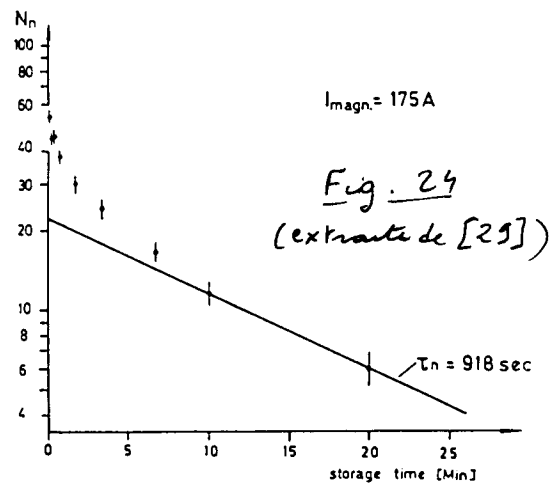


Fig. 24 (extraite de [29])

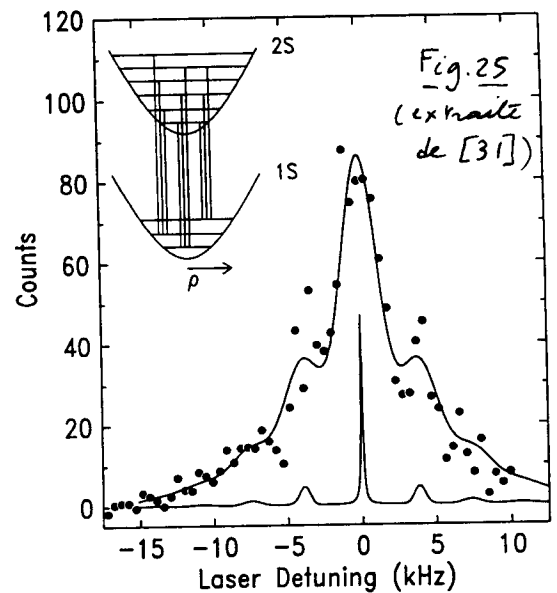


Fig. 25 (extraite de [31])

Références (suite des pages II 9 et III 9)

25. Y. Gott, M. Ioffe, V. Tel'kovski, Nucl. Fusion, Suppl, Pt 3, 1045 (1962)
26. D. Pritchard, Phys. Rev. Lett. 51, 1336 (1983)
27. M.-O. Mewes, M. Andrews, N. van Druuten, D. Kurn, D. Durfee, W. Ketterle Phys. Rev. Lett. 77, 416 (1996)
28. K. Helmerson, A. Martin, D. Pritchard JOSA B9, 483 (1992)
29. K. Kügler, W. Paul, U. Trinks, Phys. Lett. 72B, 422 (1978)
30. H. Metcalf, W. Phillips, Metrologia, 22, 271 (1986)
31. C. Cesar, D. Fried, T. Killian, A. Polyn, J. Sandberg, Ite A. Yu, T. Greytak D. Kleppner, J. Doyle, Phys. Rev. Lett. 77, 255 (1996)
32. J. Walraven, T. Hijmans, Physica B197, 417 (1994)

① Buts de ce chapitre

- Rappeler un certain nombre de résultats relatifs à un gaz d'atomes piégés en équilibre thermodynamique.
Nous aurons en effet besoin de ces résultats pour introduire le principe du refroidissement évaporatif et pour décrire ses objectifs. Les propriétés d'équilibre du gaz nous serviront également de repère pour évaluer les modifications introduites par la rupture d'équilibre associée à l'évaporation.
- Introduire l'idée du refroidissement évaporatif et évaluer de manière approchée son efficacité.
- Identifier les problèmes qui se posent et qui doivent faire l'objet d'une étude plus approfondie.

② Rappels sur les propriétés d'un gaz d'atomes piégés en équilibre thermodynamique2.1 Système étudié - Approximations

- Système de N bosons identiques, piégés dans un potentiel $U(\vec{r})$, en équilibre thermodynamique à la température T .
- On néglige les interactions entre particules.
- Approximation "continue" pour le spectre du Hamiltonien $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r})$. On remplace les sommes discrètes sur les valeurs propres de H par des intégrales. On suppose que $U(\vec{r})$ est minimum en $\vec{r} = \vec{0}$ et vaut $U(\vec{0}) = 0$.
- Dans le § 2.2, on tient compte d'une dégénérescence quantique éventuelle et on utilise la fonction de distribution de Bose-Einstein. Ensuite, on supposera $T \gg T_c$, où T_c est la température où la condensation de Bose-Einstein apparaît et on utilisera la fonction de distribution de Boltzmann. On étudie en effet, dans la suite, le refroidissement évaporatif d'un gaz bien au dessus du seuil de condensation.

2.2 Etude de quelques grandeurs physiquesFonction de distribution $f(E)$

- $f(E)$ est la probabilité d'occupation d'un niveau d'énergie E donnée par

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1} = \frac{1}{z^{-1} e^{E/k_B T} - 1} \quad (5.1)$$

$$\mu = \text{Potentiel chimique} \quad z = e^{\mu/k_B T} = \text{Fugacité} \quad (5.2)$$

- Développement en puissances de z

$$f(E) = \frac{z e^{-E/k_B T}}{1 - z e^{-E/k_B T}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell} e^{-\ell E/k_B T} \quad (5.3)$$

V-2) Densité d'états $\rho(E)$

- $\rho(E)dE =$ Nombre d'états d'énergie comprise entre E et $E+dE$
- Volume d'une cellule élémentaire associé dans l'espace de phases à un état quantique : $h^3 = (2\pi\hbar)^3$
- Soit $F(E)$ le nombre d'états d'énergie inférieure à E . On l'obtient en divisant par le volume élémentaire $(2\pi\hbar)^3$ le volume de l'espace des phases situé à l'intérieur de la surface $E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r})$

$$F(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iiint d^3r d^3p \chi\left(E - \frac{\vec{p}^2}{2m} - U(\vec{r})\right) \quad (5.4)$$

où $\chi(u)$ est la fonction saut : $\chi(u) = 1$ si $u > 0$, $\chi(u) = 0$ si $u < 0$.

- En utilisant $\rho(E)dE = F(E+dE) - F(E)$ et $d\chi(u)/du = \delta(u)$, on obtient

$$\rho(E) = \frac{dF(E)}{dE} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iiint d^3r d^3p \delta\left(E - \frac{\vec{p}^2}{2m} - U(\vec{r})\right) \quad (5.5)$$

Nombre total N de particules et densité spatiale $n(\vec{r})$

$$N = \int_0^\infty dE \rho(E) f(E) \quad (5.6)$$

- En utilisant (5.3) et (5.5), on obtient

$$\begin{aligned} N &= \int_0^\infty dE \rho(E) \sum_{\ell=1}^{\infty} z^\ell e^{-\ell E/k_B T} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{\ell=1}^{\infty} z^\ell \iiint d^3r d^3p e^{-\ell U(\vec{r})/k_B T} e^{-\ell \vec{p}^2/2mk_B T} \end{aligned} \quad (5.7)$$

- Intégrale sur \vec{p}

$$\int d^3p e^{-\ell \vec{p}^2/2mk_B T} = I_x I_y I_z = I_x^3 \quad (5.8)$$

$$I_x = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x e^{-\ell p_x^2/2mk_B T} = \sqrt{\frac{2mk_B T}{\ell}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{2\pi mk_B T}{\ell}} \quad (5.9)$$

- Après l'intégrale sur \vec{p} , il ne reste plus que l'intégrale sur \vec{r}

$$N = \int d^3r n(\vec{r}) \quad (5.10)$$

où la densité spatiale $n(\vec{r})$ est donnée par

$$\begin{aligned} n(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{\ell=1}^{\infty} z^\ell \left(\frac{2\pi mk_B T}{\ell}\right)^{3/2} e^{-\ell U(\vec{r})/k_B T} \\ &= \frac{1}{\Lambda^3} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell^{3/2}} e^{-\ell U(\vec{r})/k_B T} \end{aligned} \quad (5.11)$$

où Λ , qui a la dimension d'une longueur, est par définition la longueur d'onde de de Broglie thermique

$$\Lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}} \quad (5.12)$$

- Si l'on introduit la fonction $g_x(x)$ définie par

$$g_x(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{x^\ell}{\ell^x} \quad (5.13)$$

on peut récrire $n(\vec{r})$ sous la forme

$$n(\vec{r}) = \frac{1}{\Lambda^3} g_{3/2} [z e^{-U(\vec{r})/k_B T}] \quad (5.14) \quad \boxed{V-3}$$

Paramètre de dégénérescence - Seuil de condensation

- En $\vec{r} = \vec{0}$, on a $U(\vec{0}) = 0$. On déduit alors de (5.14) que

$$n(\vec{0}) \Lambda^3 = g_{3/2}(z) \quad (5.15)$$

Le produit de $n(\vec{0})$, densité spatiale au centre du piège, par Λ^3 est appelé paramètre de dégénérescence pour le gaz piégé. C'est le nombre d'atomes contenus dans un volume Λ^3 au centre du piège.

- Pour $T \gg T_c$, on trouve que la valeur de μ déduite de l'équation (5.6) est négative, de sorte que le dénominateur de (5.1) ne s'annule jamais. Par ailleurs, on a dans ce cas $z \ll 1$ et $g_{3/2}(z)$ se réduit à son terme d'ordre le plus bas, z .

$$T \gg T_c \rightarrow \mu \ll 0 \rightarrow z \ll 1 \rightarrow g_{3/2}(z) \simeq z \quad (5.16)$$

l'équation (5.15) devient alors

$$T \gg T_c \rightarrow n(\vec{0}) \Lambda^3 \simeq z = e^{\mu/k_B T} \quad (5.17)$$

ce qui permet d'exprimer le potentiel chimique μ en fonction du paramètre de dégénérescence

$$T \gg T_c \rightarrow \mu \simeq k_B T \ln [n(\vec{0}) \Lambda^3] \quad (5.18)$$

- Quand, N étant fixé, T décroît, μ croît et atteint la valeur 0. Le dénominateur de (5.1) s'annule alors en $E = 0$ l'approximation continue utilisée en (5.6) n'est plus valable. Il faut utiliser des sommes discrètes et on trouve qu'une population macroscopique commence à se bâtir dans l'état fondamental. C'est la condensation de Bose-Einstein.

Quand $\mu = 0$, $z = 1$ et l'équation (5.15) donne alors

$$n(\vec{0}) \Lambda^3 = g_{3/2}(1) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^{3/2}} = 2.612 \quad (5.19)$$

C'est la valeur du paramètre de dégénérescence au seuil de condensation.

2-3 Cas non dégénéré : $z \ll 1$

Fonction de distribution

- Pour $T \gg T_c$, on a $z \ll 1$ [voir 5.16], et on peut ne garder que le 1^{er} terme de (5.3), ce qui donne, compte tenu de (5.17)

$$f(E) \simeq z e^{-E/k_B T} \simeq n(\vec{0}) \Lambda^3 e^{-E/k_B T} \quad (5.20)$$

On retrouve la fonction de distribution de Boltzmann

- Notons par contre que la densité d'états $\rho(E)$ ne dépend pas de la dégénérescence et reste donné par (5.5).

V-4) Fonction de partition $\zeta(T)$

$$\zeta(T) = \int_0^{\infty} dE \rho(E) e^{-E/k_B T} \quad (5.21)$$

- En utilisant l'expression (5.5) de $\rho(E)$, on peut également écrire

$$\zeta(T) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iint d^3r d^3p e^{-H(\vec{r}, \vec{p})/k_B T} \quad (5.22)$$

où $H(\vec{r}, \vec{p})$ est le Hamiltonien égal à $\frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r})$. On reconnaît en (5.22) l'approximation continue de l'expression habituelle de ζ : $\zeta(T) = \text{Tr}(e^{-H/k_B T})$

Nombre total de particules et volume effectif V_e

$$N = \int_0^{\infty} dE \rho(E) f(E) \simeq z \int_0^{\infty} dE \rho(E) e^{-E/k_B T} = z \zeta(T) \quad (5.23)$$

- Comme $T \gg T_c$, on peut utiliser (5.17) et obtenir

$$N = n(\vec{0}) \Lambda^3 \zeta(T) \quad (5.24)$$

- Par définition le volume effectif V_e est le volume qu'occuperaient les N atomes si leur densité spatiale était constante et égale à $n(\vec{0})$, densité au centre du piège

$$N = n(\vec{0}) V_e \quad (5.25)$$

La comparaison de (5.24) et (5.25) donne alors

$$V_e = \Lambda^3 \zeta(T) \quad (5.26)$$

$\zeta(T)$ apparaît ainsi comme le rapport entre V_e et Λ^3

- Notons enfin que, comme $z \ll 1$, on peut ne garder que le 1^{er} terme du développement de la 2^{em} ligne de (5.11), ce qui donne, compte tenu de (5.17), la formule habituelle

$$n(\vec{r}) = n(\vec{0}) e^{-U(\vec{r})/k_B T} \quad (5.27)$$

Energie interne E

$$E = \int_0^{\infty} E \rho(E) f(E) dE \quad (5.28)$$

- En utilisant (5.20), (5.17) et la relation

$$\frac{d\zeta(T)}{dT} = \frac{1}{k_B T^2} \int_0^{\infty} E \rho(E) e^{-E/k_B T} dE \quad (5.29)$$

déduite de (5.21), on obtient

$$E = n(\vec{0}) \Lambda^3 k_B T^2 \frac{d\zeta(T)}{dT} \quad (5.30)$$

c'est à dire encore, compte tenu de (5.24)

$$E = N k_B T^2 \frac{1}{\zeta(T)} \frac{d\zeta(T)}{dT} = N k_B T \frac{d \ln \zeta(T)}{d \ln T} \quad (5.31)$$

Situation considérée

- On suppose que la dépendance en r de $U(\vec{r})$ est décrite par une loi de puissance

$$U(\vec{r}) = C r^{3/\delta} \quad (5.32)$$

où C est une constante. Le paramètre δ vaut $\delta = 0$ pour un potentiel carré, $\delta = 3/2$ pour un potentiel parabolique, $\delta = 3$ pour un potentiel linéaire.

- Nous considérerons également le cas où $U(\vec{r})$ est de la forme

$$U(x, y, z) = a|x|^{1/\delta_1} + b|y|^{1/\delta_2} + c|z|^{1/\delta_3} \quad (5.33)$$

$$\text{avec} \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \delta$$

a, b, c étant des constantes

Calcul de la densité d'états $\rho(\epsilon)$

- Revenons à l'expression (5.5) de $\rho(\epsilon)$. L'intégrale sur \vec{p} peut être effectuée et conduit à (voir Appendice A) :

$$\rho(\epsilon) = \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_{U(\vec{r}) \leq \epsilon} d^3r \sqrt{\epsilon - U(\vec{r})} \quad (5.34)$$

- Dans le cas où $U(\vec{r})$ est donné par (5.32) ou (5.33), on peut également effectuer l'intégrale sur \vec{r} de (5.34) (voir Appendice A). On trouve alors que la dépendance en ϵ de $\rho(\epsilon)$ est celle d'une loi de puissance en $\epsilon^{\frac{1}{2} + \delta}$, d'exposant $\frac{1}{2} + \delta$

$$\rho(\epsilon) = A_{PL} \epsilon^{\frac{1}{2} + \delta} \quad (5.35)$$

où A_{PL} est une constante dépendant de C (ou a, b, c) et de δ . Par exemple, pour un potentiel harmonique $U(\vec{r}) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$, on trouve

$$\rho(\epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\hbar\omega}\right)^3 \epsilon^2 \quad (5.36)$$

Fonction de partition $\zeta(T)$

En reportant (5.35) dans l'expression (5.21) de $\zeta(T)$, on obtient

$$\begin{aligned} \zeta(T) &= A_{PL} \int_0^\infty \epsilon^{\frac{1}{2} + \delta} e^{-\epsilon/k_B T} d\epsilon \\ &= A_{PL} (k_B T)^{\frac{3}{2} + \delta} \int_0^\infty u^{\frac{1}{2} + \delta} e^{-u} du = A_{PL} \Gamma\left(\frac{3}{2} + \delta\right) (k_B T)^{\frac{3}{2} + \delta} \end{aligned} \quad (5.37)$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du \quad (5.38)$$

Volume effectif V_e

- Il se déduit de (5.26) et (5.37)

$$V_e = (\Lambda(T))^3 \zeta(T) = A_{PL} \Gamma\left(\frac{3}{2} + \delta\right) (\Lambda(T))^3 (k_B T)^{\frac{3}{2} + \delta} \quad (5.39)$$

V-6

- D'après 5.12, la dépendance en T de $\Lambda(T)$ est en $T^{-1/2}$, de sorte que celle de V_e est en T^δ

$$V_e \propto T^\delta \quad (5.40)$$

On peut aussi établir ce résultat en calculant la valeur moyenne de x^2 qui s'écrit, compte tenu de (5.27)

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int x^2 n(\vec{r}) d^3r}{\int n(\vec{r}) d^3r} = \frac{\int x^2 e^{-U(\vec{r})/k_B T} d^3r}{\int e^{-U(\vec{r})/k_B T} d^3r} \quad (5.41)$$

et en utilisant (5.32) ou (5.33) et $V_e \propto \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle \langle z^2 \rangle}$

- Pour un potentiel carré ($\delta=0$), les atomes occupent tout le volume offert quel que soit T , ce qui explique pourquoi V_e donné en (5.40) ne dépend pas alors de T . Pour un potentiel parabolique, V_e croît en $T^{3/2}$, pour un potentiel linéaire en T^3 . Plus généralement

$$\frac{V_{e1}}{V_{e2}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^\delta \quad (5.42)$$

Quand on diminue T (T_1/T_2), V_e se contracte ($V_{e1} < V_{e2}$). Mais la contraction est d'autant plus forte que δ est plus grand.

Energie interne E

- D'après (5.37), $\ln \xi(T) = \text{Constante} + \left(\frac{3}{2} + \delta\right) \ln T$, de sorte que l'équation (5.31) donne

$$E = N k_B T \frac{d \ln \xi(T)}{d \ln T} = N \left(\frac{3}{2} + \delta\right) k_B T \quad (5.43)$$

- Les 2 termes de (5.43) ont une interprétation physique simple. Chaque atome piégé a une énergie cinétique moyenne égale à $\frac{3}{2} k_B T$ et une énergie potentielle moyenne égale à $\delta k_B T$

Volume dans l'espace des impulsions \mathcal{V}_p

Nous venons de retrouver le résultat bien connu $\langle \frac{p_x^2}{2m} \rangle = \frac{1}{2} k_B T$ (et idem pour $\langle p_y^2 \rangle$ et $\langle p_z^2 \rangle$). On en déduit que le volume occupé par les atomes dans l'espace des \vec{p} est de l'ordre de

$$\mathcal{V}_p \approx \sqrt{\langle p_x^2 \rangle \langle p_y^2 \rangle \langle p_z^2 \rangle} = m^{3/2} (k_B T)^{3/2} \quad (5.44)$$

Récapitulation : Dépendance en N et T de diverses grandeurs physiques

Dans le problème étudié ici, il y a 2 variables indépendantes, le nombre total N de particules et la température T

Dans le cas d'un piège décrit par une loi de puissance, chaque grandeur physique a une dépendance en N et T décrite par une loi de puissance. Le tableau I donne ces lois pour un certain nombre de grandeurs physiques.

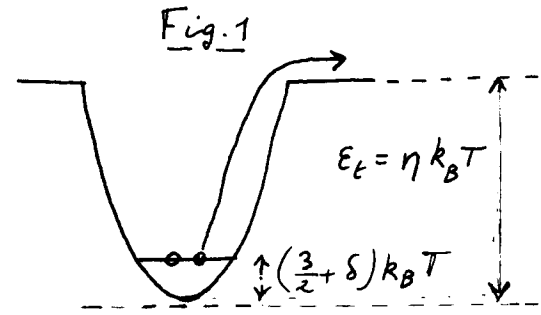
Volume spatial V_e	$V_e \propto T^\delta$
Volume V_p dans l'espace des \vec{p}	$V_p \propto T^{3/2}$
Densité spatiale n	$n \propto \frac{N}{V_e} \propto N T^{-\delta}$
Densité D dans l'espace des phases	$D \propto \frac{N}{V_e V_p} \propto N T^{-(\frac{3}{2} + \delta)}$
Vitesse moyenne v	$v \propto \sqrt{\frac{kT}{m}} \propto T^{1/2}$
Taux de collisions élastiques $n \sigma_e v$ (la section efficace σ_e ne dépend plus de T quand $T \rightarrow 0$)	$n \sigma v \propto N T^{(\frac{1}{2} - \delta)}$

Tableau I

③ Principe du refroidissement évaporatif

3.1 Description qualitative

- Le potentiel piégeant est courbé à partir d'une certaine hauteur seuil E_t (Fig. 1). En unités de $k_B T$ E_t vaut η



$$\frac{E_t}{k_B T} = \eta \quad (5.45)$$

- Les N particules sont initialement dans le piège, avec chacune une énergie moyenne $(\frac{3}{2} + \delta) k_B T$ bien plus faible que $\eta k_B T$
- Par suite des collisions ^{élastiques} entre particules piégées, il peut arriver que l'une d'entre elles acquière, au détriment des autres, une énergie suffisante pour lui permettre d'arriver au dessus du seuil et de s'échapper hors du piège. Les particules restant dans le piège ont dû lui céder cette énergie, au moins égale à $[\eta - (\frac{3}{2} + \delta)] k_B T$. Après rethermalisation, leur énergie moyenne, et donc leur température ont nécessairement diminué.

Un tel mécanisme permet donc d'abaisser la température du gaz au prix d'une perte d'atomes.

3.2 Evaluation de l'efficacité : lien entre la diminution relative de température et la diminution relative de N

- Considérons dN particules qui s'échappent du piège ($dN \ll N$). Nous verrons plus tard que la probabilité, pour les particules qui s'échappent, d'arriver très au dessus du seuil E_t est négligeable. Elles ont en fait une énergie très voisine de $\eta k_B T$ que nous écrivons $(\eta + \kappa) k_B T$ avec $\kappa \ll \eta$.

Pour s'échapper hors du piège, ces dN atomes ont dû donc recevoir, de la part de celles qui restent, une énergie dE égale à

$$dE = dN [(\eta + \kappa) - (\frac{3}{2} + \delta)] k_B T \quad (5.46)$$

- les $N - dN$ particules restantes, qui avaient initialement une énergie égale à $(N - dN) \left(\frac{3}{2} + \delta\right) N k T$, ont cédé cette énergie dE aux particules qui se sont échappées. Après rethermalisation, leur température a baissé de T à $T - dT$ et la conservation de l'énergie implique que

$$(N - dN) \left(\frac{3}{2} + \delta\right) k T - dE = (N - dN) \left(\frac{3}{2} + \delta\right) k (T - dT) \quad (5.47)$$

En remplaçant dans (5.47) dE par sa valeur (5.46), et en négligeant les termes du 2^{ème} ordre en dN et dT , on obtient

$$\frac{dT}{T} = \alpha \frac{dN}{N} \quad (5.48)$$

avec

$$\alpha = \frac{\eta + \kappa}{\frac{3}{2} + \delta} - 1 \quad (5.49)$$

- On voit ainsi que, au cours du refroidissement, T et N sont reliés par une loi de puissance. L'intégration de (5.49) donne

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^\alpha \quad (5.50)$$

Comme η peut être très grand devant 1, on voit sur (5.49) qu'il en est de même de α . L'équation (5.50) montre alors que si N diminue par un facteur 10 ($N_1/N_2 = 1/10$), T diminue par un facteur beaucoup plus grand : $T_1/T_2 = (1/10)^\alpha \ll 1/10$ si $\alpha \gg 1$. L'évaporation peut donc être un processus très efficace de refroidissement.

3.3 Dépendance en N des diverses grandeurs physiques au cours de l'évaporation.

- Au cours de l'évaporation, T et N ne sont plus des variables indépendantes puisqu'elles sont liées par l'équation (5.50).

En remplaçant T par N^α dans les expressions du tableau I, on obtient un nouveau tableau, le tableau II, donnant les lois de puissances en N qui caractérisent l'évolution des diverses grandeurs physiques au cours de l'évaporation

Température T	$T \propto N^\alpha$	<u>Tableau II</u>
Volume spatial V_e	$V_e \propto N^{\alpha \delta}$	
Densité spatiale n	$n \propto N^{1 - \alpha \delta}$	
Densité D dans l'espace des phases	$D \propto N^{1 - (\delta + \frac{3}{2})\alpha}$	
Vitesse moyenne v	$v \propto N^{\alpha/2}$	
Temps de collisions classiques $n \sigma_{cl} v$	$n \sigma_{cl} v \propto N^{1 - \alpha(\delta - \frac{1}{2})}$	

- L'examen du tableau II permet de répondre à des questions importantes. Par exemple, si l'on veut que la densité dans l'espace des phases D augmente lors de l'évaporation, il faut que l'exposant de N dans l'expression de D du tableau II soit négatif

$$1 - \left(\delta + \frac{3}{2}\right)\alpha < 0 \quad (5.51)$$

Bien que N diminue, V_e et v_p diminuent encore plus, de sorte que $D \propto \frac{N}{V_e v_p}$ augmente.

- De même, pour que le taux de collisions élastiques ne diminue pas, mais au contraire augmente au cours de l'évaporation, il faut que l'exposant de N dans l'expression du taux de collisions élastiques $n\sigma_{el}v$ soit négatif ou nul

$$1 - \alpha \left(\delta - \frac{1}{2} \right) \leq 0 \tag{5.52}$$

La diminution de v (qui varie en \sqrt{T}) quand T décroît est plus que compensée par une augmentation de la densité spatiale n . Un tel régime est appelé "run-away evaporation"

4

Les problèmes qui se posent

- La discussion précédente permet de comprendre le sens de variations des diverses grandeurs physiques au cours de l'évaporation. En particulier, si l'on prend η très grand, il en est de même de α d'après (5.49) et les conditions (5.51) et (5.52) sont aisément remplies.

- Un aspect important manque cependant dans la discussion, celui concernant la vitesse des processus d'évaporation. Si η est trop grand, la probabilité d'échappement est très faible et l'évaporation sera trop lente. D'autres processus, comme les collisions inélastiques ou les transitions de Majorana, auront fait perdre les atomes avant qu'ils n'aient pu être refroidis par évaporation.

- Il faut donc étudier la cinétique des processus d'évaporation et déterminer la valeur optimale de η (meilleur compromis entre efficacité et vitesse). Par ailleurs, quand T diminue, η augmente si l'on ne change pas le seuil E_f [voir (5.45)], et l'évaporation se ralentit. Une solution possible consiste à "forcer" l'évaporation en diminuant E_f au fur et à mesure que T diminue.

- Enfin, il est clair que l'évaporation fait sortir le système de son état d'équilibre et qu'il n'est plus correct en toute rigueur, notamment si η n'est pas très grand, d'utiliser les résultats du tableau I pour obtenir ceux du tableau II. Il faut donc décrire de manière plus précise l'état du système en train d'évoluer et voir si l'on peut pour cela introduire de nouvelles variables effectives, comme par exemple une température effective

- L'étude de ces divers problèmes fera l'objet des chapitres ultérieurs.

Références récentes

- 1 - J. Walraven in "Quantum dynamics of simple systems", Proceedings of the 44th Scottish Universities Summer School in Physics, Stirling (1996)
- 2 - W. Ketterle and N. J. van Druten, in "Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics", Vol 36 (1996) ed. by B. Bederson and H. Walker

Voici aussi des références plus anciennes comme

- 3 - H.F. Hess, Phys. Rev. B 34, 3476 (1986)
- 4 - J.M. Doyle, PhD Thesis, M.I.T. (1991)

V-10/ Appendice A

Démonstration de (5.34)

- On part de

$$\delta \left[\frac{p^2}{2m} - E + U(\vec{r}) \right] = \delta \left[\frac{1}{2m} (p - \sqrt{2m(E - U(\vec{r}))}) (p + \sqrt{2m(E - U(\vec{r}))}) \right] \quad (A.1)$$

et on utilise $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$, ce qui donne

$$\delta \left[\frac{p^2}{2m} - E + U(\vec{r}) \right] = \frac{2m}{2\sqrt{2m(E - U(\vec{r}))}} \delta(p - \sqrt{2m(E - U(\vec{r}))}) \quad (A.2)$$

- l'équation (5.5) peut être réécrite sous la forme

$$\rho(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r \int_0^\infty 4\pi p^2 dp \frac{2m}{2\sqrt{2m(E - U(\vec{r}))}} \delta(p - \sqrt{2m(E - U(\vec{r}))}) \quad (A.3)$$

l'intégrale sur p de (A.3) est élémentaire et conduit à (5.34)

Démonstration de (5.35)

- Compte tenu de (5.32), on a

$$\int_{U(\vec{r}) \leq E} d^3r \sqrt{E - U(\vec{r})} = \int_{U \leq E} d^3r \sqrt{E - Cr^{3/\delta}} = \int_{U \leq E} d^3r \sqrt{E} \sqrt{1 - \frac{Cr^{3/\delta}}{E}} \quad (A.4)$$

- Le changement de variables

$$\frac{Cr^{3/\delta}}{E} = u^{3/\delta} \quad (A.5)$$

conduit alors à :

$$\int_{U(\vec{r}) \leq E} d^3r \sqrt{E - U(\vec{r})} = \frac{1}{C^\delta} E^{\frac{1}{2} + \delta} \int_0^1 d^3u \sqrt{1 - u^{3/\delta}} \quad (A.6)$$

ce qui montre bien que la dépendance de $\rho(E)$ en E est bien en $E^{\frac{1}{2} + \delta}$ comme l'indiquent (5.35)

- Cas particuliers $\delta = \frac{3}{2}$, $C = \frac{1}{2} m \omega^2$

$$\int_0^1 d^3u \sqrt{1 - u^2} = 4\pi \int_0^1 u^2 \sqrt{1 - u^2} du = \frac{\pi^2}{4} \quad (A.7)$$

En reportant (A.7) dans (A.6), puis dans (5.34), on obtient (5.36)

- Si $U(\vec{r})$ est donné par (5.33), il faut calculer

$$\int_{U \leq E} d^3r \sqrt{E - U(x, y, z)} = \iiint_{U \leq E} dx dy dz \sqrt{E - a|x|^{1/\delta_1} - b|y|^{1/\delta_2} - c|z|^{1/\delta_3}} \quad (A.8)$$

Le changement de variables

$$\xi^{1/\delta_1} = \frac{x^{1/\delta_1}}{E} \quad \eta^{1/\delta_2} = \frac{y^{1/\delta_2}}{E} \quad \zeta^{1/\delta_3} = \frac{z^{1/\delta_3}}{E} \quad (A.9)$$

conduit alors à

$$\int_{U \leq E} d^3r \sqrt{E - U(x, y, z)} = E^{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3} E^{1/2} \iiint_{U \leq E} d\xi d\eta d\zeta \sqrt{1 - a|\xi|^{1/\delta_1} - b|\eta|^{1/\delta_2} - c|\zeta|^{1/\delta_3}} \quad (A.10)$$

ce qui redonne bien (5.35) puisque $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \delta$.

① Buts de ce chapitre

- Introduire l'équation de Boltzmann qui décrit l'évolution de la fonction de distribution d'un gaz sous l'effet des collisions binaires entre atomes. C'est cette équation qui nous permettra ensuite d'étudier la cinétique du refroidissement par évaporation.
- Montrer que cette équation se simplifie considérablement si l'on suppose que la fonction de distribution des atomes dans l'espace des phases ne dépend que de leur énergie. Discuter la signification physique et la validité d'une telle hypothèse et établir la nouvelle forme prise par l'équation de Boltzmann.
- Présenter les résultats de la résolution numérique d'une telle équation pour le refroidissement évaporatif et montrer que la fonction de distribution reste tout le temps très voisine d'une exponentielle tronquée (voir Ref. [1]). Un tel résultat justifiera la description ultérieure de l'état du gaz par une température effective et permettra de développer un traitement analytique du refroidissement évaporatif.

② Rappels sur l'équation cinétique de Boltzmann (voir Ref. [2])

2-1 Description des particules

- Gaz de particules identiques, dans un potentiel $U(\vec{r})$
Régime quantique non dégénéré : $n_0 \Lambda^3 \ll 1$.
- Fonction de distribution dans l'espace des phases : $f(\vec{r}, \vec{p})$
Comme la densité d'états en \vec{r}, \vec{p} est $1/h^3$ (un état par cellule de volume h^3), le nombre dN de particules dans le volume $d^3r d^3p$ de l'espace des phases autour du point \vec{r}, \vec{p} est

$$dN = \frac{d^3r d^3p}{h^3} f(\vec{r}, \vec{p}) \quad (6.1)$$

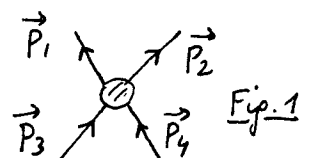
ce qui donne la condition de normalisation suivante pour la fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{p})$ (qui est sans dimension) :

$$\frac{1}{h^3} \iint d^3r d^3p f(\vec{r}, \vec{p}) = N \quad (6.2)$$

- Pour étudier la collision au point \vec{r} entre 2 particules d'impulsions \vec{p} et \vec{p}' , il faudrait en toute rigueur utiliser la fonction de distribution à 2 corps $f_2(\vec{r}, \vec{p}; \vec{r}, \vec{p}')$. On néglige les corrélations entre particules entrant en collision (hypothèse de chaos moléculaire), et on utilisera uniquement la fonction de distribution à un corps $f(\vec{r}, \vec{p})$, ce qui revient à poser $f_2(\vec{r}, \vec{p}; \vec{r}, \vec{p}') = f(\vec{r}, \vec{p}) f(\vec{r}, \vec{p}')$.

2-2 Description d'une collision

- Etat initial : 2 particules d'impulsions \vec{p}_3 et \vec{p}_4
Etat final : " " " " \vec{p}_1 et \vec{p}_2



VI-2) - Changement de variables $\vec{p}_3, \vec{p}_4 \rightarrow \vec{P}, \vec{q}$

$$\vec{p}_3 + \vec{p}_4 = \vec{P} \quad (6.3a) \quad \frac{\vec{p}_3 - \vec{p}_4}{2} = \vec{q} \quad (6.3b)$$

\vec{P} est l'impulsion totale, $2\vec{q}$ l'impulsion relative. Des équations (6.3), on déduit :

$$\vec{p}_3 = \frac{\vec{P}}{2} + \vec{q} \quad (6.4a) \quad \vec{p}_4 = \frac{\vec{P}}{2} - \vec{q} \quad (6.4b)$$

Comme le Jacobien des transformations (6.3) ou (6.4) est égal à 1, on a

$$d^3p_3 d^3p_4 = d^3P d^3q \quad (6.5)$$

- On passe de même de \vec{p}_1, \vec{p}_2 à \vec{P}', \vec{q}'

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P}' \quad (6.6a) \quad \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2} = \vec{q}' \quad (6.6b)$$

$$\vec{p}_1 = \frac{\vec{P}'}{2} + \vec{q}' \quad (6.7a) \quad \vec{p}_2 = \frac{\vec{P}'}{2} - \vec{q}' \quad (6.7b)$$

$$d^3p_1 d^3p_2 = d^3P' d^3q' \quad (6.8)$$

- La conservation de l'impulsion globale entraîne que :

$$\vec{P}' = \vec{P} \quad (6.9)$$

Comme les particules ont même masse m , la conservation de l'énergie totale s'écrit

$$p_3^2 + p_4^2 = p_1^2 + p_2^2 \quad (6.10)$$

ce qui donne, compte tenu de (6.4), (6.7) et (6.9)

$$q^2 = q'^2 \quad \iff \quad |\vec{q}| = |\vec{q}'| \quad (6.11)$$

- La figure 2 représente les vecteurs $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4$.

Par rapport à l'extrémité du vecteur $\vec{P}/2$, \vec{p}_3 et \vec{p}_4 sont repérés par 2 vecteurs opposés $+\vec{q}$ et $-\vec{q}$, \vec{p}_1 et \vec{p}_2 par 2 autres vecteurs opposés $+\vec{q}'$ et $-\vec{q}'$, de même module que \vec{q} .

Les extrémités de $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4$ sont donc sur une même sphère ayant pour centre l'extrémité du vecteur $\vec{P}/2$.

\vec{p}_3 et \vec{p}_4 étant donnés, c'est-à-dire \vec{P} et \vec{q} étant donnés, la collision est entièrement définie par les angles polaires θ et φ de \vec{q}' par rapport à \vec{q} .

- Section efficace de collision

On suppose l'énergie des particules suffisamment faible pour que la collision entre 2 atomes se fasse uniquement dans l'onde s , et soit entièrement décrite par la longueur de diffusion a . La section efficace différentielle $\sigma(\Omega)$ est isotrope et indépendante de l'énergie. Soit $\sigma = 8\pi a^2$ la section efficace totale. On a donc

$$\sigma(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \sigma = 2a^2 \quad (6.12)$$

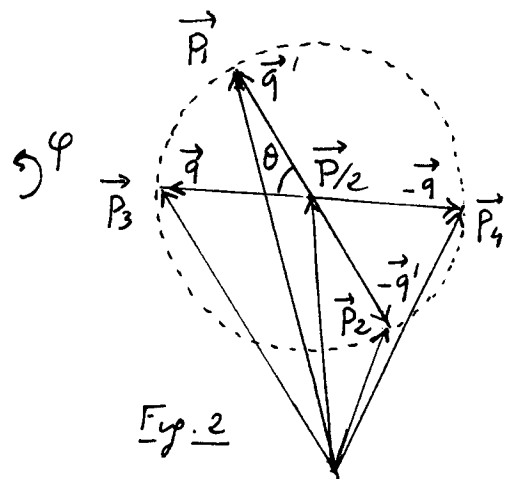


Fig. 2

Cette équation donne la vitesse de variation de la fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ sous l'effet des divers facteurs qui la font évoluer : mouvement libre des atomes dans le piège, collisions. Il n'est pas question ici de l'établir (voir par exemple la référence [2]). Nous nous contenterons de rappeler la forme de l'équation et d'interpréter les divers termes.

Forme de l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} - \vec{\nabla}_{\vec{r}} U \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} \right) f(\vec{r}, \vec{p}, t) = I(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad (6.13)$$

- Le membre de gauche de (6.13) est la dérivée totale par rapport au temps de $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$, appelé encore "dérivée hydrodynamique". On a en effet

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \quad (6.14)$$

ce qui redonne bien le membre de gauche de (6.13), compte tenu des relations $d\vec{r}/dt = \vec{v} = \vec{p}/m$, $d\vec{p}/dt = \vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$.

- le membre de droite est l'intégrale de collision, donnant la vitesse de variations de $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ due aux collisions. On a :

$$I(\vec{r}, \vec{p}_4) = \frac{\sigma}{h^3 2\pi m} \iint d^3 p_3 d\Omega' q \left[f(\vec{r}, \vec{p}_1) f(\vec{r}, \vec{p}_2) - f(\vec{r}, \vec{p}_3) f(\vec{r}, \vec{p}_4) \right] \quad (6.15)$$

$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4, \sigma$ ont été définis plus haut (§ 2.2). $d\Omega'$ est l'élément d'angle solide autour de la direction θ, φ caractérisant l'orientation du vecteur \vec{q}' par rapport au vecteur \vec{q} (voir Fig. 2).

- Nous réécrivons (6.15) sous la forme :

$$I(\vec{r}, \vec{p}_4) = I_{in}(\vec{r}, \vec{p}_4) - I_{out}(\vec{r}, \vec{p}_4) \quad (6.16)$$

avec

$$I_{in}(\vec{r}, \vec{p}_4) = \frac{\sigma}{h^3 2\pi m} \iint d^3 p_3 d\Omega' q f(\vec{r}, \vec{p}_1) f(\vec{r}, \vec{p}_2) \quad (6.17)$$

$$I_{out}(\vec{r}, \vec{p}_4) = \frac{\sigma}{h^3 2\pi m} \iint d^3 p_3 d\Omega' q f(\vec{r}, \vec{p}_3) f(\vec{r}, \vec{p}_4) \quad (6.18)$$

Interprétation de $I_{out}(\vec{r}, \vec{p})$

- Remplaçons \vec{p} par \vec{p}_4 dans (6.13) et multiplions les 2 membres de l'équation par $d^3 r d^3 p_4 / h^3$. Le membre de gauche donne la dérivée totale par rapport au temps du nombre $dN(\vec{r}, \vec{p}_4)$ de particules dans l'élément de volume $d^3 r d^3 p_4$ de l'espace des phases autour de \vec{r}, \vec{p}_4 (voir Eq. 6.1)

- Montrons que $\frac{d^3 r d^3 p_4}{h^3} I_{out}(\vec{r}, \vec{p}_4)$ est le nombre de particules quittant par unité de temps un tel volume sous l'effet de collisions avec une autre particule

Considérons au point \vec{r} les particules d'impulsion comprise dans l'élément $d^3 p_3$ autour de \vec{p}_3 . La densité spatiale de ces

particules est $\frac{f(\vec{r}, \vec{p}_3)}{h^3} d^3 p_3$. Leur vitesse relative par rapport à une particule d'impulsion \vec{p}_4 est $\frac{\vec{p}_3 - \vec{p}_4}{m} = \frac{2\vec{q}}{m}$, d'après (6.3b). Le module de cette vitesse relative est $2q/m$. Le flux correspondant ϕ de particules \vec{p}_3 arrivant sur les particules \vec{p}_4 est

$$\phi = \frac{f(\vec{r}, \vec{p}_3)}{h^3} d^3 p_3 \frac{2q}{m} \quad (6.19)$$

La probabilité par unité de temps de subir une collision sur une particule \vec{p}_4 avec diffusion dans l'angle solide $d\Omega'$ autour de Ω' est donnée $\phi \sigma(\Omega') d\Omega' = \phi \frac{\sigma}{4\pi} d\Omega'$, d'après (6.12). Comme il y a $\frac{d^3 r d^3 p_4}{h^3} f(\vec{r}, \vec{p}_4)$ particules dans l'élément $d^3 r d^3 p_4$ autour de \vec{r}, \vec{p}_4 , le nombre total de collisions pouvant se produire par unité de temps dans l'élément $d^3 r d^3 p_4$ et faisant sortir une molécule de ce volume est donc

$$\begin{aligned} \text{Nombre de particules} &= \frac{d^3 r d^3 p_4}{h^3} f(\vec{r}, \vec{p}_4) \iint d\Omega' \frac{\sigma}{4\pi} \frac{2q}{m} \frac{f(\vec{r}, \vec{p}_3)}{h^3} d^3 p_3 \\ \text{quittant par unité} & \\ \text{de temps le volume} & \\ \text{d}^3 r \text{ d}^3 p_4 \text{ sous l'effet} & \\ \text{des collisions} & = \frac{d^3 r d^3 p_4}{h^3} I_{\text{out}}(\vec{r}, \vec{p}_4) \end{aligned} \quad (6.20)$$

ce qui démontre le résultat annoncé

Interprétation de $I_{\text{in}}(\vec{r}, \vec{p})$

- Un raisonnement analogue au précédent permet de montrer que $\frac{d^3 r d^3 p_4}{h^3} I_{\text{in}}(\vec{r}, \vec{p}_4)$ est le nombre de collisions par unité de temps faisant apparaître une particule dans l'élément $d^3 r d^3 p_4$ autour de \vec{r}, \vec{p}_4

- Il faut pour cela utiliser les propriétés de symétrie des collisions qui résultent de l'invariance des interactions électromagnétiques par réflexion du temps, rotations et réflexions d'espace. La symétrie par renversement du sens du temps entraîne que si

$$\vec{p}_3 + \vec{p}_4 \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (6.21)$$

est une collision possible, alors

$$-\vec{p}_1 + -\vec{p}_2 \rightarrow -\vec{p}_3 + -\vec{p}_4 \quad (6.22)$$

est une autre collision possible. La symétrie de réflexion d'espace entraîne enfin que

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \rightarrow \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \quad (6.23)$$

est également une collision possible, inverse de (6.21)

- Fixons $d^3 r d^3 p_4$. On peut alors évaluer le taux de collisions faisant entrer une particule dans cet élément. En utilisant $q' = q$ (voir Eq. 6.11), la conservation du volume d'espace des phases lors d'une collision ($d^3 p_3 d^3 p_4 = d^3 p_1 d^3 p_2$), $d\Omega' = d\Omega$, l'égalité des sections efficaces pour les collisions (6.21) et (6.23), on obtient le résultat cherché.

③ Hypothèse simplificatrice : Mouvement suffisamment ergodique VI-5

- On suppose à partir de maintenant que $f(\vec{r}, \vec{p})$ ne dépend que de l'énergie $\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r})$ des particules. En tous les points d'une surface d'énergie ϵ , avec

$$\epsilon = \mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}) \quad (6.24)$$

$f(\vec{r}, \vec{p})$ a la même valeur $f(\epsilon)$.

- Une telle situation est réalisée si le mouvement d'une particule dans $U(\vec{r})$ est ergodique. En effet un tel mouvement, en l'absence d'interactions avec les autres particules, s'effectue sur une surface d'énergie ϵ , puisque $\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p})$ est une constante du mouvement. Si le mouvement est ergodique, au bout d'un temps suffisamment long, la particule aura exploré uniformément tous les points de la surface d'énergie, et la fonction de distribution sera uniforme sur toute cette surface.

- En réalité, à cause des symétries de U , le mouvement de la particule n'est pas ergodique et son mouvement peut être limité à certaines zones de la surface ϵ . On supposera cependant que les interactions entre particules rendent le mouvement suffisamment ergodique pour que l'hypothèse " $f(\vec{r}, \vec{p})$ ne dépend que de $\epsilon = \mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p})$ " soit valable. Mathématiquement, ceci revient à poser

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = f(\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p})) \quad (6.25)$$

que l'on peut encore écrire

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \int d\epsilon f(\epsilon) \delta(\epsilon - \mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p})) \quad (6.26)$$

Tous les états de même énergie ϵ ont la même probabilité d'occupation $f(\epsilon)$.

- Rappelons l'expression de la densité d'états $\rho(\epsilon)$ [voir Eq. 5.5]

$$\rho(\epsilon) = \frac{1}{h^3} \iint d^3r d^3p \delta(\epsilon - \mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p})) \quad (6.27)$$

Le nombre total de particules N n'est autre que

$$N = \int d\epsilon \rho(\epsilon) f(\epsilon) \quad (6.28)$$

En reportant (6.27) dans (6.28) et en effectuant l'intégrale sur ϵ , on retrouve la condition de normalisation (6.2), compte tenu de (6.25)

④ Transformation de l'équation cinétique

Buts de ce calcul

Comme $f(\vec{r}, \vec{p})$ ne dépend que de ϵ , on va transformer l'équation cinétique (6.13), qui couple les 4 fonctions $f(\vec{r}_1, \vec{p}_1), f(\vec{r}_2, \vec{p}_2), f(\vec{r}_3, \vec{p}_3), f(\vec{r}_4, \vec{p}_4)$, de 6 variables chacune, en une équation couplant 4 fonctions $f(\epsilon_a), f(\epsilon_b), f(\epsilon_c), f(\epsilon_d)$, ne dépendant chacune que d'une variable ϵ . Cette équation sera plus facile à manier et à intégrer que la précédente. Elle permettra également d'obtenir une expression analytique de la probabilité d'évaporation par unité de temps.

Transformation de la dérivée hydrodynamique

- Comme $f(\vec{r}, \vec{p})$ ne dépend que de $\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r})$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \frac{df}{d\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} = \frac{df}{d\epsilon} \frac{\partial U}{\partial \vec{p}} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \frac{df}{d\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}} = \frac{df}{d\epsilon} \frac{\vec{p}}{m} \quad (6.29)$$

de sorte que

$$\frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \frac{df}{dE} \left(\frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \right) = 0 \quad (6.30)$$

Il ne subsiste plus que $\frac{df}{dE}$. Un tel résultat se comprend aisément. Si la densité initiale sur la surface E est constante, le mouvement libre dans $U(\vec{r})$, qui est celui d'un fluide incompressible (théorème de Liouville), ne peut la faire changer.

- Remplaçons \vec{p} par \vec{p}_4 dans (6.13). Multiplions les 2 membres de cette équation par $\frac{1}{h^3} \delta(\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}_4) - E_d)$. Intégrons sur \vec{r} et \vec{p}_4 en gardant E_d fixe (on utilise la notation E_d , et non E_4 , pour éviter tout risque de confusion entre E_d et $\frac{p_4^2}{2m} + U(\vec{r})$ qui varie avec \vec{p}_4 et \vec{r}). On obtient pour le membre de gauche

$$\frac{1}{h^3} \iint d^3r d^3p_4 \delta(\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}_4) - E_d) \frac{\partial}{\partial t} f(\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}_4), t) \quad (6.31)$$

A cause de la fonction δ , qui n'est non nulle que si $\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}_4) = E_d$, on peut remplacer $\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}_4)$ par E_d dans le dernier terme de (6.31) et sortir ce terme de l'intégrale, qui n'est autre que $\rho(E_d)$ d'après (6.27). On obtient ainsi tout simplement

$$\rho(E_d) \dot{f}(E_d) \quad (6.32)$$

Transformation de la contribution de $I_{in}(\vec{r}, \vec{p}_4)$

- Comme plus haut, on multiplie par $h^{-3} \delta(\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}_4) - E_d)$ et on intègre sur \vec{r} et \vec{p}_4 , ce qui donne avec la notation simplifiée $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}_i)$

$$\frac{\sigma}{2\pi m h^6} \int \dots \int d^3r d^3p_4 d^3p_3 d\Omega' q \delta(\mathcal{H}_4 - E_d) f(\mathcal{H}_1) f(\mathcal{H}_2) \quad (6.33)$$

- Utilisons $f(\mathcal{H}_1) = \int dE_a f(E_a) \delta(\mathcal{H}_1 - E_a)$, $f(\mathcal{H}_2) = \int dE_b f(E_b) \delta(\mathcal{H}_2 - E_b)$, $1 = \int dE_c \delta(\mathcal{H}_3 - E_c)$. On peut réécrire (6.33) sous la forme:

$$\frac{\sigma}{2\pi m h^6} \int \dots \int dE_a dE_b dE_c f(E_a) f(E_b) \times \quad (6.34)$$

$$\times \int \dots \int d^3r d^3p_4 d^3p_3 d\Omega' q \delta(\mathcal{H}_1 - E_a) \delta(\mathcal{H}_2 - E_b) \delta(\mathcal{H}_3 - E_c) \delta(\mathcal{H}_4 - E_d)$$

Transformation de la contribution de $-I_{out}(\vec{r}, \vec{p}_4)$

- Comme plus haut, on part de

$$-\frac{\sigma}{2\pi m h^6} \int \dots \int d^3r d^3p_4 d^3p_3 d\Omega' q' \delta(\mathcal{H}_4 - E_d) f(\mathcal{H}_3) f(\mathcal{H}_4) \quad (6.35)$$

- On utilise $\delta(\mathcal{H}_4 - E_d) f(\mathcal{H}_4) = \delta(\mathcal{H}_4 - E_d) f(E_d)$, $f(\mathcal{H}_3) = \int dE_c f(E_c) \delta(\mathcal{H}_3 - E_c)$, $1 = \int dE_a \delta(\mathcal{H}_1 - E_a)$, $1 = \int dE_b \delta(\mathcal{H}_2 - E_b)$

ce qui permet de transformer (6.35) en

$$-\frac{\sigma}{2\pi m h^6} \int \dots \int dE_a dE_b dE_c f(E_c) f(E_d) \times \quad (6.36)$$

$$\times \int \dots \int d^3r d^3p_4 d^3p_3 d\Omega' q \delta(\mathcal{H}_1 - E_a) \delta(\mathcal{H}_2 - E_b) \delta(\mathcal{H}_3 - E_c) \delta(\mathcal{H}_4 - E_d)$$

- Finalement, en regroupant (6.32), (6.35) et (6.36), on voit (VI-7)
qu'on peut réécrire l'équation cinétique sous la forme

$$\rho(E_d) \dot{f}(E_d) = \frac{\sigma}{2\pi m h^6} \int \dots \int dE_a dE_b dE_c [f(E_a) f(E_b) - f(E_c) f(E_d)] \times \int \dots \int d^3r d^3p_4 d^3p_3 d\Omega' q \delta(\mathcal{H}_1 - E_a) \delta(\mathcal{H}_2 - E_b) \delta(\mathcal{H}_3 - E_c) \delta(\mathcal{H}_4 - E_d) \quad (6.37)$$

On a ainsi éliminé les $f(\vec{r}, \vec{p})$ au profit des $f(E)$. De plus les intégrales se séparent en 2 parties, l'une portant sur les $f(E)$, et dépendant donc de l'état du système, l'autre indépendante de l'état du système et dépendant seulement des caractéristiques du piège (2^{ème} ligne de 6.37).

Intégrale sur les variables autres que E_a, E_b, E_c

L'intégrale de la deuxième ligne de (6.37) ne présente pas de difficultés. Le calcul détaillé est donné dans l'appendice B. On trouve :

$$\int \dots \int d^3r d^3p_4 d^3p_3 d\Omega' q \delta(\mathcal{H}_1 - E_a) \delta(\mathcal{H}_2 - E_b) \delta(\mathcal{H}_3 - E_c) \delta(\mathcal{H}_4 - E_d) = 16 \pi^2 m^2 h^3 \rho(E_{\min}) \delta(E_a + E_b - E_c - E_d) \quad (6.38)$$

où E_{\min} est la plus petite des 4 énergies E_a, E_b, E_c, E_d .

Forme finale de l'équation cinétique

En reportant (6.38) dans (6.37), et en revenant à des notations standard, c-à-d en remplaçant E_a par E_1 , E_b par E_2 , E_c par E_3 et E_d par E_4 , on obtient finalement :

$$\rho(E_4) \dot{f}(E_4) = \frac{8\pi m \sigma}{h^3} \iiint dE_1 dE_2 dE_3 \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \times [f(E_1) f(E_2) - f(E_3) f(E_4)] \rho(E_{\min}) \quad (6.39)$$

⑤ Résolution numérique de l'équation cinétique décrivant le refroidissement évaporatif (voir Ref. [1])

Principe du calcul

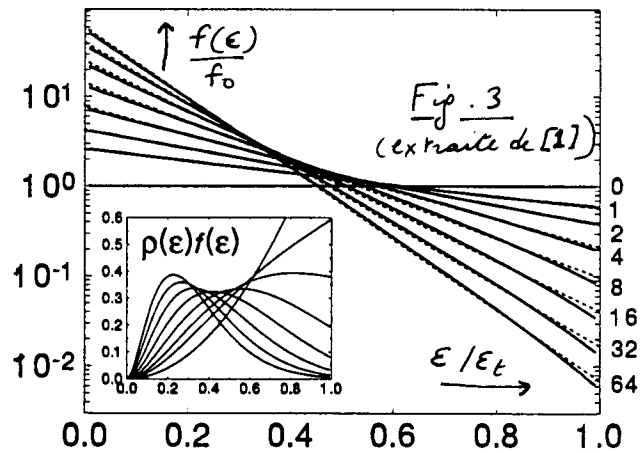
- L'équation (6.39) est utilisée pour décrire l'évolution de la fonction de distribution $f(E)$ d'un gaz d'atomes piégés subissant un refroidissement évaporatif. On suppose que tous les atomes atteignant une énergie supérieure à l'énergie seuil E_f s'échappent du piège et sont éliminés, ce qui revient à prendre la condition aux limites

$$f(E) = 0 \quad \text{si} \quad E \geq E_f \quad (6.40)$$

- L'équation (6.39) est discrétisée en découpant l'intervalle $[0 - E_f]$ en n intervalles élémentaires de largeur $\Delta E = E_f/n$. L'équation ainsi discrétisée est résolue numériquement par la méthode d'Euler, avec la condition aux limites (6.40). A l'instant initial, on prend une fonction $f(E)$ constante entre 0 et E_f , ce qui revient à prendre une température infinie.

Résultats

- Les courbes en traits pleins de la figure 3 (extraite de [1]) représentent la valeur numérique trouvée pour $f(E)$ entre 0 et E_f , à divers instants repérés par le nombre total moyen de collisions subies par atome (chiffres à droite de la figure). $V(\vec{r})$ est un potentiel harmonique, de sorte que la densité d'états $\rho(E)$ est donnée par (5.36)
- Les courbes en pointillés représentent le meilleur ajustement de telles courbes numériques par des exponentielles de Boltzmann.
- Les courbes représentées dans le médaillon sont les courbes $\rho(E)f(E)$.

Conclusions d'un tel calcul

- (i) A chaque instant, la fonction de distribution $f(E)$ est très bien représentée par une exponentielle de Boltzmann tronquée à $E = E_f$

$$f(E) = z e^{-E/k_B T} \gamma(E_f - E) \quad (6.41)$$

où γ est la fonction saut, z un paramètre de normalisation analogue à une fugacité (voir Eq. 5.20), T une température effective.

Un tel résultat demeure valable pour d'autres types de potentiel de piégeage $V(\vec{r})$ (carré, linéaire).

- (ii) En coordonnées semi-logarithmiques ($\log f(E)$ en fonction de E), les fonctions (6.41) sont représentées par des droites de pente $-1/k_B T$, ce qui apparaît bien sur la figure 3. Quand le temps augmente, on voit que ces pentes augmentent en valeur absolue, ce qui montre bien que le gaz se refroidit.

Implication de ces résultats

Le fait que l'état du gaz puisse être valablement décrit à chaque instant par une exponentielle de Boltzmann tronquée permet d'envisager une étude analytique du refroidissement évaporatif.

- (i) Dans une première étape, on calcule les propriétés thermodynamiques d'un gaz décrit par la fonction de distribution (6.41). Le gaz est décrit par 3 variables : la température effective T , le seuil E_f , le nombre N de particules, relié à z . On peut calculer en fonction de ces variables toute une série de grandeurs physiques, comme la répartition spatiale des atomes, le volume effectif occupé par le gaz, l'énergie moyenne par atome... la comparaison avec les résultats du cours V permet en particulier d'évaluer les modifications introduites par la troncature à E_f .
- (ii) A cause de cette troncature à E_f , la distribution (6.41) ne correspond pas à un vrai état d'équilibre. Grâce à l'équation cinétique (6.39) où les $f(E_i)$ sont remplacés par les exponentielles tronquées (6.41), on peut alors calculer le nombre d'atomes qui s'échappent du piège par unité de temps, et la diminution correspondante par unité de temps de l'énergie moyenne par atome du gaz.

- Domaine d'intégration de l'intégrale sur r

Il faut que l'argument de chacune des 4 fonctions δ de (B.2) puisse s'annuler. Sinon, l'une des 4 fonctions δ au moins reste toujours nulle et (B.2) se réduit à zéro.

Comme $u' = \cos(\hat{\vec{P}}, \hat{\vec{q}}')$ varie entre -1 et $+1$, il faut, pour que la 1^{ère} ligne de (B.2) puisse s'annuler, que

$$E_a - \frac{1}{2m} \left(\frac{\vec{P}}{2} + \vec{q} \right)^2 < U(\vec{r}) < E_a - \frac{1}{2m} \left(\frac{\vec{P}}{2} - \vec{q} \right)^2 \quad (\text{B.7})$$

Si $U(\vec{r})$ était supérieur à E_a , $U(\vec{r})$ ne pourrait jamais être inférieur à $E_a - \frac{1}{2m} \left(\frac{\vec{P}}{2} - \vec{q} \right)^2 \leq E_a$. Pour que l'argument de $\delta(\mathcal{H}_1 - E_a)$ puisse s'annuler, il faut donc que $U(\vec{r}) \leq E_a$.

Le même raisonnement montre que l'on doit avoir $U(\vec{r}) \leq E_b$, $U(\vec{r}) \leq E_c$, $U(\vec{r}) \leq E_d$ et donc $U(\vec{r}) \leq E_{\min}$

E_a, E_b, E_c, E_d étant donnés, il faut donc que l'intégrale sur \vec{r} soit limitée aux valeurs de \vec{r} correspondant à la région accessible énergétiquement, c'est à dire telle que $U(\vec{r}) \leq E_{\min}$

$$\int d^3r = \int_{U(\vec{r}) \leq E_{\min}} d^3r \quad (\text{B.8})$$

- Intégrale sur \vec{P}

• A E_a correspond une valeur p_a de $p_1 = |\vec{P}|$ quand on écrit $\mathcal{H}_1 = \frac{p_1^2}{2m} + U(\vec{r}) = E_a$ à cause de $\delta(\mathcal{H}_1 - E_a)$

$$p_a = \sqrt{2m(E_a - U(\vec{r}))} \quad (\text{B.9})$$

On peut de même définir p_b, p_c, p_d

• Intervalle de variation de $P = |\vec{P}|$. Supposons, sans perte de généralité que p_a soit la plus petite des 4 quantités p_a, p_b, p_c, p_d . Le module de $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ varie entre une valeur minimale $P_{\min} = p_b - p_a$ et une valeur maximale $P_{\max} = p_b + p_a$ quand l'angle entre \vec{p}_1 et \vec{p}_2 (de modules p_a et p_b fixés) varie. De même, le module de $\vec{P} = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$ varie entre $p_d - p_c$ et $p_d + p_c$, si l'on suppose que $p_d > p_c$. Comme on a $p_a^2 + p_b^2 = p_c^2 + p_d^2$ et que $p_a = P_{\min}$, on peut aisément montrer que $p_b - p_a > p_d - p_c$ et que $p_d + p_c > p_b + p_a$. L'intervalle de variation de $P = |\vec{P}|$, qui est l'intersection des 2 intervalles $[p_b - p_a, p_b + p_a]$ et $[p_d - p_c, p_d + p_c]$ est donc $[p_b - p_a, p_b + p_a]$ et a pour largeur $2p_a = 2P_{\min}$

• Reportons (B.6) dans (B.2). Il vient

$$2m^3 \delta(E_a + E_b - E_c - E_d) \int_{U(\vec{r}) \leq E_{\min}} d^3r \int \frac{1}{P^2} d^3P \quad (\text{B.10})$$

$$\text{Or } \int \frac{1}{P^2} d^3P = 4\pi \int_{p_b - p_a}^{p_b + p_a} dP = 8\pi p_a = 8\pi P_{\min} = 8\pi \sqrt{2m(E_{\min} - U(\vec{r}))} \quad (\text{B.11})$$

En reportant (B.11) dans (B.10) et en utilisant l'expression (5.34) de $\rho(E)$, on retrouve bien (6.38).

26.11.96

Atomes en quasi-équilibre dans un piège de profondeur finie

VII-1

① Introduction

Système étudié

- Gaz d'atomes identiques dans un puits de potentiel $V(\vec{r})$ de profondeur finie égale à E_f .
- Mouvement suffisamment ergodique pour que la fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{p})$ ne dépende que de l'énergie $E = \vec{p}^2/2m + V(\vec{r})$. D'après les résultats du cours VI, l'état du gaz est alors décrit à chaque instant par une fonction très proche d'une exponentielle de Maxwell-Boltzmann tronquée à E_f :

$$f(E) = z e^{-E/k_B T} \chi(E_f - E) \quad (7.1)$$

- Etat du gaz décrit à chaque instant par 3 paramètres:
 - T : température effective
 - z : Paramètre de normalisation, analogue à une fugacité ou à un paramètre de dégénérescence, relié au nombre total N d'atomes.
 - E_f : Profondeur du puits, que l'on peut faire varier éventuellement.

Notion de quasi-équilibre

- L'état (7.1) n'est pas un vrai état d'équilibre. La résolution numérique de l'équation cinétique (voir Ref. [1]) montre que T et N varient. Cette variation est due au processus d'évaporation.
- On suppose cependant qu'il y a 2 échelles de temps dans le problème: le temps d'évaporation τ_{ev} , très long devant le temps τ_{el} séparant 2 collisions élastiques subies par le même atome. En d'autres termes, T et N varient suffisamment lentement à cause de l'évaporation pour que, à chaque instant, un quasi-équilibre ait le temps de s'établir après quelques collisions élastiques. A une échelle de temps, courte devant τ_{ev} , mais longue devant τ_{el} , on peut considérer l'état décrit par (7.1) comme un état d'équilibre.

Buts de ce chapitre

- (i) Calculer un certain nombre de grandeurs physiques: volume effectif, densité spatiale, énergie totale... dans l'état de quasi-équilibre (7.1). On considère T et z comme fixés et on se limite au cas important de pièges décrits par des lois de puissance. Le fait de disposer d'une expression analytique simple (7.1) pour $f(E)$ permet d'obtenir pour toutes les grandeurs physiques des expressions analytiques qu'on peut ensuite comparer aux expressions correspondantes établies dans le cours V pour un puits de potentiel infini (conduisant à un véritable état d'équilibre).

On pourra ainsi évaluer de manière quantitative l'effet sur les diverses grandeurs physiques du système de la troncature à E_f .

VII-2/ (ii) Calculer, à partir de l'équation cinétique établie dans le cours VI, les temps des mécanismes de pertes qui font que l'état (7.1) n'est pas un véritable état d'équilibre : perte d'atomes et perte d'énergie (dus au processus d'évaporation) par unité de temps ; interprétation des expressions analytiques obtenues pour le temps d'évaporation τ_{ev} ; comparaison de τ_{ev} à τ_{el} .

Nous incluons également dans cette étude les mécanismes de pertes autres que l'évaporation : pertes dues aux collisions inélastiques qui font passer l'atome dans des états non piégés ; pertes de déversement ("spilling") qui apparaissent quand on abaisse le seuil E_t et qu'on laisse s'échapper les atomes d'énergie voisine de E_t .

Les résultats obtenus dans le cours VII nous permettront ensuite d'étudier dans le cours VIII comme l'état de quasi-équilibre (7.1), et les grandeurs physiques correspondantes, évoluent au cours du temps.

② Propriétés de quasi-équilibre du gaz d'atomes piégés.

2.1 Fonction de partition $\zeta(T)$

- Comme on se limite aux pièges décrits par des lois de puissance et que, seules, les énergies $E < E_t$ sont accessibles aux atomes piégés, la formule généralisant (5.35) pour la densité d'états s'écrit :

$$\rho(E) = A_{PL} E^{\frac{1}{2} + \delta} \gamma(E_t - E) \quad (7.2)$$

de sorte que la fonction de partition $\zeta(T)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \zeta(T) &= \int_0^\infty \rho(E) e^{-E/k_B T} dE = A_{PL} \int_0^{E_t} E^{\frac{1}{2} + \delta} e^{-E/k_B T} dE \\ &= A_{PL} (k_B T)^{\frac{3}{2} + \delta} \int_0^\eta u^{\frac{1}{2} + \delta} e^{-u} du \end{aligned} \quad (7.3)$$

où l'on a posé

$$\eta = \frac{E_t}{k_B T} \quad (7.4)$$

- Introduisons la fonction Gamma incomplète (voir Ref [2], l'appendice C, et l'appendice de [3])

$$P(a, \eta) = \frac{\int_0^\eta u^{a-1} e^{-u} du}{\int_0^\infty u^{a-1} e^{-u} du} = \frac{\int_0^\eta u^{a-1} e^{-u} du}{\Gamma(a)} \quad (7.5)$$

Il est clair sur (7.5) que

$$P(a, \eta) \rightarrow 1 \text{ si } \eta \rightarrow \infty.$$

Quelques propriétés de $P(a, \eta)$ sont données dans [1], [2], [3] et l'appendice C.

La figure 1, extraite de [1], donne un réseau de courbes $P(a, \eta)$ en fonction de η pour diverses valeurs de a variant par des sauts de $1/2$ de $a = 3/2$ à $a = 13/2$

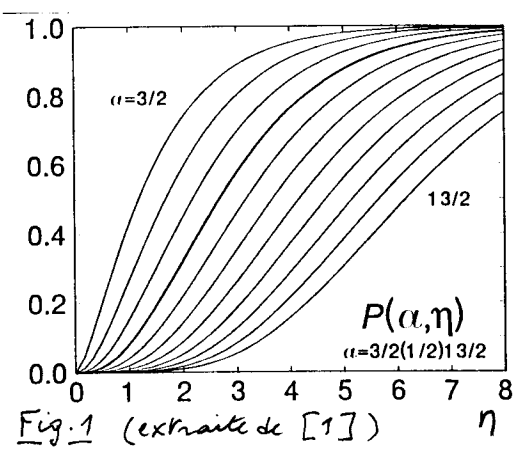


Fig. 1 (extraite de [1])

- Compte tenu de (7.5), l'équation (7.3) peut être réécrite

$$\begin{aligned} \zeta(T) &= A_{PL} \Gamma\left(\frac{3}{2} + \delta\right) (k_B T)^{\frac{3}{2} + \delta} P\left(\frac{3}{2} + \delta, \eta\right) \\ &= \zeta_{\infty}(T) P\left(\frac{3}{2} + \delta, \eta\right) \end{aligned} \quad (7.6)$$

où $\zeta_{\infty}(T)$ est la fonction de partition (5.37) pour un puits infini.

2.2 Densité spatiale

- Par analogie avec (5.17), nous écrivons le paramètre sans dimensions z apparaissant dans (7.1) sous la forme

$$z = n_0 \Lambda^3 \quad (7.7)$$

où $\Lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T}$ est la longueur d'onde de de Broglie thermique et où n_0 a les dimensions d'une densité spatiale, qui ne coïncide plus, comme nous le verrons plus loin, avec la densité $n(\vec{0})$ en $\vec{r} = \vec{0}$.

- On peut reprendre le calcul du § 2.2 du cours V, des équations (5.6) à (5.14) (en remplaçant toutefois $\sum_{\epsilon=1}^{\infty} z^{\epsilon} e^{-\epsilon/k_B T}$ par le premier terme $z e^{-\epsilon/k_B T}$ puisqu'on se limite au cas non dégénéré $z \ll 1$). La seule différence est qu'en chaque point \vec{r} , \vec{p}^2 ne varie plus de 0 à $+\infty$, mais de 0 à $2m[\epsilon_t - U(\vec{r})]$ puisque $\epsilon = \vec{p}^2/2m + U(\vec{r}) \leq \epsilon_t$. On doit donc remplacer l'intégrale

$$\int d^3p e^{-\vec{p}^2/2mk_B T} = 4\pi \int_0^{\infty} p^2 e^{-p^2/2mk_B T} dp = 2\pi (2mk_B T)^{3/2} \int_0^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du \quad (7.8)$$

par

$$4\pi \int_0^{2m(\epsilon_t - U(\vec{r}))} p^2 e^{-p^2/2mk_B T} dp = 2\pi (2mk_B T)^{3/2} \int_0^{\eta_t(\vec{r})} u^{1/2} e^{-u} du \quad (7.9)$$

où

$$\eta_t(\vec{r}) = \frac{\epsilon_t - U(\vec{r})}{k_B T} \quad (7.10)$$

- Pour trouver l'expression qui généralise (5.27), il faut donc remplacer $n(\vec{0})$ par n_0 et $\int_0^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du$ par $\int_0^{\eta_t(\vec{r})} u^{1/2} e^{-u} du$, ce qui revient à multiplier l'équation par $\int_0^{\eta_t(\vec{r})} u^{1/2} e^{-u} du / \int_0^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du = P(\frac{3}{2}, \eta_t(\vec{r}))$.
On a donc

$$n(\vec{r}) = n_0 e^{-U(\vec{r})/k_B T} P\left(\frac{3}{2}, \eta_t(\vec{r})\right) \quad (7.11)$$

La présence de $P(\frac{3}{2}, \eta_t(\vec{r}))$ au second membre de (7.11) revient à couper $n(\vec{r})$ quand on se rapproche de la surface $U(\vec{r}) = \epsilon_t$. Alors que la coupure en $\epsilon = \epsilon_t$ est brutale sur la fonction de distribution (7.1), la coupure apparaissant en (7.11) est progressive et se fait sur une zone correspondant à une variation de $\epsilon_t - U(\vec{r})$ de quelques $k_B T$ (voir Fig. 1)

- Notons également que, en $\vec{r} = \vec{0}$, $U(\vec{r}) = 0$ et $\eta_t(\vec{r}) = \epsilon_t/k_B T = \eta$, de sorte que

$$n(\vec{0}) = n_0 P\left(\frac{3}{2}, \eta\right) \quad (7.12)$$

ce qui montre bien que $n(\vec{0}) \neq n_0$, sauf si $\eta \rightarrow \infty$.

2.3 Volume de référence V_e

Au lieu de définir V_e par $V_e = N/n(\vec{0})$ comme dans le cours V, il est plus commode mathématiquement d'utiliser n_0 et de poser

$$V_e = \frac{N}{n_0} \quad (7.13)$$

- En utilisant alors $N = z \int_0^{E_t} \rho(E) e^{-E/k_B T} dE = z \zeta(T)$ et $z = n_0 \Lambda^3$, on obtient, compte tenu de (7.13) et (7.6)

$$V_e = \Lambda^3 \zeta(T) = \Lambda^3 \zeta_\infty(T) P(\frac{3}{2} + \delta, \eta) \quad (7.14)$$

2.4 Energie interne

- Les calculs du cours V (équations 5.28 à 5.31) peuvent être répétés, moyennant le remplacement de la borne supérieure des intégrales sur E, qui passe de +∞ à E_t, et le remplacement de n(0) par n₀. On obtient ainsi pour l'énergie totale E des N atomes :

$$E = N k_B T d \ln \zeta(T) / d \ln T \quad (7.15)$$

où $\zeta(T)$ est la nouvelle fonction de partition qui est maintenant donnée par (7.6), de sorte que

$$\ln \zeta(T) = \ln \zeta_\infty(T) + \ln P(\frac{3}{2} + \delta, \eta) \quad (7.16)$$

$P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)$ dépend de T via $\eta = E_t/k_B T$ et contribue donc à (7.15).

- Contribution de $\ln \zeta_\infty(T)$ à E. C'est la même que celle du cours V puisque $\zeta_\infty(T)$ est l'expression de ζ pour $E_t \rightarrow \infty$. D'après (5.43),

$$\text{Contribution de } \ln \zeta_\infty(T) \text{ à } E = N(\frac{3}{2} + \delta) k_B T \quad (7.17)$$

- Contribution de $\ln P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)$ à E.

$$N k_B T \frac{d \ln P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)}{d \ln T} = N k_B T^2 \frac{1}{P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)} \frac{d P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)}{d \eta} \frac{d \eta}{dT} \quad (7.18)$$

Utilisons $d\eta/dT = -E_t/k_B T^2 = -\eta/T$ et la formule (C.5) de l'appendice C qui donne $dP(a, \eta)/d\eta$. On obtient

$$\text{Contribution de } \ln P(\frac{3}{2} + \delta, \eta) \text{ à } E = N(\frac{3}{2} + \delta) k_B T \left[-1 + \frac{P(\frac{5}{2} + \delta, \eta)}{P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)} \right] \quad (7.19)$$

- Il suffit alors d'ajouter (7.17) à (7.19) pour obtenir

$$E = N(\frac{3}{2} + \delta) k_B T \frac{P(\frac{5}{2} + \delta, \eta)}{P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)} = N(\frac{3}{2} + \delta) k_B T R(\frac{3}{2} + \delta, \eta) \quad (7.20)$$

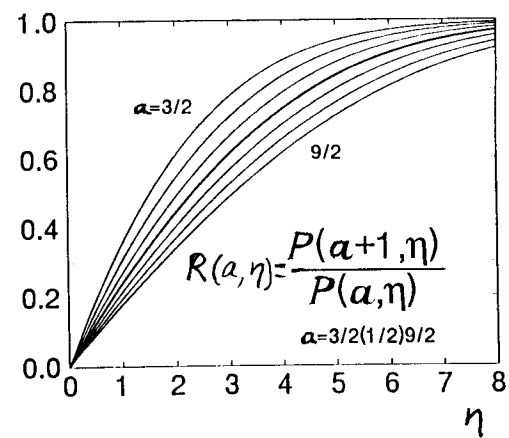
où l'on a posé

$$R(a, \eta) = \frac{P(a+1, \eta)}{P(a, \eta)} \quad (7.21)$$

- La figure 2, extraite de [1], donne les variations de $R(a, \eta)$ avec η pour diverses valeurs de η variant par des sauts de 1/2 de $a = 3/2$ à $a = 9/2$.

On voit que $R \rightarrow 1$ si $\eta \gg 1$ et que l'expression (7.20) tend vers la valeur asymptotique correspondant à $\eta \rightarrow \infty$ dès que $\eta > 8$

Fig. 2
(extraite de [1])



- Finalement, toutes les expressions des grandeurs physiques d'équilibre établies dans le cours V, ont pu être étendues à l'état de quasi-équilibre (7.1), moyennant de faibles multiplicatifs simples faisant intervenir $P(a, \eta)$.

③ Etude des temps de pertes par évaporation

[VII-5]

3-1 Nombre d'atomes s'évaporant par unité de temps

- Nous voulons calculer le nombre d'atomes arrivant par unité de temps au dessus du seuil E_t sous l'effet des collisions élastiques.

- Revenons pour cela à l'équation cinétique (6.39)

$$\rho(E_4) \dot{f}(E_4) = \frac{8\pi m \sigma}{h^3} \iiint dE_1 dE_2 dE_3 \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) [f(E_1)f(E_2) - f(E_3)f(E_4)] \rho(E_{\text{min}}) \quad (7.22)$$

et supposons que E_4 , la plus grande des 4 énergies E_1, E_2, E_3, E_4 , soit au dessus du seuil E_t , les 3 autres énergies E_1, E_2, E_3 étant en dessous. $\rho(E_4) \dot{f}(E_4) dE_4$ est le nombre d'atomes arrivant par unité de temps dans l'intervalle $[E_4, E_4 + dE_4]$ sous l'effet des collisions entre 2 atomes d'énergies initiales E_1 et E_2 , devenant E_3 et E_4 après la collision. Comme $E_3 + E_4 = E_1 + E_2$, le milieu de $[E_3, E_4]$

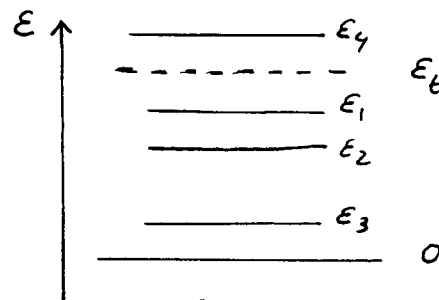


Fig. 3

est le même que celui de $[E_1, E_2]$, de sorte que E_3 est la plus petite de 4 énergies (Fig. 3). On peut donc remplacer $\rho(E_{\text{min}})$ par $\rho(E_3)$ dans (7.22)

- Seul le terme d'arrivée $f(E_1)f(E_2)$ est à considérer dans (7.22) car l'état E_4 est initialement non peuplé ($f(E_4) = 0$). D'autre part, E_1 et E_2 doivent être au dessous du seuil, sinon $f(E_1)$ et $f(E_2)$ seraient nuls.

- La diminution par unité de temps du nombre d'atomes piégés due à l'évaporation peut donc s'écrire :

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{ev}} = \dot{N}_{\text{ev}} = - \int_{E_t}^{\infty} dE_4 \rho(E_4) \dot{f}(E_4) \quad (7.23)$$

- Le fait que E_4 doit être supérieur à E_t , alors que E_1, E_2, E_3 doivent être inférieurs à E_t , introduit des contraintes sur les bornes des intégrales obtenues lorsqu'on reporte le terme en $f(E_1)f(E_2)$ de (7.22) dans (7.23)

Fixons E_3 et E_2 qui doit être supérieure à E_3 d'après la figure 3. Comme E_4 est au moins égal à E_t , $E_1 = E_4 + E_3 - E_2$ est au moins égal à $E_t + E_3 - E_2$, qui est inférieur à E_t puisque $E_3 - E_2 < 0$. On en déduit que E_1 varie entre $E_t + E_3 - E_2$ et E_t . Les bornes d'intégration sont donc $[0, E_t]$ pour E_3 , $[E_3, E_t]$ pour E_2 , $[E_t + E_3 - E_2, E_t]$ pour E_1 . E_4 n'apparaissant que dans $\delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4)$, l'intégrale sur E_4 donne 1 et on obtient ainsi

$$\dot{N}_{\text{ev}} = - \frac{8\pi m \sigma}{h^3} \int_0^{E_t} dE_3 \int_{E_3}^{E_t} dE_2 \int_{E_t + E_3 - E_2}^{E_t} dE_1 f(E_1) f(E_2) \rho(E_3) \quad (7.24)$$

Remplaçons les $f(E_i)$ par $n_0 \Lambda^3 e^{-E_i/k_B T}$. Les intégrales sur E_1 et E_2 sont élémentaires, et on obtient, en remplaçant E_3 par E

$$\dot{N}_{\text{ev}} = - \frac{8\pi m \sigma}{h^3} (n_0 \Lambda^3)^2 k_B T e^{-\eta} \left\{ \int_0^{E_t} \rho(E) \left[e^{-E/k_B T} (E_t - E - k_B T) + k_B T e^{-\eta} \right] dE \right\} \quad (7.25)$$

- Une telle expression peut être réécrite sous la forme

$$\dot{N}_{\text{ev}} = - n_0^2 \sigma \bar{v} e^{-\eta} v_{\text{ev}} \quad (7.26)$$

VII-6/
où

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}} \quad (7.27)$$

expression qui coïncide avec la vitesse thermique moyenne pour un gaz dans un piège de profondeur infinie et où

$$V_{ev} = \frac{\Lambda^3}{k_B T} \int_0^{E_t} \rho(\epsilon) \left[e^{-\epsilon/k_B T} (\epsilon_t - \epsilon - k_B T) + k_B T e^{-\eta} \right] d\epsilon \quad (7.28)$$

- Utilisons $\rho(\epsilon) = A_{PL} \epsilon^{\frac{1}{2} + \delta}$ et mettons en facteur dans (7.28) l'expression de $\zeta_{\infty}(T) = A_{PL} (k_B T)^{\frac{3}{2} + \delta} \Gamma(\frac{3}{2} + \delta)$. On obtient, en posant $u = \epsilon/k_B T$

$$V_{ev} = \Lambda^3 \zeta_{\infty}(T) \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2} + \delta)} \int_0^{\eta} du u^{\frac{1}{2} + \delta} \left[(\eta - u - 1) e^{-u} + e^{-\eta} \right] \quad (7.29)$$

L'intégrale de (7.29) peut être exprimée en fonction de fonctions gamma incomplètes (voir Appendice C et notamment l'équation C.4). On obtient

$$V_{ev} = \Lambda^3 \zeta_{\infty}(T) \left[\eta P(\frac{3}{2} + \delta, \eta) - (\frac{5}{2} + \delta) P(\frac{5}{2} + \delta, \eta) \right] \quad (7.30)$$

- Finalement, il est commode de faire apparaître N au 2^{ème} membre de (7.26) en utilisant $n_0 = N/V_e$. On obtient ainsi

$$\dot{N}_{ev} = -\Gamma_{ev} N \quad (7.31)$$

où le taux d'évaporation Γ_{ev} est donné par

$$\Gamma_{ev} = \frac{1}{T_{ev}} = n_0 \sigma \bar{v} e^{-\eta} \frac{V_{ev}}{V_e} \quad (7.32)$$

avec, compte tenu de (7.14), (7.21) et (7.30) :

$$\frac{V_{ev}}{V_e} = \eta - (\frac{5}{2} + \delta) \frac{P(\frac{5}{2} + \delta)}{P(\frac{3}{2} + \delta)} = \eta - (\frac{5}{2} + \delta) R(\frac{3}{2} + \delta, \eta) \quad (7.33)$$

3-2 Energie perdue par unité de temps à cause de l'évaporation

- Le même raisonnement que celui fait plus haut conduit à

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{ev} = \dot{E}_{ev} = - \int_{\epsilon_t}^{\infty} \epsilon_3 \rho(\epsilon_3) f(\epsilon_3) d\epsilon_3 \quad (7.34)$$

On obtient alors une intégrale triple analogue à (7.24) où $f(\epsilon_1) f(\epsilon_2) \rho(\epsilon_3)$ est remplacé par $\epsilon_3 f(\epsilon_1) f(\epsilon_2) \rho(\epsilon_3)$ avec $\epsilon_3 = \epsilon_t - \epsilon_1 - \epsilon_2$. Les intégrales sur ϵ_1 et ϵ_2 sont élémentaires. L'intégrale sur ϵ_3 fait apparaître des fonctions Gamma incomplètes et on obtient finalement

$$\dot{E}_{ev} = \dot{N}_{ev} \left[\epsilon_t + \left(1 - \frac{x_{ev}}{V_{ev}}\right) k_B T \right] \quad (7.35)$$

avec

$$\frac{x_{ev}}{V_{ev}} = \frac{P(\frac{7}{2} + \delta, \eta)}{P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)} \frac{V_e}{V_{ev}} \quad (7.36)$$

- L'interprétation de (7.35) est que chaque atome qui s'évapore sort avec une énergie supérieure à ϵ_t d'une quantité égale en moyenne à $\left(1 - \frac{x_{ev}}{V_{ev}}\right) k_B T$.

3.3 Discussion physique

Expression du taux d'évaporation Γ_{ev} à la limite $\eta \gg 1$

- A la limite $\eta \gg 1$, $R(\frac{3}{2} + \delta, \eta) \approx 1$ (voir Fig. 2), de sorte que Γ_{ev}/Γ_{el} est, d'après (7.33), de l'ordre de $\eta - (\frac{3}{2} + \delta)$, c'est à dire de l'ordre de η .

- Par ailleurs, on reconnaît dans (7.32) le taux de collision élastique :

$$\Gamma_{el} = n_0 \sigma \bar{v} \tag{7.37}$$

On en déduit que
$$\frac{\Gamma_{ev}}{\Gamma_{el}} \underset{\eta \gg 1}{\approx} \eta e^{-\eta} \tag{7.38}$$

- La décroissance de $e^{-\eta}$ l'emporte sur celle de η quand η croît. Le taux d'évaporation décroît donc exponentiellement avec la profondeur du puits exprimée en unités de $k_B T$, $\eta = E_t/k_B T$

Indépendance de la forme du piège à la limite $\eta \gg 1$

- Il apparaît sur (7.38) que Γ_{ev} ne dépend plus de δ à la limite $\eta \gg 1$ et garde donc la même valeur quelle que soit la forme du piège

- L'interprétation d'un tel résultat est la suivante. Tout d'abord, l'évaporation est un phénomène local. Un atome qui s'évapore par collision au point \vec{r} doit gagner une énergie $E_t - U(\vec{r})$ qui dépend du point \vec{r} où il se trouve. Cette évaporation est plus facile en un point $\vec{r} \neq \vec{0}$ qu'en $\vec{r} = \vec{0}$ par un facteur de l'ordre de $e^{-[E_t - U(\vec{r})]/k_B T} / e^{-E_t/k_B T} = e^{U(\vec{r})/k_B T}$. Ce gain dans la probabilité d'évaporation est cependant compensé par la diminution de la densité spatiale qui varie en $e^{-U(\vec{r})/k_B T}$. Le nombre d'atomes qui s'évaporent par unité de temps est donc, à la limite $\eta \gg 1$, indépendant de \vec{r} et c'est pourquoi Γ_{ev} ne dépend plus de la forme exacte de $U(\vec{r})$, mais seulement de la profondeur E_t du puits.

Interprétation de la dépendance en η de Γ_{ev}/Γ_{el}

- Revenons à un gaz d'atomes piégés dans un puits de potentiel infini et considérons l'aile de la distribution d'énergie de ces atomes, au delà d'une certaine énergie E_t grande devant $k_B T$: $E \gg E_t \gg k_B T$. La proportion ζ de ces atomes est très faible. Calculons la pour un puits de potentiel carré puisque, d'après ce qui précède, la forme exacte du puits n'est pas importante pour la valeur exacte de Γ_{ev} à la limite $\eta \gg 1$. On a

$$\zeta = \frac{\int_{v_t}^{\infty} v^2 e^{-mv^2/2k_B T} dv}{\int_0^{\infty} v^2 e^{-mv^2/2k_B T} dv} \tag{7.39}$$

avec $mv_t^2/2 = E_t$. Un changement simple de variable, $u = mv^2/2k_B T$, conduit alors au résultat suivant pour ζ :

$$\zeta = \frac{\int_{\eta}^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du}{\int_0^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du} = 1 - P(\frac{3}{2}, \eta) \underset{\eta \gg 1}{\approx} \frac{e^{-\eta} \eta^{1/2}}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\eta} e^{-\eta} \tag{7.40}$$

On a posé $\eta = E_t/k_B T$ et utilisé les équations C.1 et C.8 de l'Appendice C ainsi que $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$. Pour $\eta \gg 1$, la proportion d'atomes dans l'aile, ζ , est donc très faible.

- Comme $\xi \ll 1$, les collisions subies par les atomes dans l'aile $E \geq E_f$ font surtout intervenir des atomes d'énergie beaucoup plus faible, de l'ordre de $k_B T$. La plupart de ces collisions font donc sortir les atomes de l'aile $E \geq E_f$, puisque les atomes correspondants cèdent une grande partie de leur énergie aux atomes lents avec lesquels ils entrent en collision. Au cours d'une telle collision, la vitesse relative entre l'atome $E \geq E_f$ et l'atome $E \approx k_B T$ est de l'ordre de $\bar{v} \sqrt{E_f/k_B T} = \bar{v} \sqrt{\eta}$. Le temps des collisions qui dépassent l'aile $E \geq E_f$ est donc de l'ordre de $n_0 \sigma \bar{v} \sqrt{\eta} = \Gamma_{el} \sqrt{\eta}$ (on néglige, comme dans l'équation cinétique, toute variation de σ avec l'énergie). Le nombre d'atomes quittant par unité de temps l'aile $E \geq E_f$ est donc de l'ordre de $N \xi \Gamma_{el} \sqrt{\eta}$.

Par argument de bilan détaillé dans l'état d'équilibre, ce nombre d'atomes est compensé par ceux qui arrivent par collisions dans l'aile $E \geq E_f$ en portant d'énergies plus basses.

- Considérons maintenant un puits de profondeur finie E_f . Il semble raisonnable de penser que le nombre d'atomes arrivant, par unité de temps, à acquérir une énergie supérieure à E_f sous l'effet de collisions, et donc à s'évaporer, est du même ordre de grandeur que le nombre d'atomes qui, dans un puits infini, arrivent dans l'aile $E \geq E_f$. On déduit alors d'un tel raisonnement que

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{ev} \underset{\eta \gg 1}{\approx} - N \xi \Gamma_{el} \sqrt{\eta} \approx - N \Gamma_{el} \frac{2}{\pi} \eta e^{-\eta} \quad (7.41)$$

On retrouve ainsi la dépendance en $\eta e^{-\eta}$ de Γ_{ev} .

- Le calcul présenté dans le § 3.1 a l'avantage de justifier rigoureusement un tel résultat et de donner l'expression exacte du facteur V_{ev}/V_e multipliant $e^{-\eta}$, facteur qui ne se réduit à η que pour $\eta \gg 1$ et qui en diffère de manière notable pour les valeurs de η couramment utilisées dans les expériences.

Energie moyenne des atomes qui s'évaporent

- Nous avons déjà mentionné plus haut que les atomes qui s'évaporent quittent le puits avec une énergie moyenne située à $(1 - \frac{X_{ev}}{V_{ev}}) k_B T$ au dessus du seuil E_f . Quand $\eta \gg 1$, $V_{ev}/V_e \approx \eta$, $P(\frac{7}{2} + \delta, \eta) / P(\frac{3}{2} + \delta, \eta) \approx 1$, de sorte que $X_{ev}/V_{ev} \approx 1/\eta \ll 1$. On en déduit que

$$\left(1 - \frac{X_{ev}}{V_{ev}}\right) k_B T \underset{\eta \gg 1}{\approx} k_B T \quad (7.42)$$

- Le facteur $1 - \frac{X_{ev}}{V_{ev}}$ n'est autre que le facteur κ introduit de manière phénoménologique dans le cours V (§ 3.2). Le calcul présenté ici en donne une expression analytique valable pour tout η .

④ Autres mécanismes de pertes

4-1 Pertes dues aux collisions inélastiques

- Soit Γ_{inel} le taux correspondant

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{inel} = - \Gamma_{inel} N \quad (7.43)$$

Nous incluons également dans ces pertes, les transitions de VII-9 Majorana qui, comme les collisions inélastiques, font passer l'atome dans un niveau non piégé.

- Pour les alcalins, n_0 est très faible, et les collisions inélastiques font en général intervenir les atomes du gaz résiduel, autres que les atomes piégés, de sorte que Γ_{inel} est indépendant de n_0 . Par contre, pour l'hydrogène, n_0 est plus élevé, et les collisions inélastiques se font entre atomes d'hydrogènes piégés de sorte que $\Gamma_{inel} \propto n_0$.

4-2 Pertes de déversement ("spilling")

Origine physique

- Pour éviter que Γ_{ev} ne devienne trop faible quand T diminue et que η croît, on abaisse en général le seuil E_t au fur et à mesure que T décroît. Soit

$$\frac{1}{\tau_{tramp}} = - \frac{\dot{E}_t}{E_t} \quad (7.44)$$

un paramètre décrivant la vitesse à laquelle on abaisse E_t .

- En procédant ainsi, on laisse s'échapper les atomes d'énergie voisine de E_t . Le nombre de tels atomes s'échappant par unité de temps vaut :

$$\dot{N}_t = \rho(E_t) f(E_t) \dot{E}_t = - \frac{1}{\tau_{tramp}} \rho(E_t) f(E_t) E_t \quad (7.45)$$

Cette perte d'atomes ne fait intervenir aucune collision. Les atomes $E < E_t$ restent inaffectés et gardent la même température effective

Calcul du temps de perte correspondant

$$\rho(E_t) f(E_t) E_t = A_{PL} E_t^{\frac{3}{2} + \delta} n_0 \Lambda^3 e^{-\eta} \quad (7.46)$$

Mettons en facteur, au second membre de (7.46), $\xi_{\infty}(T) = A_{PL} (k_B T)^{\frac{3}{2} + \delta} \Gamma(\frac{3}{2} + \delta)$.
On obtient, compte tenu de l'équation (C.4) de l'appendice C :

$$\rho(E_t) f(E_t) E_t = \xi_{\infty}(T) \frac{\eta^{\frac{3}{2} + \delta} e^{-\eta}}{\Gamma(\frac{3}{2} + \delta)} n_0 \Lambda^3 = \left(\frac{3}{2} + \delta\right) \left[P\left(\frac{3}{2} + \delta, \eta\right) - P\left(\frac{5}{2} + \delta, \eta\right) \right] \xi_{\infty}(T) n_0 \Lambda^3 \quad (7.47)$$

- Reportons (7.47) dans (7.45) et faisons apparaître $N = n_0 V_e = n_0 \Lambda^3 \xi_{\infty}(T) P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)$ (voir Eq. 7.14). On obtient

$$\dot{N}_t = - \Gamma_t N \quad (7.48)$$

$$\text{avec} \quad \Gamma_t = \frac{1}{\tau_{tramp}} \tilde{\xi} \quad (7.49)$$

$$\text{et} \quad \tilde{\xi} = \left(\frac{3}{2} + \delta\right) \left[1 - \frac{P(\frac{5}{2} + \delta, \eta)}{P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)} \right] = \left(\frac{3}{2} + \delta\right) \left[1 - R(\frac{3}{2} + \delta, \eta) \right] \quad (7.50)$$

$\tilde{\xi}$ est appelé paramètre de déversement.

Références

- 1 - O.J. Luiten, M.W. Reynolds, J.T.M. Walraven, Phys. Rev. A53, 381 (1996)
- 2 - M. Abramowitz, I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover (1965)
- 3 - J.T.M. Walraven in "Quantum Dynamics of Simple Systems", Proceedings of the 44th. Scottish Universities Summer School, Stirling (1996)
- 4 - W. Ketterle, N.J. van Druten, in "Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics", Vol 36 (1996) ed. by B. Bederson and H. Walther

Fonctions Gamma incomplètes [2][3]

Définition
$$P(a, \eta) = \frac{\int_0^\eta u^{a-1} e^{-u} du}{\int_0^\infty u^{a-1} e^{-u} du} = \frac{\int_0^\eta u^{a-1} e^{-u} du}{\Gamma(a)} \quad (C.1)$$

Relation de récurrence

- Par intégration par parties, on obtient

$$\int_0^\eta u^{a-1} e^{-u} du = \frac{\eta^a e^{-\eta}}{a} + \frac{1}{a} \int_0^\eta u^a e^{-u} du \quad (C.2)$$

qui devient pour $\eta = \infty$

$$\Gamma(a+1) = a \Gamma(a) \quad (C.3)$$

- De (C.2) et (C.3), on déduit compte tenu de (C.1)

$$\frac{\eta^a e^{-\eta}}{a \Gamma(a)} = P(a, \eta) - P(a+1, \eta) \quad (C.4)$$

- Par ailleurs, d'après (C.1), $\partial P(a, \eta) / \partial \eta = \eta^{a-1} e^{-\eta} / \Gamma(a)$, de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial \eta} P(a, \eta) = \frac{a}{\eta} [P(a, \eta) - P(a+1, \eta)] \quad (C.5)$$

Développement en puissances de $1/\eta$

- D'après C.1
$$P(a, \eta) = 1 - \frac{\int_\eta^\infty u^{a-1} e^{-u} du}{\Gamma(a)} \quad (C.6)$$

- Par intégration par parties, on obtient

$$\int_\eta^\infty u^{a-1} e^{-u} du = \eta^{a-1} e^{-\eta} + (a-1) \int_\eta^\infty u^{a-2} e^{-u} du \quad (C.7)$$

- En itérant (C.8) et en reportant le développement obtenu dans (C.6), on obtient

$$P(a, \eta) = 1 - e^{-\eta} \frac{\eta^{a-1}}{\Gamma(a)} \left[1 + \frac{a-1}{\eta} + \frac{(a-1)(a-2)}{\eta^2} + \dots \right] \quad (C.8)$$

Autres relations utiles (extraites de l'Appendice de [3])

$$P(a, \eta) = e^{-\eta} \eta^a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta^m}{\Gamma(m+a+1)} \quad (C.9)$$

a entier \rightarrow
$$P(a, \eta) = 1 - e^{-\eta} \sum_{m=0}^{a-1} \frac{\eta^m}{m!} \quad (C.10)$$

$$R(a, \eta) \equiv \frac{P(a+1, \eta)}{P(a, \eta)} = 1 - e^{-\eta} \frac{\eta^a}{\Gamma(a+1)} \frac{1}{P(a, \eta)} \quad (C.11)$$

$$\frac{1}{R(a, \eta)} = 1 + \frac{a+1}{\eta} [1 - R(a+1, \eta)] \quad (C.12)$$

$$\frac{\partial R(a, \eta)}{\partial \eta} = \frac{R(a, \eta)}{\eta} [1 + a R(a, \eta) - (a+1) R(a+1, \eta)] \quad (C.13)$$

① Introduction

Ce qui a été fait dans les cours précédents

- Résolution numérique de l'équation cinétique montrant que, à chaque instant, la fonction de distribution de l'énergie d'un gaz d'atomes piégés dans un puits de profondeur E_t est très voisine d'une exponentielle tronquée

$$f(E) \approx n_0 \Lambda^3 e^{-E/k_B T} \gamma(E_t - E) \quad (8.1)$$

- Etat de quasi-équilibre décrit à chaque instant par 3 variables: T, N, E_t . Calcul dans un tel état de toutes les grandeurs physiques importantes. Par exemple, l'énergie totale E du gaz s'écrit

$$E = N k_B T \left(\frac{3}{2} + \delta\right) R\left(\frac{3}{2} + \delta, \eta\right) \quad (8.2)$$

où δ caractérise le potentiel $U(\vec{r}) = C r^{3/\delta}$ et où

$$\eta = \frac{E_t}{k_B T} \quad (8.3)$$

R est un quotient de 2 fonctions Gamma incomplètes (voir App. C page VII-10). Comme on utilisera très souvent (8.2), on prend une notation plus simple

$$E = N \tilde{c} k_B T \quad (8.4)$$

où

$$\tilde{c} = \left(\frac{3}{2} + \delta\right) R\left(\frac{3}{2} + \delta, \eta\right) \quad (8.5)$$

- Utilisant (8.1) dans l'équation cinétique (7.22) décrivant l'évolution de $f(E)$, on peut obtenir des expressions analytiques décrivant les taux de perte de N et E sans l'effet de l'évaporation: équations (7.31) et (7.35) décrivant $(dN/dt)_{ev}$ et $(dE/dt)_{ev}$.

On ajoute à ces équations les équations décrivant les taux de perte dues aux collisions inélastiques et au déversement (échappement des particule d'énergie égale à E_t quand on abaisse volontairement le seuil E_t).

Ce que l'on veut étudier maintenant

- On veut déterminer l'évolution au cours des temps du nombre d'atomes piégés N et de leur température T , ainsi que celle de toutes les grandeurs physiques intéressantes (volume, densité dans l'espace des phases...)

Il faut pour cela établir les équations différentielles donnant dN/dt et dT/dt et intégrer ces équations.

- Notons que l'évolution temporelle de E_t est fixée par l'expérimentateur, qui peut garder E_t constant (évaporation simple) ou abaisser E_t au fur et à mesure que T diminue pour que l'évaporation ne se ralentisse pas trop (évaporation forcée).

Principe du calcul

- Les variations de N et E dues à l'évaporation (et aux autres pertes) sont supposées suffisamment lentes à l'échelle du temps de thermalisation pour que le gaz atteigne à chaque instant un état de quasi-équilibre. Entre t et $t + dt$, le gaz passe d'un état N, T, E_t à un état $N + dN, T + dT, E_t + dE_t$ et son énergie (8.4) passe de E à $E + dE$.
- En considérant (8.4) comme une équation d'état, on peut relier dE à dN, dT, dE_t et obtenir une première équation reliant dE/dt à dN/dt et dT/dt . Les équations de perte donnent 2 autres équations pour dN/dt et dE/dt . En éliminant dE/dt entre ces 3 équations, on obtient les 2 équations

différentielles cherchées pour dN/dt et dT/dt .

② Les équations de base

2-1 Equation décrivant le changement de quasi-équilibre

$$\begin{aligned}
 - \quad N, T, E_t &\longrightarrow N+dN, T+dT, E_t+dE_t \\
 E(N, T, E_t) &\longrightarrow E(N+dN, T+dT, E_t+dE_t) = E(N, T, E_t) + dE \\
 dE &= \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{T, E_t} dN + \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{N, E_t} dT + \left(\frac{\partial E}{\partial E_t}\right)_{N, T} dE_t \quad (8.6)
 \end{aligned}$$

- Prenons le logarithme des 2 membres de (8.4) et dérivons par rapport à t
Il vient

$$\frac{\dot{E}}{E} = \frac{\dot{N}}{N} + \frac{\dot{T}}{T} + \frac{\dot{\tilde{C}}}{\tilde{C}} \quad (8.7)$$

\tilde{C} dépend en effet de T et E_t via $\eta = E_t/k_B T$.

$$\frac{\dot{\tilde{C}}}{\tilde{C}} = \frac{1}{\tilde{C}} \frac{d\tilde{C}}{d\eta} \dot{\eta} \quad (8.8)$$

Comme, d'après (8.3),

$$\frac{\dot{\eta}}{\eta} = \frac{\dot{E}_t}{E_t} - \frac{\dot{T}}{T} \quad (8.9)$$

on a

$$\frac{\dot{\tilde{C}}}{\tilde{C}} = \frac{\eta}{\tilde{C}} \frac{d\tilde{C}}{d\eta} \left(\frac{\dot{E}_t}{E_t} - \frac{\dot{T}}{T} \right) \quad (8.10)$$

En reportant (8.10) dans (8.7), on obtient :

$$\boxed{\frac{\dot{E}}{E} = \frac{\dot{N}}{N} + \left(1 - \frac{\eta}{\tilde{C}} \frac{d\tilde{C}}{d\eta}\right) \frac{\dot{T}}{T} + \frac{\eta}{\tilde{C}} \frac{d\tilde{C}}{d\eta} \frac{\dot{E}_t}{E_t}} \quad (8.11)$$

- On peut aisément calculer $\frac{\eta}{\tilde{C}} \frac{d\tilde{C}}{d\eta}$ en utilisant (8.5) et l'équation (C.13) de l'appendice C (p. VII-10)

$$\frac{\eta}{\tilde{C}} \frac{d\tilde{C}}{d\eta} = \frac{\eta}{R(\frac{3}{2}+\delta, \eta)} \frac{dR(\frac{3}{2}+\delta, \eta)}{d\eta} = 1 + (\frac{3}{2}+\delta)R(\frac{3}{2}+\delta, \eta) - (\frac{5}{2}+\delta)R(\frac{5}{2}+\delta, \eta) \quad (8.12)$$

Cas particulier de l'évaporation à η constant

- Si E_t est varié de manière à conserver $\eta = E_t/k_B T$ constant quand T varie, on a $\dot{\eta} = 0$ de sorte que $\dot{\tilde{C}}/\tilde{C} = 0$ d'après (8.8)
l'équation (8.7) se simplifie alors et devient :

$$\boxed{\eta \text{ constant} \longrightarrow \frac{\dot{E}}{E} = \frac{\dot{N}}{N} + \frac{\dot{T}}{T}} \quad (8.13)$$

- Notons que si $\dot{\eta} = 0$, on a également d'après (8.9) :

$$\eta \text{ constant} \longrightarrow \frac{\dot{E}_t}{E_t} = \frac{\dot{T}}{T} \quad (8.14)$$

2-2 Equations décrivant les pertes

Pertes de N

- On a

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_{ev} + \left(\frac{dN}{dt}\right)_{inel} + \left(\frac{dN}{dt}\right)_{spill} \quad (8.15)$$

où les 3 termes représentent les pertes par évaporation, collisions inélastiques et déversement ("spilling"), respectivement.

- D'après les résultats du cours VII, §§ 3 et 4 :

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{ev} = -\Gamma_{ev} N \quad (8.16)$$

avec

$$\Gamma_{ev} = \Gamma_{el} e^{-\eta} \frac{v_{ev}}{v_e} \quad (8.17)$$

$$\Gamma_{el} = n_0 \sigma v \tag{8.18}$$

$$\frac{V_{ev}}{V_e} = \eta - \left(\frac{5}{2} + \delta\right) R\left(\frac{3}{2} + \delta, \eta\right) \tag{8.19}$$

$$- \left(\frac{dN}{dt}\right)_{inel} = - \Gamma_{inel} N \tag{8.20}$$

$$- \left(\frac{dN}{dt}\right)_{spil} = - \Gamma_t N \tag{8.21} \quad \Gamma_t = - \tilde{\xi} \frac{\dot{E}_t}{E_t} \tag{8.22}$$

$$\tilde{\xi} = \left(\frac{3}{2} + \delta\right) \left[1 - R\left(\frac{3}{2} + \delta, \eta\right)\right] \tag{8.23}$$

- Finalement, en regroupant (8.16), (8.20), (8.21) et (8.22), on obtient pour l'équation décrivant les pertes de N

$$\boxed{\frac{\dot{N}}{N} = - \Gamma_{ev} - \Gamma_{inel} + \tilde{\xi} \frac{\dot{E}_t}{E_t}} \tag{8.24}$$

Pertes de E

- L'équivalent de (8.15) est

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{dE}{dt}\right)_{ev} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{inel} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{spil} \tag{8.25}$$

- D'après les résultats du cours VII, § 3.2 :

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{ev} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_{ev} (\eta + \tilde{\kappa}) k_B T \tag{8.26}$$

avec

$$\tilde{\kappa} = 1 - \frac{X_{ev}}{V_{ev}} \tag{8.27}$$

$$\frac{X_{ev}}{V_{ev}} = \frac{P\left(\frac{7}{2} + \delta, \eta\right)}{P\left(\frac{3}{2} + \delta, \eta\right)} \frac{V_e}{V_{ev}} \tag{8.28}$$

En reportant (8.16) dans (8.26), on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dt}\right)_{ev} &= - \Gamma_{ev} (\eta + \tilde{\kappa}) N k_B T \\ &= - \Gamma_{ev} \frac{\eta + \tilde{\kappa}}{\tilde{c}} \underbrace{N \tilde{c} k_B T}_{= E} = - \Gamma_{ev} \frac{\eta + \tilde{\kappa}}{\tilde{c}} E \end{aligned} \tag{8.29}$$

- On a de même

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{inel} = - \Gamma_{inel} E \tag{8.30}$$

En effet, les atomes de gaz résiduel responsables des collisions inélastiques sont très chauds. Leur énergie est très grande devant celle des atomes piégés, de sorte que la section efficace de collisions inélastique dépend très peu de l'énergie des atomes piégés. C'est ce qui explique pourquoi le même terme apparaît dans (8.20) et (8.30)

- Enfin, pour les pertes par déversement, il suffit de noter que l'énergie des particules qui s'échappent quand on abaisse E_t est égale à E_t , de sorte que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dt}\right)_{spil.} &= \left(\frac{dN}{dt}\right)_{spil.} E_t = \tilde{\xi} \frac{\dot{E}_t}{E_t} N E_t \\ &= \tilde{\xi} \frac{\dot{E}_t}{E_t} N \eta k_B T = \tilde{\xi} \frac{\dot{E}_t}{E_t} \frac{\eta}{\tilde{c}} \underbrace{N \tilde{c} k_B T}_{= E} \\ &= \tilde{\xi} \frac{\dot{E}_t}{E_t} \frac{\eta}{\tilde{c}} E \end{aligned} \tag{8.31}$$

- Finalement, en regroupant (8.29), (8.30) et (8.31), on obtient pour l'équation décrivant les pertes de E

$$\boxed{\frac{\dot{E}}{E} = - \frac{\eta + \tilde{\kappa}}{\tilde{c}} \Gamma_{ev} - \Gamma_{incl} + \frac{\tilde{\xi} \eta}{\tilde{c}} \frac{\dot{E}_t}{E_t}} \quad (8.32)$$

③ Evaporation à η constant

3-1 Simplification des équations

- Les équations du paragraphe précédent font intervenir toute une série de coefficients comme \tilde{c} , v_{ev}/v_e , $\tilde{\kappa}$, x_{ev}/v_{ev} , $\tilde{\xi}$, qui ne dépendent que de δ et de $\eta = E_t/k_B T$, via des fonctions Gamma incomplètes comme $P(a, \eta)$ ou $R(a, \eta)$. Si l'on suppose que η reste constant quand on abaisse E_t pour forcer l'évaporation, tous ces coefficients sont indépendants du temps et la résolution des équations d'évolution de E, N, T est grandement simplifiée. On peut même obtenir des solutions analytiques pour décrire l'évolution temporelle.
- Le but de ce paragraphe est de présenter une étude analytique du refroidissement évaporatif dans un tel cas où η est fixe. La démarche suivie s'inspire grandement de celle présentée dans la référence [5].
- Quand η est constant, on peut utiliser l'équation (8.13) décrivant le changement de quasi-équilibre et tenir compte de (8.14) pour remplacer \dot{E}_t/E_t par \dot{T}/T dans les équations de perte (8.24) et (8.32). On obtient

$$\begin{cases} \frac{\dot{E}}{E} = \frac{\dot{N}}{N} + \frac{\dot{T}}{T} & (8.33a) \\ \frac{\dot{N}}{N} = -\Gamma_{ev} + \tilde{\xi} \frac{\dot{T}}{T} - \Gamma_{incl} & (8.33b) \\ \frac{\dot{E}}{E} = -\frac{\eta + \tilde{\kappa}}{\tilde{c}} \Gamma_{ev} + \frac{\tilde{\xi} \eta}{\tilde{c}} \frac{\dot{T}}{T} - \Gamma_{incl} & (8.33c) \end{cases}$$

Le fait que $\tilde{\xi}$, Γ_{incl} , η , $\tilde{\kappa}$, \tilde{c} soient indépendants du temps ne doit pas faire croire que le système (8.33) est un système différentiel linéaire à coefficients constants. En effet, le taux d'évaporation Γ_{ev} , donné par (8.17) et (8.18), est proportionnel à $n_0 v$. Or, la densité spatiale n_0 et la vitesse moyenne thermique v dépendent de N et T . D'après les résultats du cours VII [voir (7.13), (7.14), (7.6), (7.27)]

$$\begin{cases} n_0 = \frac{N}{v_e} = \frac{N}{\Lambda^3(T) \zeta_{\infty}(T) P(\frac{3}{2} + \delta, \eta)} \propto N T^{-\delta} & (8.34a) \\ v = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}} \propto T^{1/2} & (8.34b) \end{cases}$$

A cause de la présence de Γ_{ev} , les équations (8.33) sont donc des équations non-linéaires.

- Notons cependant que l'équation (8.33a) ne fait pas intervenir Γ_{ev} . De plus, en multipliant l'équation (8.33b) par $-(\eta + \tilde{\kappa})/\tilde{c}$ et en l'ajoutant à (8.33c), on peut obtenir une autre équation où ne figure plus Γ_{ev} .

$$\frac{\dot{E}}{E} = \frac{\eta + \tilde{\kappa}}{\tilde{c}} \frac{\dot{N}}{N} - \frac{\tilde{\kappa} \tilde{\xi}}{\tilde{c}} \frac{\dot{T}}{T} - \Gamma_{incl} \left(1 - \frac{\eta + \tilde{\kappa}}{\tilde{c}}\right) \quad (8.35)$$

L'élimination de $\frac{\dot{E}}{E}$ entre (8.33a) et (8.35) conduit alors à une

équation où ne figurent plus, ni \dot{E}/E , ni Γ_{ev}

$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\dot{T}}{T} - \Gamma_{incl} \quad (8.36)$$

où

$$\tilde{\alpha} = \frac{\eta + \tilde{\kappa}}{\tilde{c}} - 1 = \frac{\eta + \tilde{\kappa} - \tilde{c}}{\tilde{c} + \tilde{\kappa} \tilde{\xi}} \quad (8.37)$$

- Ainsi, on peut éliminer \dot{E}/E des équations (8.33) pour obtenir le système suivant de 2 équations pour \dot{N}/N et \dot{T}/T :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{N}}{N} = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\dot{T}}{T} - \Gamma_{incl} \\ \frac{\dot{N}}{N} = -\Gamma_{ev} + \tilde{\xi} \frac{\dot{T}}{T} - \Gamma_{incl} \end{array} \right. \quad (8.38 a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{N}}{N} = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\dot{T}}{T} - \Gamma_{incl} \\ \frac{\dot{N}}{N} = -\Gamma_{ev} + \tilde{\xi} \frac{\dot{T}}{T} - \Gamma_{incl} \end{array} \right. \quad (8.38 b)$$

On pourrait bien sûr calculer séparément \dot{N}/N et \dot{T}/T en fonction de Γ_{ev} , Γ_{incl} , $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\xi}$ (voir les équations (8.46) plus loin), mais nous préférons garder pour le moment les équations sous la forme (8.38), car la première de ces 2 équations ne fait pas intervenir Γ_{ev} et peut être intégrée directement pour faire apparaître des constantes du mouvement et des lois de puissance.

3-2 Constantes du mouvement et lois de puissance

Cas simple où les collisions inélastiques peuvent être négligées

- Si l'on fait $\Gamma_{incl} = 0$ dans (8.38 a), on obtient

$$\frac{\dot{T}}{T} = \tilde{\alpha} \frac{\dot{N}}{N} \iff \frac{d}{dn} \left(\ln \frac{T}{N^{\tilde{\alpha}}} \right) = 0 \quad (8.39)$$

- On en déduit que $T/N^{\tilde{\alpha}}$ est une constante du mouvement et que T est donné en fonction de N par une loi de puissance d'exposant $\tilde{\alpha}$

$$\frac{T_1}{N_1^{\tilde{\alpha}}} = \frac{T_2}{N_2^{\tilde{\alpha}}} \quad (8.40)$$

- Nous retrouvons ainsi le résultat du § 3.2 du cours V. Il est intéressant de comparer l'expression (5.49) du coefficient α introduit dans le cours V, et l'expression (8.37) établie ici de manière quantitative.

Négligeons tout d'abord le déversement en posant $\tilde{\xi} = 0$. En utilisant (8.5), on obtient alors pour α

$$\tilde{\xi} = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\eta + \tilde{\kappa}}{\left(\frac{3}{2} + \delta\right) R\left(\frac{3}{2} + \delta, \eta\right)} - 1 \quad (8.41)$$

Le traitement présenté ici donne tout d'abord une expression précise pour $\tilde{\kappa}$ (voir (8.27)). On voit aussi apparaître au dénominateur de (8.41), une correction $R\left(\frac{3}{2} + \delta, \eta\right)$ liée au fait que le potentiel de piègeage n'a pas une profondeur infinie. Enfin, la présence de $\tilde{\xi}$ au dénominateur de (8.37) montre que le déversement diminue la valeur de $\tilde{\alpha}$.

- Toutes les lois de puissance du tableau II de la page V-8 demeurent valables, à condition de remplacer partout α par $\tilde{\alpha}$.

Modifications introduites par les collisions inélastiques

- Tenons compte maintenant du terme en Γ_{incl} de (8.38 a). On peut réécrire cette équation sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \ln \left(\frac{N}{T^{1/\alpha}} \right) = -\Gamma_{\text{inel}} \quad (8.42)$$

Cette équation s'intègre aisément pour donner :

$$\frac{N_1}{T_1^{1/\alpha}} = \frac{N_2}{T_2^{1/\alpha}} e^{-\Gamma_{\text{inel}} (t_1 - t_2)} \quad (8.43)$$

- On peut donc là encore introduire une quantité qui se conserve au cours du temps

$$\frac{T_1}{N_1^\alpha} e^{-\tilde{\alpha} \Gamma_{\text{inel}} t_1} = \frac{T_2}{N_2^\alpha} e^{-\tilde{\alpha} \Gamma_{\text{inel}} t_2} \quad (8.44)$$

Si T_2 et N_2 correspondent à l'instant initial ($t_2=0$), on voit que T_1 diminue moins (pour la même perte d'atomes), par un facteur $\exp(\tilde{\alpha} \Gamma_{\text{inel}} t_1)$, qu'en l'absence de collisions. Les atomes perdus par collisions inélastiques ne contribuent pas en effet au refroidissement.

3-3 Changement de variables

Pour étudier la cinétique du refroidissement, il faut maintenant utiliser la 2^{ème} équation (8.38 b). En fait, comme Γ_{ev} dépend de n_0 et v , et non directement de N et T , il est plus commode de changer de variables et de passer, grâce aux équations (8.34), des variables N, T aux variables n_0, v , de manière à obtenir des équations ne faisant intervenir que n_0 et v .

Nous allons également changer légèrement de notations, et utiliser n plutôt que n_0 , de manière à éviter toute confusion entre n_0 et la valeur de n à $t=0$.

Passage des variables N, T aux variables n, v

- Des équations (8.34) on déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{n} \\ n \end{array} = \frac{\dot{N}}{N} - \delta \frac{\dot{T}}{T} \right. \quad (8.45a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v} \\ v \end{array} = \frac{1}{2} \frac{\dot{T}}{T} \right. \quad (8.45b)$$

- En réécrivant les équations (8.38) sous une forme qui donne séparément \dot{N}/N et \dot{T}/T

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{N} \\ N \end{array} = - \frac{1}{1 - \tilde{\alpha} \tilde{\xi}} \Gamma_{ev} - \Gamma_{\text{inel}} \right. \quad (8.46a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{T} \\ T \end{array} = - \frac{\tilde{\alpha}}{1 - \tilde{\alpha} \tilde{\xi}} \Gamma_{ev} \right. \quad (8.46b)$$

et en combinant (8.45) et (8.46), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{n} \\ n \end{array} = \frac{\delta \tilde{\alpha} - 1}{1 - \tilde{\alpha} \tilde{\xi}} \Gamma_{ev} - \Gamma_{\text{inel}} \right. \quad (8.47a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v} \\ v \end{array} = - \frac{\tilde{\alpha}}{2(1 - \tilde{\alpha} \tilde{\xi})} \Gamma_{ev} \right. \quad (8.47b)$$

- Par ailleurs, d'après (8.17) et (8.18), $\Gamma_{ev} = n v \sigma e^{-\eta} V_{ev}/V_e$.

Si l'on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} = \frac{\delta \tilde{\alpha} - 1}{1 - \tilde{\alpha} \tilde{\xi}} e^{-\eta} \frac{V_{ev}}{V_e} \right. \quad (8.48a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B \\ C \end{array} = \frac{\tilde{\alpha}}{2(1 - \tilde{\alpha} \tilde{\xi})} e^{-\eta} \frac{V_{ev}}{V_e} \right. \quad (8.48b)$$

les équations (8.47) deviennent

$$\begin{cases} \dot{n} = A n^2 v \sigma - \Gamma_{\text{incl}} n & (8.49.a) \\ \dot{v} = -B n v^2 \sigma & (8.49.b) \end{cases}$$

Il sera également commode pour la suite de poser

$$\beta = \frac{A}{B} = \frac{2(\delta\tilde{\alpha} - 1)}{\tilde{\alpha}} \quad (8.50)$$

Choix de variables sans dimensions

- Les équations prennent une forme encore plus simple si l'on prend pour unité de densité et unité de vitesse les valeurs n_0 et v_0 de n et v à $t=0$

$$\hat{n} = n/n_0 \quad (8.51.a) \quad \hat{v} = v/v_0 \quad (8.51.b)$$

Comme unité de temps τ_0 , on prend le temps entre collisions élastiques à l'instant $t=0$

$$\hat{t} = t/\tau_0 \quad (8.52.a) \quad \tau_0 = \frac{1}{n_0 \sigma v_0} \quad (8.52.b)$$

- les équations (8.49) deviennent alors

$$\begin{cases} \frac{d\hat{n}}{d\hat{t}} = A \hat{n}^2 \hat{v} - r \hat{n} & (8.53.a) \\ \frac{d\hat{v}}{d\hat{t}} = -B \hat{n} \hat{v}^2 & (8.53.b) \end{cases}$$

avec
$$r = \frac{\Gamma_{\text{incl}}}{\Gamma_{\text{el}}(t=0)} = \frac{\Gamma_{\text{incl}}}{n_0 \sigma v_0} \quad (8.54)$$

- Pour ne pas multiplier les notations, nous continuerons à utiliser n et v au lieu de \hat{n} et \hat{v} , et \dot{n} et \dot{v} au lieu de $d\hat{n}/d\hat{t}$ et $d\hat{v}/d\hat{t}$. Il est bien entendu cependant que, dans tout ce qui suit, les grandeurs utilisées sont sans dimensions et valent toutes 1 à $t=0$. Nous recevrons donc simplement 8.53 sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{n} = A n^2 v - r n & (8.55.a) \\ \dot{v} = -B n v^2 & (8.55.b) \end{cases}$$

- Des équations (8.55), on déduit aisément

$$B \frac{\dot{n}}{n} + A \frac{\dot{v}}{v} = -B r \quad (8.56)$$

c'est à dire encore, compte tenu de (8.50)

$$\frac{\dot{n}}{n} + \beta \frac{\dot{v}}{v} = -r \quad (8.57)$$

équation qui s'intègre immédiatement pour donner

$$n v^\beta = e^{-r t} \quad (8.58)$$

ce qui est l'analogie de l'équation (8.43) pour les nouvelles variables n et v (l'instant t_2 étant pris comme instant initial où $n_0 = v_0 = 1$)

- Il nous faut maintenant établir une autre relation analogue à (8.58) à partir des équations (8.55) pour résoudre le problème de l'évolution temporelle. Nous allons le faire en étudiant l'évolution du taux de collisions élastiques $n v \sigma$, c-à-d encore celui de $n v$. Ceci nous permettra également de discuter la notion d'emballement ("runaway") de l'évaporation.

3.4 Evolution du taux de collisions élastiques

L'évolution de $\Gamma_{el} = n\sigma v$ est déterminée par celle de $x = nv$. D'après (8.55)

$$\frac{d}{dt} nv = \dot{x} = \dot{n}v + n\dot{v} = (A-B)n^2v^2 - rnv = (A-B)x^2 - rx \quad (8.59)$$

Collisions inélastiques négligées $\Gamma_{inel} = 0$ $r = 0$

$$\frac{dx}{dt} = (A-B)x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x^2} = (A-B)dt \quad (8.60)$$

L'intégration de (8.60) avec la condition initiale $x(0) = 1$ donne :

$$-\frac{1}{x} + 1 = (A-B)t \quad \Rightarrow \quad x = nv = \frac{1}{1 - (A-B)t} = \frac{1}{1 - (\beta-1)Bt} \quad (8.61)$$

- Les variations de $x = nv$ avec t sont représentées sur la figure 1 dans 3 cas

(i) $A < B$ (ou $\beta < 1$)

Le dénominateur de (8.61) croît de 1 à $+\infty$ quand t croît et nv décroît de 1 à 0

(ii) $A = B$ (ou $\beta = 1$)

nv reste constant et égal à 1

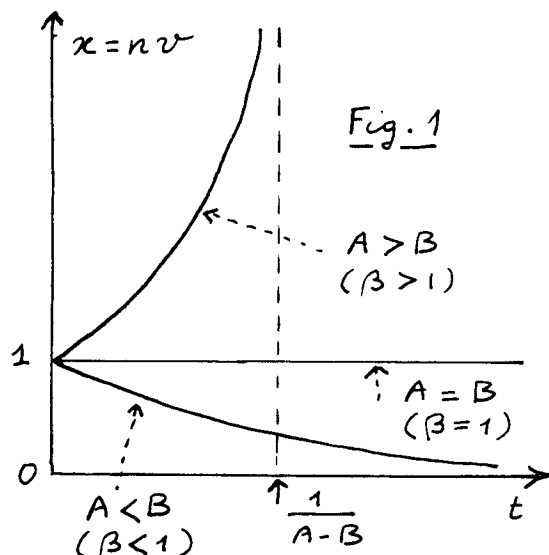
$$\beta = 1 \rightarrow nv = 1 \quad (8.62)$$

(iii) $A > B$ (ou $\beta > 1$)

Le dénominateur de (8.61) décroît de 1 à 0 quand t croît de 0 à $1/(A-B)$

nv croît à partir de 1 et diverge au bout d'un temps fini

$$t_{div} = \frac{1}{A-B} \quad (8.63)$$



Collisions inélastiques non négligées $\Gamma_{inel} \neq 0$ $r \neq 0$

$$\frac{dx}{dt} = [(A-B)x - r]x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x[(A-B)x - r]} = dt \quad (8.64)$$

$$\Rightarrow -\frac{dx}{x} + \frac{dx}{x - \frac{r}{A-B}} = r dt \quad \Rightarrow \quad x = nv = \frac{e^{-rt}}{1 - (1 - e^{-rt}) \frac{A-B}{r}}$$

- Les variations de $x = nv$ avec t ont la même allure que celle de la figure 1. La valeur critique de $A-B$ est maintenant non plus $A-B=0$, mais $A-B=r$

(i) $A-B < r$: le dénominateur de 8.64 ne s'annule jamais et croît de 1 à $1 - (A-B)/r > 1$. Le numérateur s'annule exponentiellement. $x = nv$ décroît de 1 à 0 quand t croît

(ii) $A-B = r$ l'équation (8.64) donne $x = nv = 1$

$$A-B = r \rightarrow nv = 1 \quad (8.65)$$

(iii) $A-B > r$ Le dénominateur de (8.64) décroît à partir de 1 et s'annule pour une certaine valeur de t telle que $e^{-rt} = 1 - \frac{r}{A-B}$

L'exponentielle amortie du numérateur n'empêche pas alors $x = nv$ de diverger au bout d'un temps fini donné par

$$t_{div} = -\frac{1}{r} \ln\left(1 - \frac{r}{A-B}\right) \quad (8.66)$$

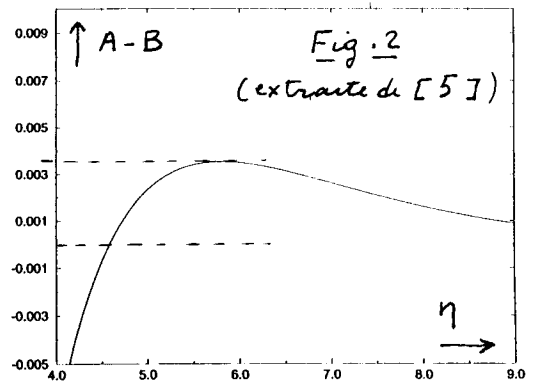
Quand $r \rightarrow 0$, on vérifie bien que (8.64) tend vers (8.61) et (8.66) vers (8.63)

- La divergence de $x = nV$ qui apparait au bout d'un temps fini quand $A-B > 0$ ou $A-B > r$ est liée au caractère non linéaire de l'équation (8.53) et reflète un emballement du temps de collisions élastiques. Nous verrons plus loin qu'un tel emballement peut apparaître également sur d'autres grandeurs physiques, comme la densité D dans l'espace des phases.

- La figure 2, extraite de [5], donne les variations avec η de $A-B$ pour $\delta = 3/2$ (puits parabolique)

Pour $r=0$ ($\Gamma_{inél}=0$), $A-B$ est positif et l'évaporation ne s'emballé que si η est supérieur à une valeur de l'ordre de 4.6

On voit également que $A-B$ atteint une valeur maximale de l'ordre de 0.0033 pour η de l'ordre de 6. En d'autres termes, il ne pourra jamais y avoir d'emballement si $r > 0.0033$, c'est à dire s'il y a moins de $1/0.0033 = 300$ collisions élastiques (se produisant avec le temps $\Gamma_{el}(t=0)$ en $t=0$) pendant le temps de piégeage $T_{piégeage} = T_{inél} = 1/\Gamma_{inél}$. En effet, d'après (8.54), $1/r = \Gamma_{el}(t=0) / \Gamma_{inél} = \Gamma_{el}(t=0) T_{piégeage}$. Par contre, si η est compris entre les abscisses des 2 points d'intersection de la courbe $A-B$ de la figure 2 avec l'horizontale d'ordonnée r .



- l'étude présentée ici permet donc de préciser le seuil au dessous duquel les collisions inélastiques doivent être réduites par rapport aux collisions élastiques si l'on veut atteindre le régime d'emballement. Elle montre qu'un tel régime conduit à une divergence du temps de collisions élastiques. Elle montre enfin que pour chaque type de piège, caractérisé par δ , il existe une plage de valeurs optimales de η .

Références (suite de la liste de la page VII-9)

[5] D. Guéry Odelin, Notes non publiées, résultant de calculs faits dans l'équipe de J. Dalibard, en collaboration avec M.J. Reynolds.

③ Evaporation à η constant

3-5 Evolution temporelle de quelques grandeurs physiques

Principe du calcul

- Nous avons établi plus haut (§§ 3-3 et 3-4) 2 relations entre la densité spatiale n et la vitesse moyenne thermique v :

$$n v \beta = e^{-rt} \quad (9.1)$$

$$n v = \frac{e^{-rt}}{1 - \left(\frac{A-B}{r}\right)(1-e^{-rt})} = \frac{e^{-rt}}{1 - B(1-e^{-rt})\frac{\beta-1}{r}} \quad (9.2)$$

Rappelons que $r = \Gamma_{\text{ind}} / \Gamma_{\text{el}}(t=0)$ et que $\beta = A/B$ où A et B sont donnés par (8.48). Rappelons également que n et v sont exprimées en unités de n_0 et v_0 , où n_0 et v_0 sont les valeurs de n et v à $t=0$, et que l'unité de temps est $\tau_0 = 1/n_0 v_0$.

- Des équations (9.1) et (9.2) on peut extraire n et v

$$n = \frac{e^{-rt}}{\left[1 - B(1-e^{-rt})\frac{\beta-1}{r}\right] \frac{\beta}{\beta-1}} \quad (9.3)$$

$$v = \left[1 - B(1-e^{-rt})\frac{\beta-1}{r}\right] \frac{1}{\beta-1} \quad (9.4)$$

- Toute grandeur physique peut être exprimée en fonction de n et v , et son évolution temporelle se déduit donc de (9.3) et (9.4).
 Considérons par exemple N , T et la densité D dans l'espace des phases

$$\left\{ \begin{aligned} N = n V_e \propto n T^\delta \propto n v^{2\delta} &= \frac{e^{-rt}}{\left[1 - B(1-e^{-rt})\frac{\beta-1}{r}\right] \frac{\beta-2\delta}{\beta-1}} \quad (9.5) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} T \propto v^2 &= \left[1 - B(1-e^{-rt})\frac{\beta-1}{r}\right] \frac{2}{\beta-1} \quad (9.6) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} D \propto n v^{-3} &= \frac{e^{-rt}}{\left[1 - B(1-e^{-rt})\frac{\beta-1}{r}\right] \frac{\beta+3}{\beta-1}} \quad (9.7) \end{aligned} \right.$$

Cas particuliers

(i) $r=0$ ($\Gamma_{\text{ind}}=0$). Les équations (9.5), (9.6), (9.7) deviennent

$$N \propto \frac{1}{\left[1 - B(\beta-1)t\right] \frac{\beta-2\delta}{\beta-1}} \quad (9.8)$$

$$T \propto \left[1 - B(\beta-1)t\right] \frac{2}{\beta-1} \quad (9.9)$$

$$D \propto \frac{1}{\left[1 - B(\beta-1)t\right] \frac{\beta+3}{\beta-1}} \quad (9.10)$$

(ii) $\beta = 1$

Les 2 équations (9.1) et (9.2) sont alors identiques et ne permettent plus de déterminer séparément n et v . Revenons à l'équation (8.55 b) et remplaçons au 2^{ème} membre $n v$ par e^{-rt} , compte tenu de 9-1

$$\dot{v} = -B e^{-rt} v \quad (9.11)$$

Cette équation s'intègre aisément, avec la condition initiale $v(0) = 1$

$$v = e^{-\frac{B}{r}(1-e^{-rt})} \quad (9.12)$$

v décroît de 1 à $e^{-B/r}$ quand t croît de 0 à $+\infty$. $n = e^{-rt}/v$ peut commencer par croître quand t croît si r est suffisamment petit, mais tend ensuite vers 0 quand $t \rightarrow \infty$.

(iii) $\beta = 1$ et $r = 0$

On a alors $n v = 1$ et $A = B$. Les équations (8.55) donnent

$$B = 1, r = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = e^{-Bt} \\ n = e^{+Bt} \end{cases} \quad (9.13)$$

Exemples de courbes donnant l'évolution temporelle de D

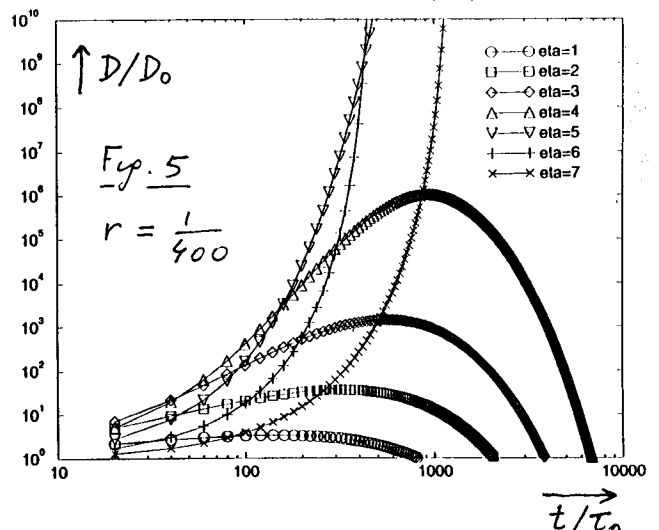
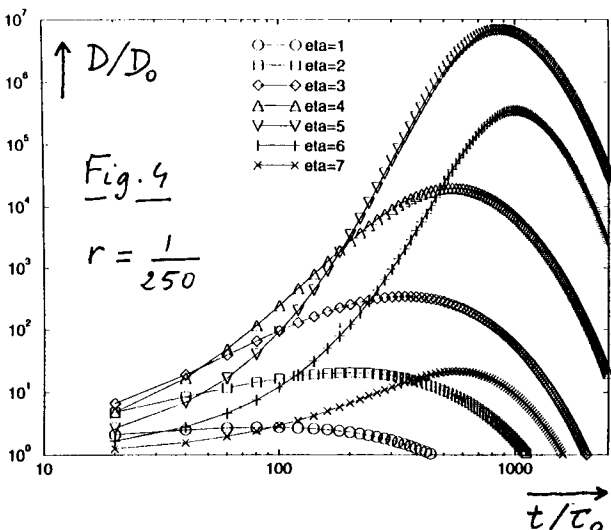
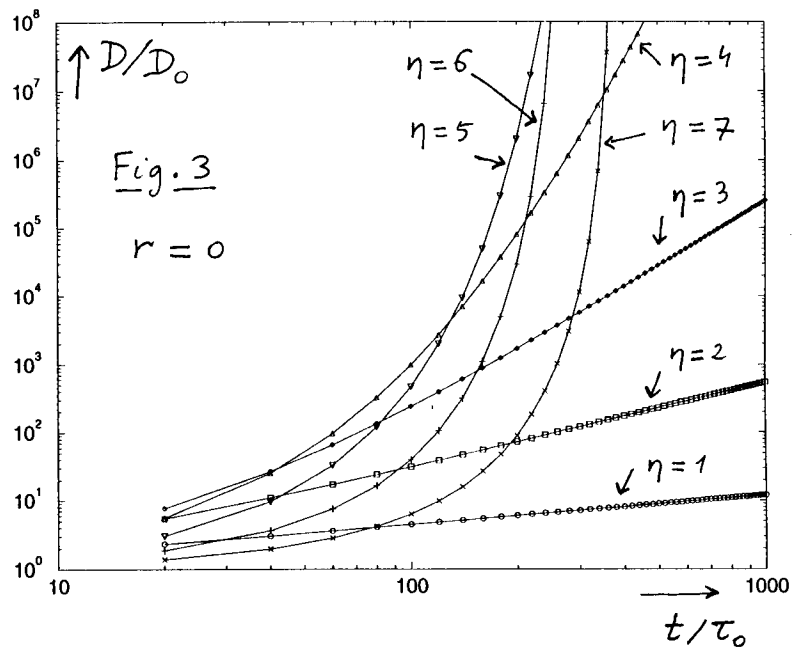
Courbes calculées à partir de (9.4) ou (9.10) et extraites de la référence [5] page VIII-9.

Chaque réseau de courbes correspond à diverses valeurs de η : $\eta = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ et à la même valeur de $\delta = 3/2$ (puits harmonique)

Fig. 3 $r = 0$

Fig. 4 $r = \frac{1}{250}$

Fig. 5 $r = \frac{1}{400}$



(i) Cas $r=0$ ($\Gamma_{\text{incl}}=0$)

- Il faut alors utiliser (9.10). Le crochet figurant au dénominateur de (9.10) est le même que celui qui figure au dénominateur de l'expression (8.61) qui donne les variations de $n\nu$. Il est élevé à la puissance $(\beta+3)/(\beta-1)$, exposant dont les variations avec β sont représentées sur la figure 6. En plus de la valeur $\beta=1$ qui sépare les 2 régimes de variation de $n\nu$ avec t (voir Fy.1 page VIII-8), apparaît la valeur $\beta=-3$ pour laquelle $(\beta+3)/(\beta-1)$ s'annule et change de signe.

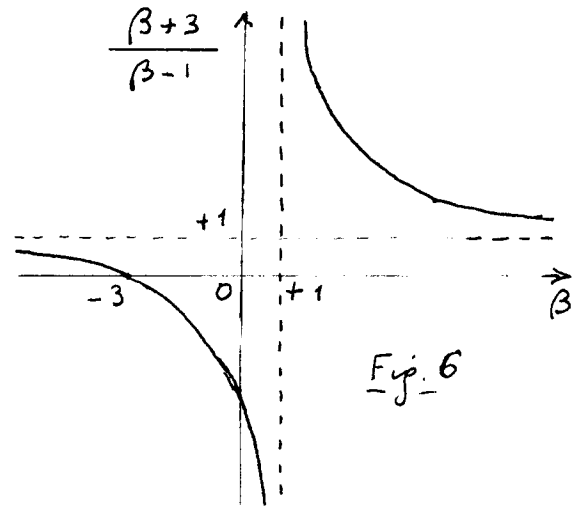


Fig. 6

- Les variations de β (voir Eq. 8.50) avec η sont données sur la figure D3 de l'Appendice D qui regroupe quelques autres figures donnant les variations avec η d'autres paramètres importants. On voit que les valeurs $\eta=1, 2, 3, 4$ considérées sur la figure 3 correspondent à des valeurs croissantes de β comprises entre -3 et $+1$. L'exposant $(\beta+3)/(\beta-1)$ est alors négatif et son module croît quand η croît de 1 à 4. Comme $\beta < 1$, $1 - B(\beta-1)t$ croît de 1 à $+\infty$ quand t croît de 0 à $+\infty$, et se comporte comme $B(1-\beta)t$ pour t grand. La densité D dans l'espace des phases se comporte donc comme une loi de puissance $t^{(\beta+3)/(1-\beta)}$ pour t grand. Dans les coordonnées log-log de la figure 3, on s'attend donc à trouver pour le comportement asymptotique de D des droites de pente $(\beta+3)/(1-\beta)$ croissant avec η quand η croît de 1 à 4. C'est bien ce que l'on constate sur la figure 3.

- Pour $\eta=5, 6, 7$, on voit sur la figure D3 de l'appendice D que $\beta > 1$. Le crochet du dénominateur de (9.10) s'annule pour $t = 1/B(\beta-1) = 1/(A-B)$. Comme l'exposant $(\beta+3)/(\beta-1)$ est alors positif (voir Fy.6), D croît quand t croît de 0 à $t_{\text{div}} = 1/(A-B)$ et diverge pour $t = 1/(A-B)$. C'est bien ce que l'on constate sur la figure 3. L'abscisse $t_{\text{div}} = 1/(A-B)$ où se produit la divergence est d'autant plus petite que $A-B$ est plus grand. On voit sur la figure 2 page VIII-9 que $A-B$ est plus grand pour $\eta=6$ que pour $\eta=5$ ou $\eta=7$. Effectivement, c'est bien la courbe $\eta=6$ qui diverge le plus rapidement sur la figure 3.

- Le régime d'emballement conduit donc à une divergence, non seulement du taux de collisions élastiques $\Gamma_{\text{el}} = n\sigma\nu$, mais aussi de la densité D dans l'espace des phases. On voit donc tout l'intérêt qu'il y a à atteindre un tel régime dans la recherche de la condensation de Bose-Einstein.

- Notons enfin que si $\beta=1$, $D \propto n\nu^{-3}$ varie exponentiellement avec t , comme e^{4Bt} [voir (9.13)]. La croissance asymptotique de D avec t passe donc d'une loi de puissance à une exponentielle quand β atteint la valeur 1, avant de diverger au bout d'un temps fini quand $\beta > 1$.

(ii) Cas $r \neq 0$ ($\Gamma_{\text{inel}} \neq 0$)

- Il faut alors utiliser (9.7). Le crochet figurant au dénominateur de (9.7) est le même que celui figurant au dénominateur de (8.64) puisque $A-B = (\beta-1)B$. Pour $(A-B) > r$, on s'attend donc, comme précédemment, à une divergence simultanée de P_{el} et D lorsque t croît et atteint la valeur t_{div} donnée en (8.66). D'après la figure 2, page VIII-9, la condition $A-B > r$ ne peut être réalisée que si $r < 0.0033$, ce qui est le cas pour la figure 5 correspondant à $r = 1/400 = 0.0025$, mais non pour la figure 4 correspondant à $r = 1/250 = 0.004$. Effectivement, on voit que des divergences sur D n'apparaissent que sur la figure 5. La présence de pertes dues aux collisions inélastiques n'empêche pas une divergence simultanée de P_{el} et D quand la condition d'emballement est satisfaite. Bien sûr, cette condition est plus difficile à réaliser en présence de collisions inélastiques puisqu'il faut avoir $A-B > r$ et non pas seulement $A-B > 0$.

- Notons enfin que pour les valeurs de η conduisant à des valeurs de $A-B$ telles que $A-B < r$, tout en ayant $\beta > -3$ (ce qui est le cas de toutes les courbes de la figure 4 et des courbes $\eta = 1, 2, 3, 4$ de la figure 5), D commence par croître, passe par un maximum, puis décroît. L'exponentielle e^{-rt} du numérateur de (9.7), qui décrit les fuites hors du piège, finit par imposer une décroissance aux grandes valeurs de t . Sans cette exponentielle, les variations du dénominateur conduiraient à une croissance de D . Les courbes de la figure 4 permettent donc de déterminer quelle est la valeur optimale de η pour obtenir la valeur la plus élevée possible de D , quand le régime d'emballement ne peut pas être atteint. Prendre une valeur de η trop élevée conduit à une évaporation efficace, mais trop lente devant les pertes. Il y a un compromis à réaliser entre efficacité et rapidité.

3-5 Importance d'une compression adiabatiqueMotivations

- L'étude précédente montre tout l'intérêt qu'il y a à atteindre le régime d'emballement, ou tout au moins de s'en rapprocher le plus possible. Les grandeurs physiques intéressantes, comme D , peuvent atteindre des valeurs importantes, voire même diverger.
- Pour atteindre le régime d'emballement, il faut réaliser $A-B > r$ (voir § 3-4). Comme $A-B$ est fixé et ne peut dépasser 0.0033 (voir Fig. 2, page VIII-4), il faut diminuer r autant que possible. Or, $r = \Gamma_{\text{inel}} / P_{\text{el}}(t=0)$. Il faut donc diminuer au maximum la pression du gaz résiduel, responsable de Γ_{inel} , et essayer de partir d'un état initial à $t=0$, où P_{el} a la valeur la plus grande possible.

- Comme nous allons le voir, une compression adiabatique préalable ne change pas la densité initiale $D(t=0)$ dans l'espace des phases tout en augmentant $n v$, c'est à dire Γ_{cl} .

Cas simple d'un potentiel harmonique

- Il est plus simple en fait de raisonner en termes quantiques. Supposons qu'on augmente la courbure du puits harmonique, suffisamment lentement pour que les populations de niveaux d'énergie ne changent pas (Fig. 7)

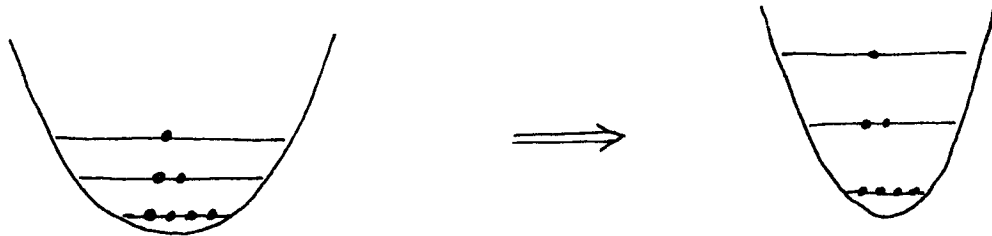


Fig. 7

- Multiplier dans l'hamiltonien $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$ la constante de raideur k par g revient à multiplier la fréquence d'oscillation ω par \sqrt{g} puisque $k = m \omega^2$.

$$k \rightarrow g k \quad \Rightarrow \quad \omega \rightarrow \sqrt{g} \omega \quad (9.14)$$

La température T , qui est proportionnelle à l'énergie moyenne, donc à ω , est multipliée par \sqrt{g} . La vitesse moyenne v , proportionnelle à \sqrt{T} , est multipliée par $g^{1/4}$

$$T \rightarrow \sqrt{g} T \quad v \rightarrow g^{1/4} v \quad (9.15)$$

La longueur en x des fonctions d'onde, qui varie comme $\sqrt{\hbar/m\omega}$, est multipliée par $g^{-1/4}$, et donc le volume spatial par $g^{-3/4}$

La densité spatiale $n = N/V_e$ est multipliée par $g^{3/4}$

$$\Delta x \rightarrow g^{-1/4} \Delta x \quad V_e \rightarrow g^{-3/4} V_e \quad n \rightarrow g^{3/4} n \quad (9.16)$$

On déduit alors de (9.15) et (9.16)

$$n v \rightarrow g^{3/4} g^{1/4} n v = g n v \quad \Gamma_{cl} \rightarrow g \Gamma_{cl} \quad (9.17a)$$

$$D \propto n v^{-3} \rightarrow g^{3/4} g^{-3/4} n v \quad D \rightarrow D \quad (9.17b)$$

- En conclusion, augmenter adiabatiquement^(k) par un facteur g permet de gagner un facteur g sur le taux de collisions classiques sans changer la densité dans l'espace des phases D

Généralisation à un potentiel $V(\vec{r}) = k r^{3/8}$

- Considérons l'équation aux valeurs propres de H

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi_n + k r^{3/8} \Psi_n = E_n \Psi_n \quad (9.18)$$

et changeons de variables pour lui donner une forme indépendante de toutes les constantes \hbar, m, k

- Posons pour cela

IX-6]

$$x = \lambda \hat{x} \quad y = \lambda \hat{y} \quad z = \lambda \hat{z} \quad (9.19)$$

Comme $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dx} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \hat{x}}$, on obtient

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2}\right) \Psi_n + \frac{2m}{\hbar^2} \lambda^2 \lambda^{3/\delta} k r^{3/\delta} \Psi_n = \frac{2m\lambda^2}{\hbar^2} E_n \Psi_n \quad (9.20)$$

- Choisissons alors λ tel que $\frac{2m}{\hbar^2} \lambda^2 \lambda^{3/\delta} k = 1$, c'est à dire

$$\lambda = \left(\frac{\hbar^2}{2mk}\right)^{\frac{\delta}{2\delta+3}} \quad (9.21)$$

et posons

$$E_n = \frac{2m\lambda^2}{\hbar^2} E_n = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2\delta+3}} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{2\delta}{2\delta+3}} E_n \quad (9.22)$$

L'équation (9.20) prend la forme générale cherchée

$$\left(-\hat{\Delta} + \hat{r}^{3/\delta}\right) \Psi_n = E_n \Psi_n \quad (9.23)$$

- On déduit de (9.19), (9.21) et (9.22) que la longueur des fonctions d'onde varie comme λ , donc comme $(1/k)^{\delta/(2\delta+3)}$, et que l'énergie varie comme $k^{2\delta/(2\delta+3)}$. Si l'on multiplie k par g , on a donc

$$\begin{aligned} \Delta x &\rightarrow \Delta x \left(\frac{1}{g}\right)^{\frac{\delta}{2\delta+3}} & V_e &\rightarrow V_e \left(\frac{1}{g}\right)^{\frac{3\delta}{2\delta+3}} \\ T &\rightarrow g^{\frac{2\delta}{2\delta+3}} & v &\rightarrow g^{\frac{\delta}{2\delta+3}} & n &\rightarrow n g^{\frac{3\delta}{2\delta+3}} \end{aligned} \quad (9.24)$$

On en conclut que

$$\begin{aligned} n v &\rightarrow g^{\frac{3\delta}{2\delta+3}} g^{\frac{\delta}{2\delta+3}} n v = g^{\frac{4\delta}{2\delta+3}} n v \\ D \propto n v^{-3} &\rightarrow g^{\frac{3\delta}{2\delta+3}} g^{-\frac{3\delta}{2\delta+3}} n v^{-3} = n v^{-3} \quad D \rightarrow D \end{aligned} \quad (9.25)$$

- Sans changer D , on gagne donc un facteur $g^{\frac{4\delta}{2\delta+3}}$ sur le taux de collisions élastiques. Pour $\delta = 3/2$, on retrouve le facteur g de (9.17a). Pour $\delta = 3$ (piège linéaire), on obtient un facteur g^2 , encore plus favorable.

Références

les mêmes que celles données pages VII-9 et VIII-9

Les courbes de l'appendice D ont été obtenues par D. Guéry Odélin à partir des équations donnant Γ_{ev}/P_{el} , α , β , A , B .

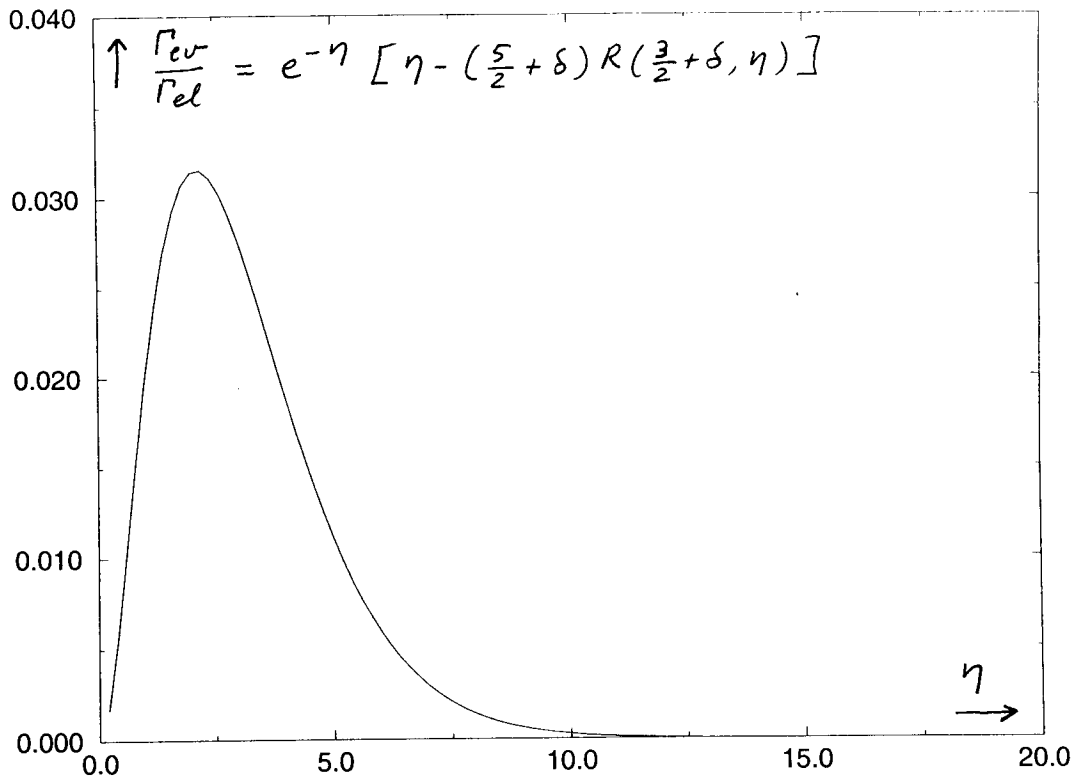


Fig. D1 Variations avec η de Γ_{cv}/Γ_{el} . Le fait que Γ_{cv}/Γ_{el} soit, au maximum, de l'ordre de $3 \cdot 10^{-2}$, montre bien l'existence de 2 échelles de temps dans le problème

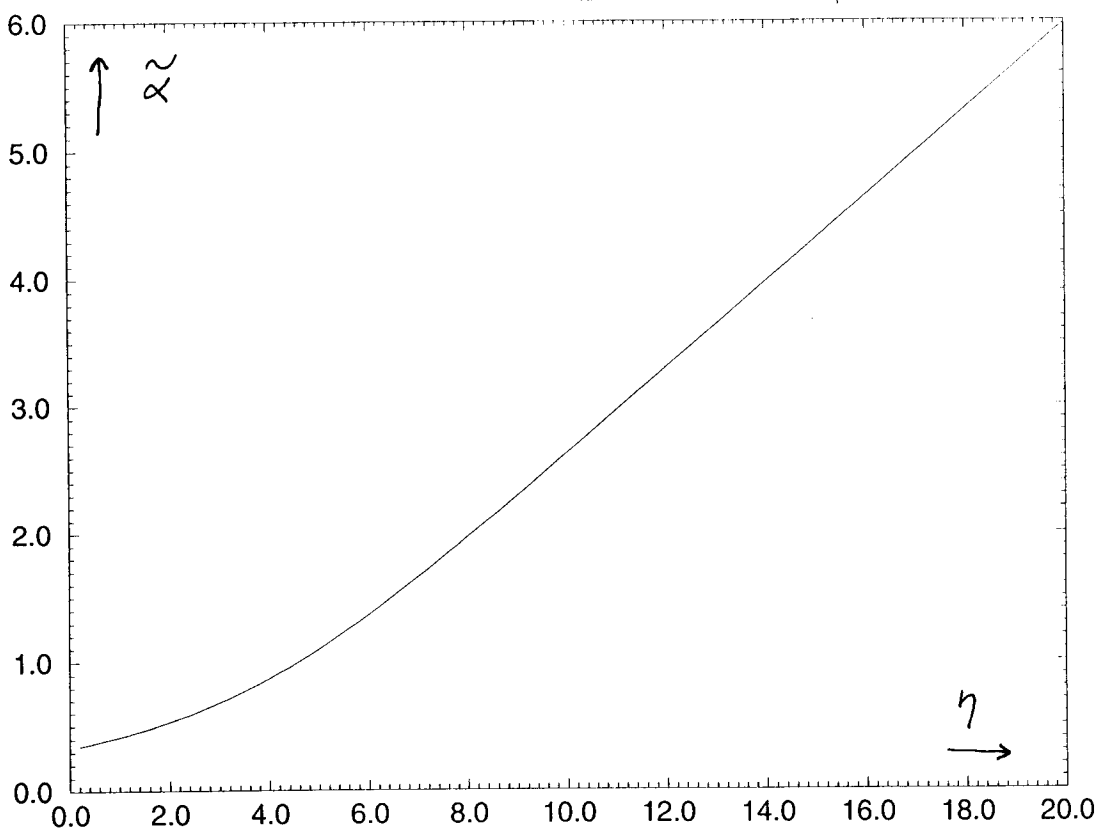


Fig. D2 Variations avec η de $\tilde{\alpha}$ (voir Eq. (8.37))

IX-8

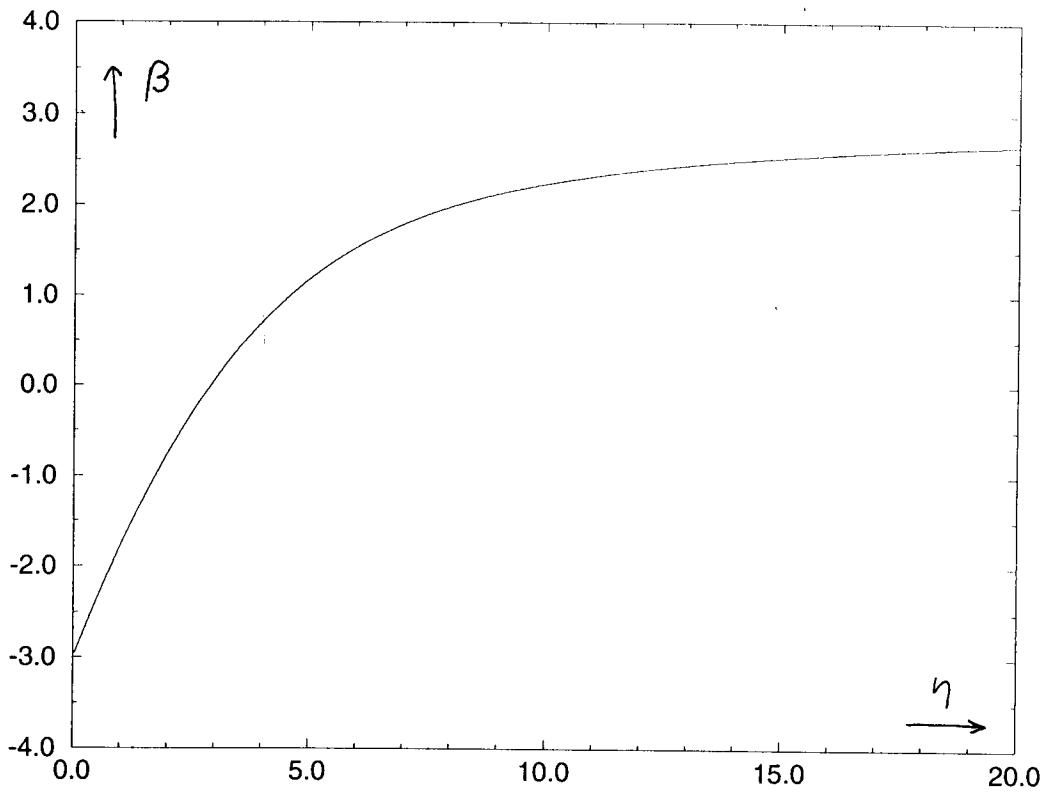


Fig. D3 Variations avec η de β (voir Eq. (8.50))

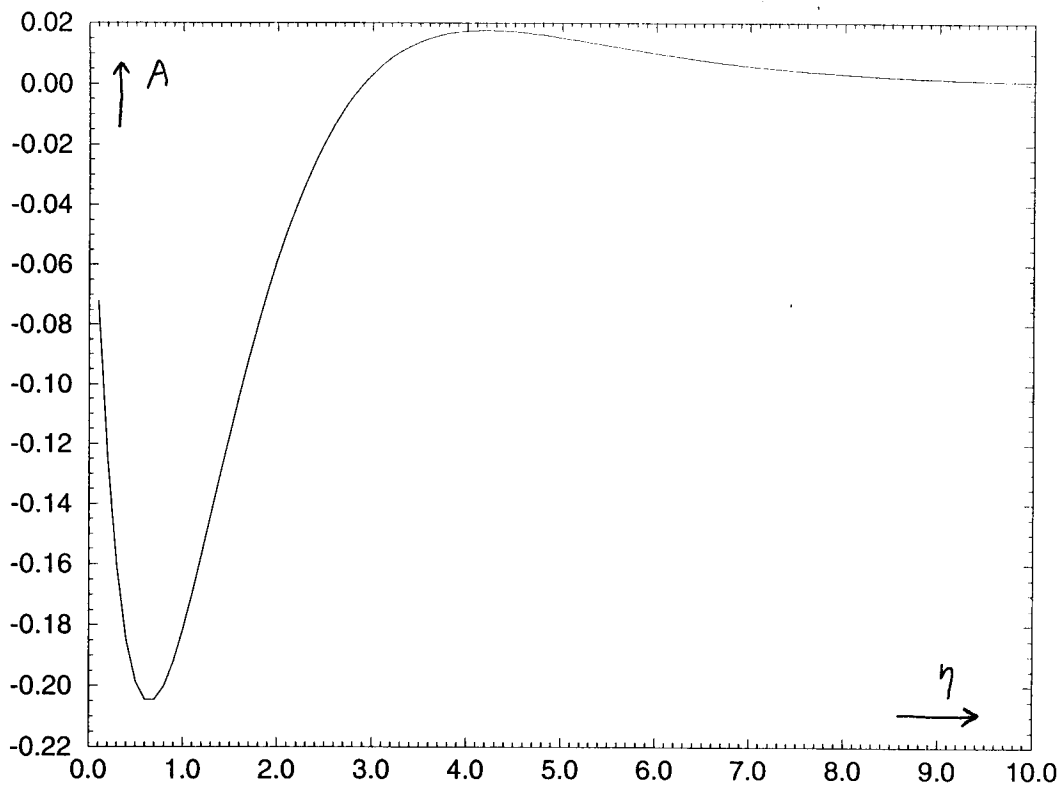


Fig. D4 Variations avec η de A (voir Eq. (8.48) a)

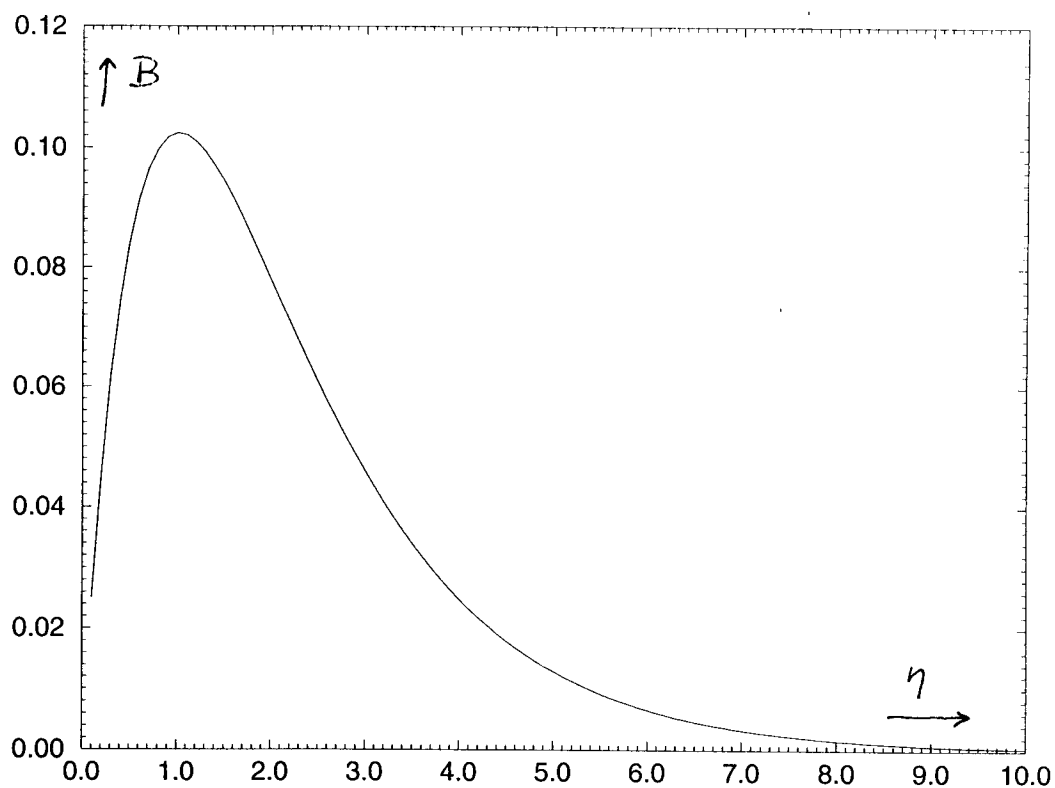


Fig. D5 Variations avec η de B (voir Eq. (8.48 b))

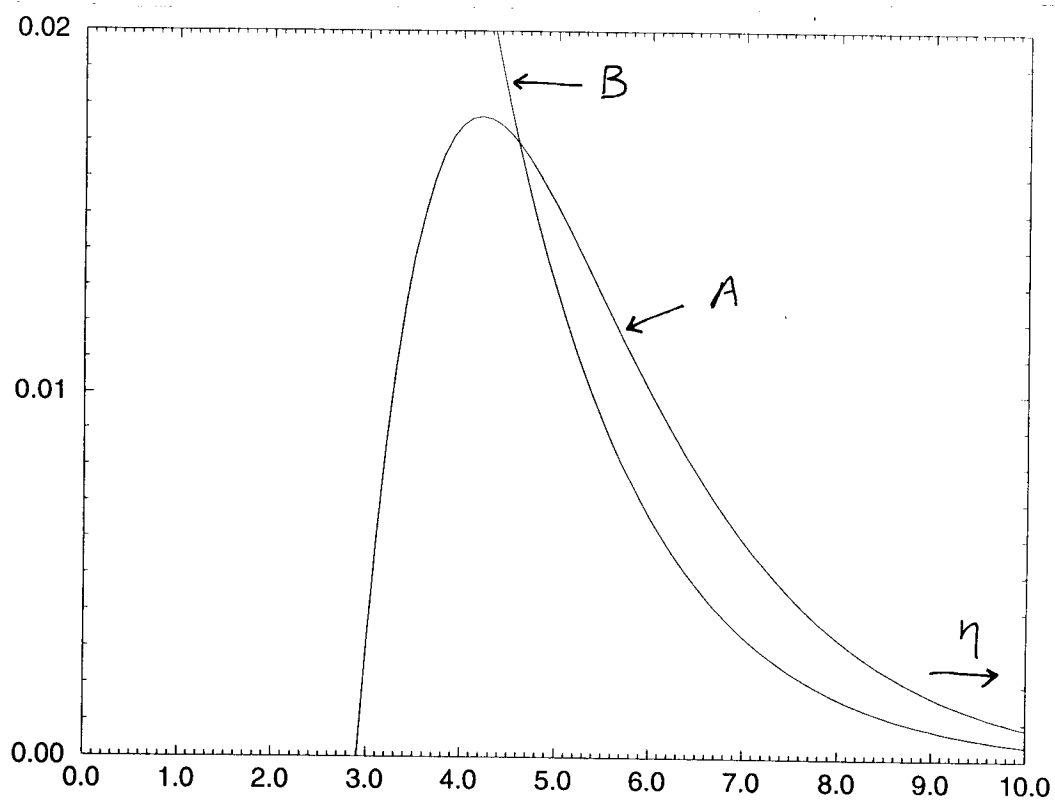


Fig. D6 Variations comparées avec η de A et B (voir Equs. (8.48))
 Noter la décroissance très forte de A et B avec η due au facteur $e^{-\eta}$ des équations (8.48)

IX-10

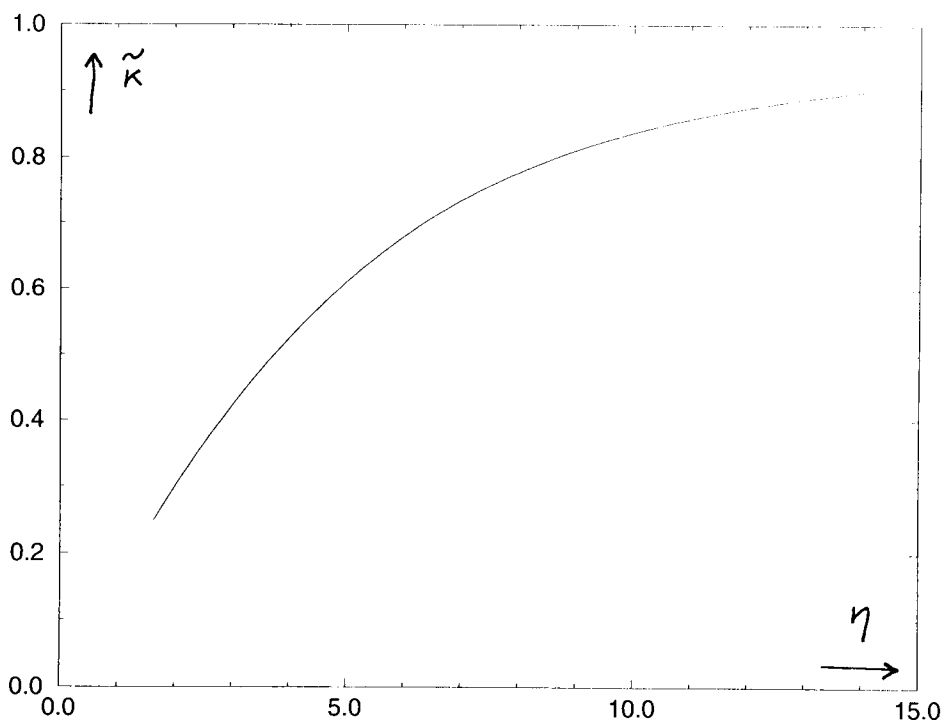


Fig. D7 - Variations avec η de $\tilde{\kappa}$ [voir Eqs. (8.27) et (8.28)]

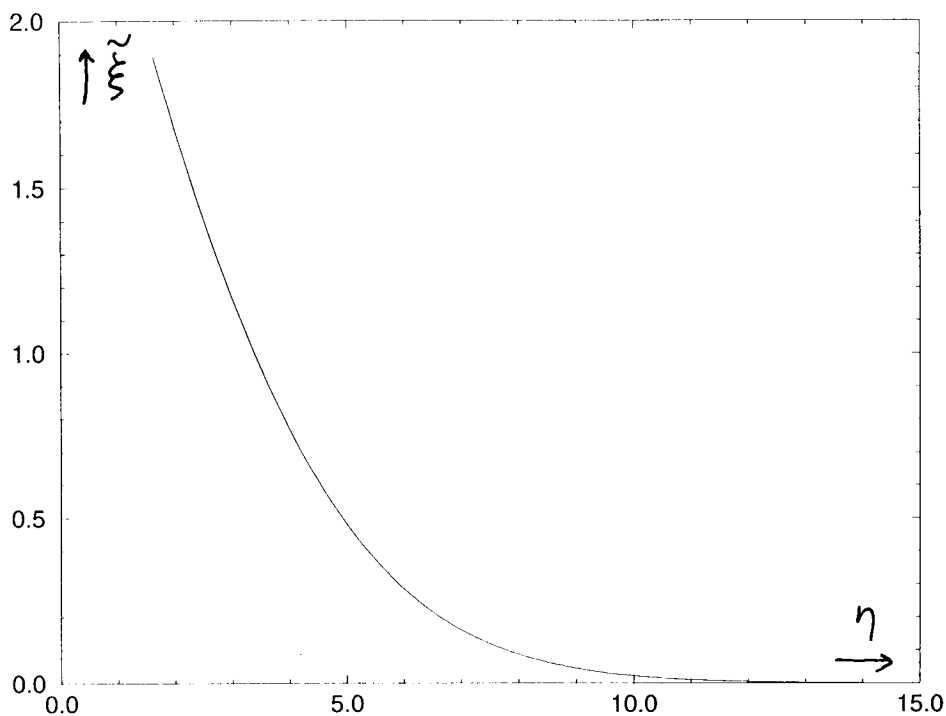
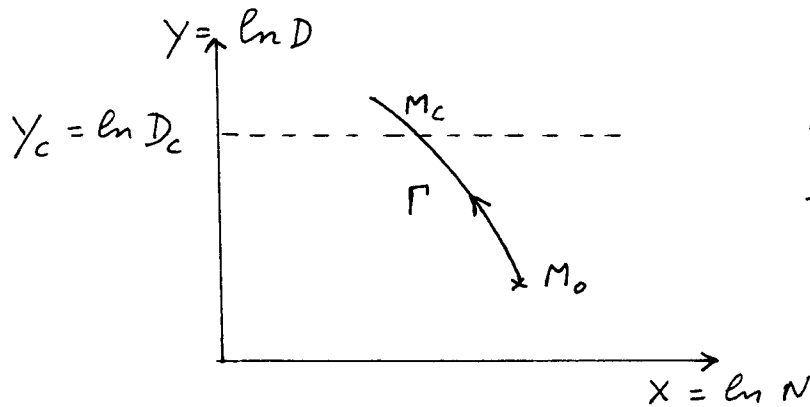


Fig. D8 - Variations avec η de $\tilde{\xi}$ [voir Eq. (8.23)]

① Choix de nouvelles variables : $X = \ln N$ $Y = \ln D$ 

N : Nombre de particules
 D : Densité dans l'espace des phases

Fig. 1

- Problème considéré

Trouver la trajectoire Γ parcourue par le point représentatif du système dans le plan $X = \ln N$, $Y = \ln D$. Quelle est sa forme ? A quelle vitesse est-elle parcourue ? Coupe-t-elle l'horizontale $Y_c = \ln D_c$ associée au seuil de condensation de Bose-Einstein ?

- Intérêt d'une telle représentation

Permet de discuter commodément le problème de l'optimisation. En général, on cherche à atteindre le seuil de condensation en perdant le moins possible d'atomes. La trajectoire optimale Γ est donc celle qui, partant du point initial M_0 ($D_0 = 1$, $N_0 = 1$ avec les unités choisies), coupe l'horizontale $Y_c = \ln D_c$ au point M_c d'abscisse la plus élevée.

② Equations du mouvement de $X = \ln N$, $Y = \ln D$

$$- \begin{cases} D \propto n v^{-3} & (10.1 a) \\ N \propto n v_e \propto n T^\delta \propto n v^{2\delta} & (10.1 b) \end{cases}$$

$$- \begin{cases} \dot{X} = \frac{\dot{N}}{N} = \frac{\dot{n}}{n} + 2\delta \frac{\dot{v}}{v} & (10.2 a) \\ \dot{Y} = \frac{\dot{D}}{D} = \frac{\dot{n}}{n} - 3 \frac{\dot{v}}{v} & (10.2 b) \end{cases}$$

- D'après les équations (8.55)

$$\begin{cases} \frac{\dot{n}}{n} = A n v - r & (10.3 a) \\ \frac{\dot{v}}{v} = -B n v & (10.3 b) \end{cases}$$

- On en déduit

$$\begin{cases} \dot{X} = -(2\delta B - A) n v - r & (10.4 a) \\ \dot{Y} = (A + 3B) n v - r & (10.4 b) \end{cases}$$

Il suffit alors de reporter l'expression (8.64) de $n v$ dans (10.4) pour obtenir explicitement \dot{X} et \dot{Y} en fonction de t . On pourrait

aussi utiliser directement les expressions (9.5) et (9.7) de N et D . Mais nous allons voir que, pour discuter la forme de la trajectoire P de la figure 1, il est plus commode de partir de (10.4)

- On peut éliminer nv entre les 2 équations (10.4). Il suffit d'ajouter ces 2 équations, la première multipliée par $(A+3B)$, la deuxième multipliée par $(2\delta B - A)$. On obtient ainsi

$$\dot{Y} = -\gamma \dot{X} - \frac{2\delta + 3}{2\delta - \beta} v \quad (10.5)$$

où le coefficient γ est défini par

$$\gamma = \frac{A + 3B}{-A + 2\delta B} = \frac{\beta + 3}{2\delta - \beta} \quad (10.6)$$

On a utilisé la définition (8.50) de β : $\beta = A/B$. D'après la même équation, $\beta = 2\delta - \frac{2}{\alpha}$, ce qui donne

$$\gamma = \left(\delta + \frac{3}{2}\right) \tilde{\alpha} - 1 \quad (10.7)$$

Comme $\tilde{\alpha}$ (voir Fig. D2, page IX-7), γ est donc une fonction croissante de η .

③ Etude du cas $r = 0$

- Si l'on fait $r = 0$ dans (10.5), on obtient par intégration

$$Y = -\gamma X \quad (10.8)$$

La trajectoire P est donc une droite de pente $-\gamma$. Pour que l'abscisse de son intersection avec l'horizontale Y_c soit la plus grande possible, on a intérêt à prendre γ , et donc η , le plus grand possible.

- L'équation (10.8) ne renseigne pas sur la vitesse à laquelle la trajectoire P est parcourue. Il faut pour cela revenir aux équations (10.4) et utiliser les résultats du cours VIII sur nv .

- (i) Au seuil d'emballement, quand $A = B$ (ou $\beta = 1$), on a $nv = 1 \forall t$. Le point représentatif parcourt la droite (10.8) avec une vitesse constante.

En faisant $\beta = 1$ dans (10.6), on obtient

$$\beta = 1 \rightarrow \gamma = \frac{4}{2\delta - 1} \quad (10.9)$$

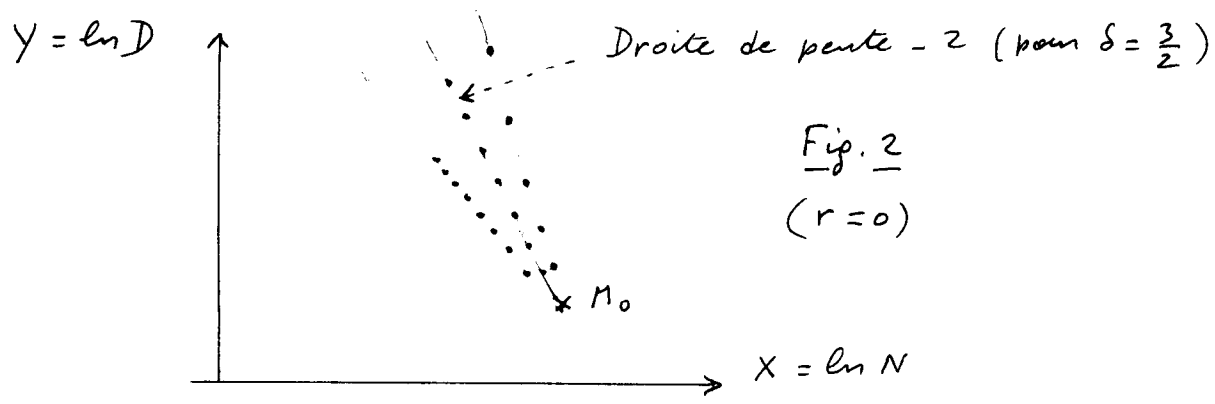
ce qui donne $\gamma = 2$ pour un point harmonique ($\delta = 3/2$)

- (ii) Au dessus du seuil, quand $A > B$ (ou $\beta > 1$), nv croît avec t . Le mouvement du point représentatif sur la droite (10.8), qui a alors une pente supérieure à 2, est accéléré.

- (iii) Au dessous du seuil, quand $A < B$ (ou $\beta < 1$), nv décroît avec t et le mouvement du point est retardé.

- Un moyen commode de représenter la vitesse de déplacement du point est de représenter la position du point à des instants régulièrement espacés. On obtient pour $\beta = 1$ une série de points régulièrement

espacés. Pour $\beta > 1$, l'intervalle entre 2 points successifs croit, alors que pour $\beta < 1$, il décroît (Fig. 2)



4) Allure de la trajectoire Γ pour $r \neq 0$

- Plaçons nous tout d'abord au seuil d'emballement qui, d'après le cours VIII, apparaît pour $A-B = r$, $n v$ restant alors égal à 1 quel que soit t . En remplaçant dans (10.4) $n v$ par 1 et r par $A-B$, on obtient

$$\begin{cases} \dot{X} = (1-2\delta) B \\ \dot{Y} = 4B \end{cases} \quad (10.10)$$

On obtient pour Γ une droite de pente $-\gamma$, où $\gamma = \frac{4}{2\delta-1}$ a la même valeur que pour $r=0$ et $A-B=0$ [voir Eq.(10.9)]. Cette droite, de pente -2 si $\delta = 3/2$, est parcourue à vitesse constante

- Si on est au dessus du seuil d'emballement ($A-B > r$), $n v$ croît avec t et la trajectoire Γ n'est plus une droite. La tangente en un point de cette trajectoire a une pente égale à

$$-\frac{(A+3B)n v - r}{(2\delta B - A)n v + r} \quad (10.11)$$

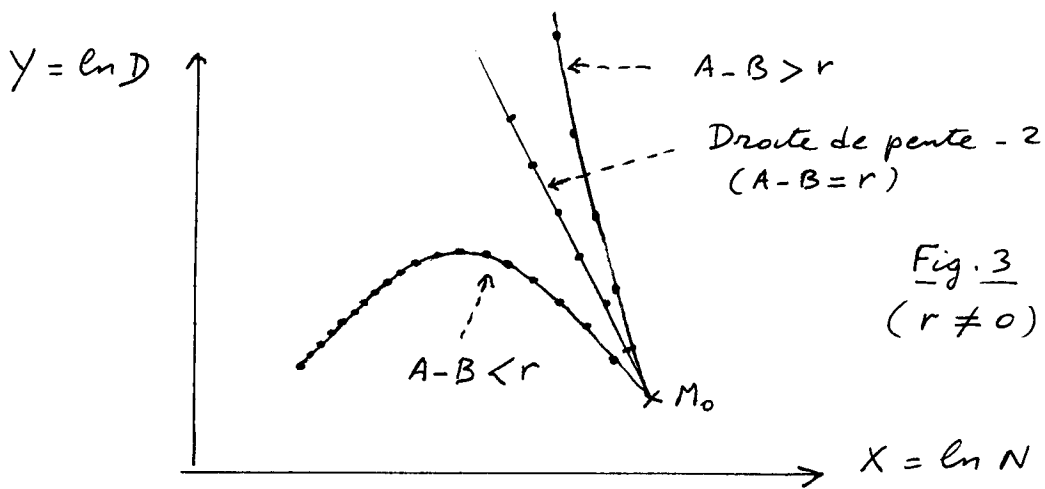
dont le module croît de $\frac{A+3B-r}{2\delta B - A + r}$ à $\frac{A+3B}{2\delta B - A}$ quand

$n v$ croît de 1 à $+\infty$. Le point représentatif parcourt cette trajectoire avec un mouvement accéléré

- Si enfin on est en dessous du seuil d'emballement ($A-B < r$), $n v$ décroît de 1 à 0. On voit sur (10.4b) que \dot{Y} s'annule pour une certaine valeur de $n v$, alors que \dot{X} est toujours négatif. La trajectoire Γ va donc présenter un maximum. Quand $t \rightarrow \infty$, $n v \rightarrow 0$ et \dot{X} et \dot{Y} tendent tous 2 vers $-r$. La trajectoire Γ tend alors vers une droite de pente 1 parcourue à vitesse constante

- Tous ces résultats sont résumés sur la figure 3 où, comme sur la figure 2, on représente le point représentatif du système à des instants régulièrement espacés, pour $A-B = r$, $A-B > r$ et $A-B < r$

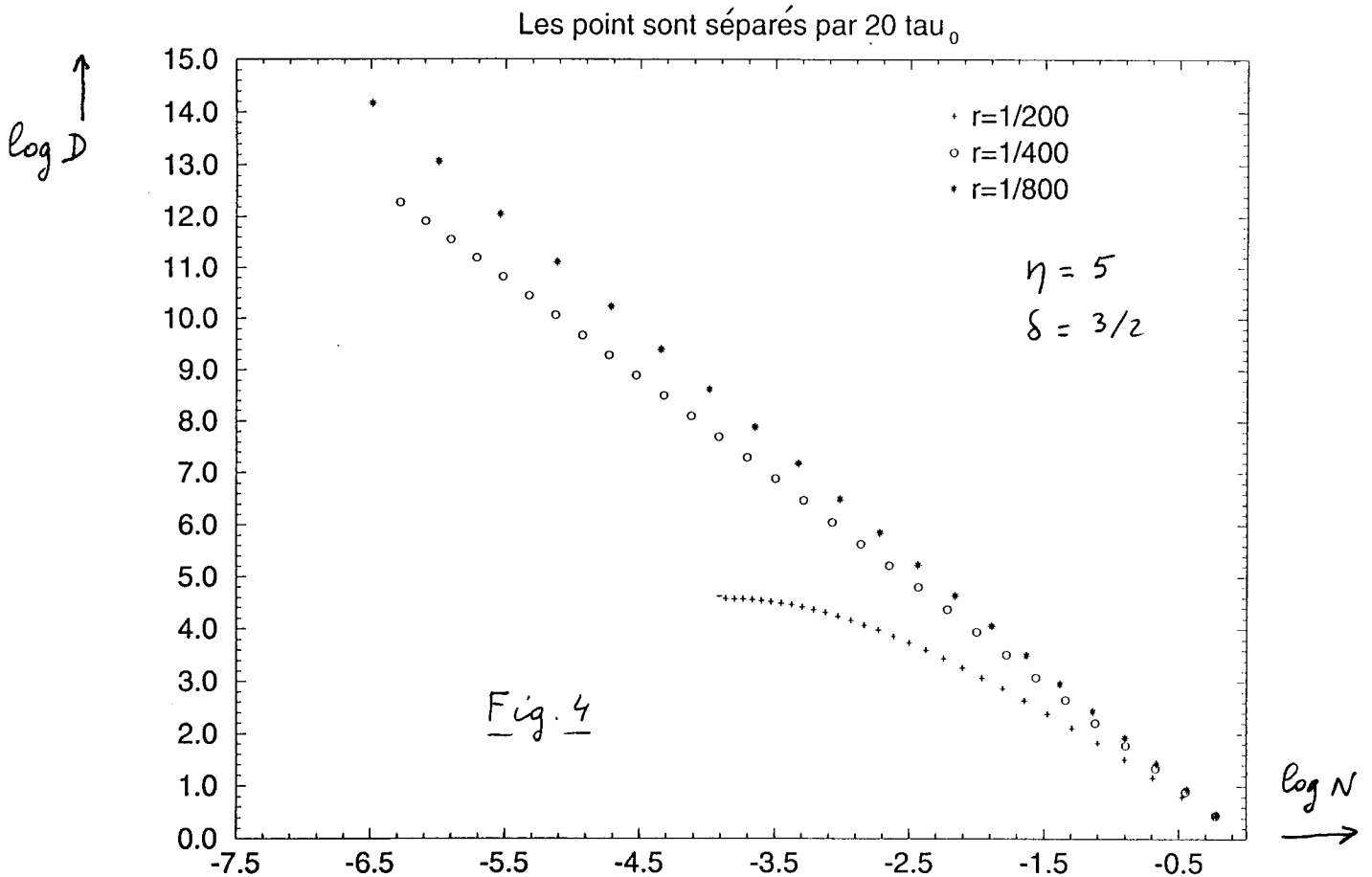
X-4



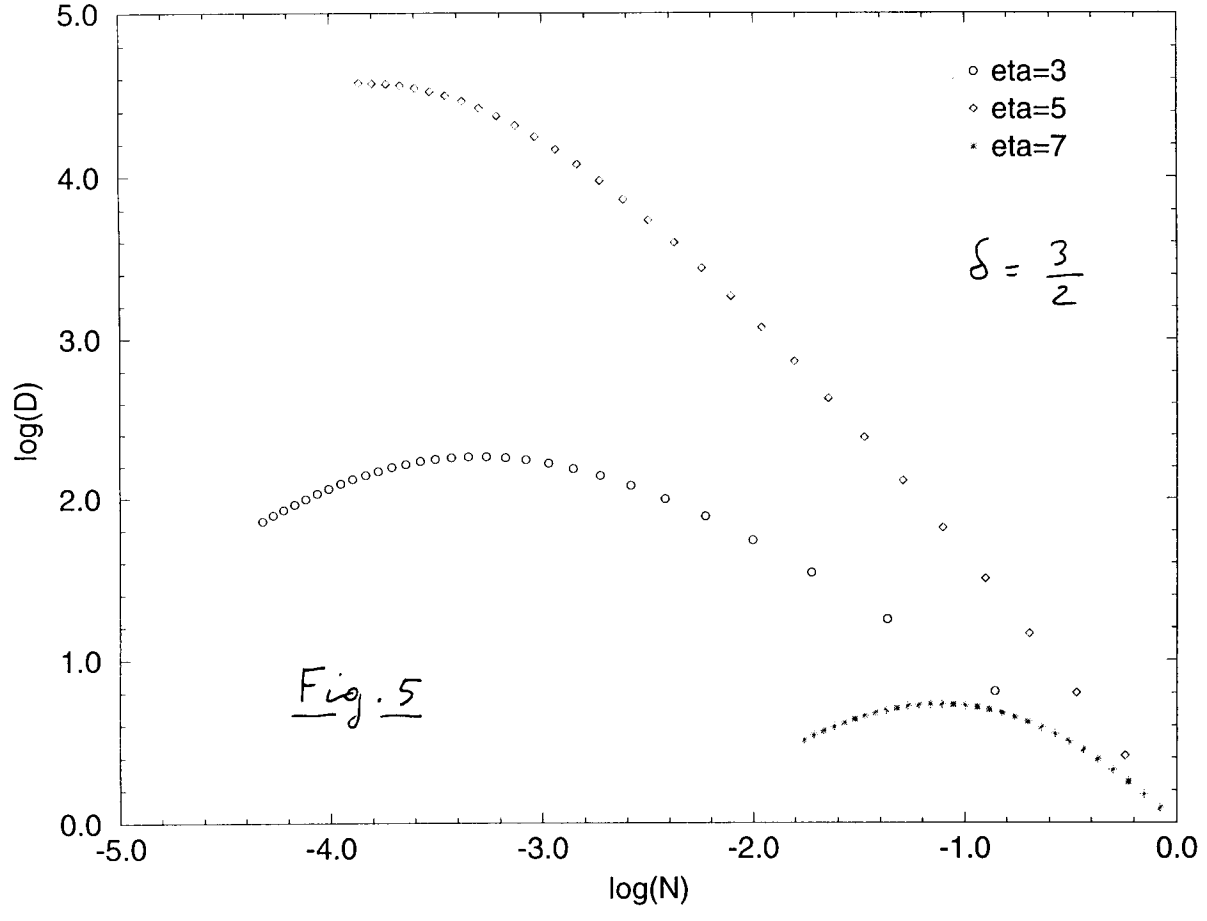
- Tous ces résultats, déduits des équations (10.4) sont confirmés par un calcul direct utilisant les expressions explicites (9.8) et (9.10) de N et D . Les courbes des figures 4 et 5, obtenues par D. Guéry - Odeline, représentent les points de coordonnées $\log N$, $\log D$ (logarithmes de base 10 et non logarithmes népériens), pour des valeurs de t régulièrement espacées de $20\tau_0$ où $\tau_0 = 1/P_{el}(t=0) = 1/n_0 \sigma v_0$.

La figure 4 représente les trajectoires Γ correspondant à $\eta = 5$ et $r = 1/200$, $r = 1/400$, $r = 1/800$. D'après la figure 2, page VIII-8, pour $\eta = 5$, $r = 1/400$ correspond à peu près au seuil d'emballement, $r = 1/200$ étant au dessous de ce seuil et $r = 1/800$ au dessus.

La figure 5 correspond à $r = 1/200$ et à $\eta = 3, 5, 7$. Dans les 3 cas, on est en dessous du seuil. On voit que $\eta = 5$ est plus favorable que $\eta = 3$ et $\eta = 7$.



$r=1/200$; les points sont séparés par $20 \tau_0$



⑤ Discussion physique

5.1 Pente à l'origine de la courbe Γ

- Le module γ_0 de la pente à l'origine des trajectoires Γ est obtenu en faisant $nr=1$ dans les équations (10.4) :

$$\gamma_0 = \left| \frac{A+3B-r}{-(2B-A)-r} \right| \quad (10.12)$$

Prenons un point harmonique : $\delta = 3/2$. Il vient

$$\gamma_0 = \frac{A+3B-r}{3B-A+r} = \frac{4B+A-B-r}{2B-(A-B-r)} = \frac{2+u}{1-u} \quad (10.13)$$

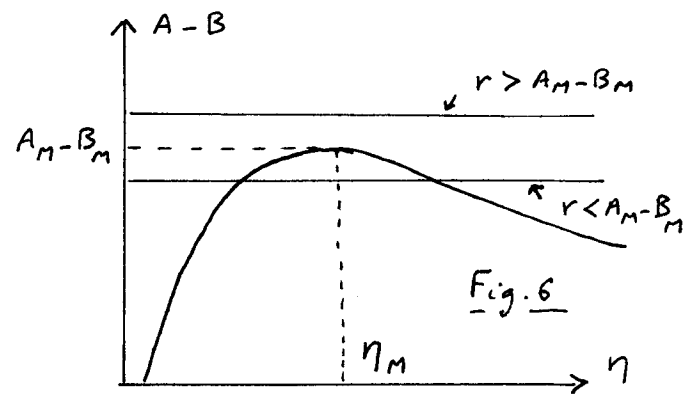
avec
$$u = \frac{A-B-r}{2B} \quad (10.14)$$

- Au dessus du seuil ^{d'emballlement} $2B$, $A-B > r$ et u est positif.

La valeur la plus grande de γ_0 est obtenue en maximisant u

La figure 6, analogue à la figure 2 du cours VIII (p. VIII-9) donne les variations de $A-B$ avec η .

Soit η_m (de l'ordre de 5.8), la valeur de η pour laquelle $A-B$ atteint sa valeur maximale, A_m-B_m (de l'ordre de 0.0033).



Au dessus du seuil, $A-B > r$, et la valeur maximale de $A-B-r$ est réalisée pour $\eta = \eta_m$ et vaut $A_m - B_m - r$. Comme B est une fonction décroissante de η au voisinage de $\eta = \eta_m$ (voir Fig. D5 du cours IX, p. IX-3), le maximum de u donné par (10.14) est réalisé pour une valeur de η légèrement supérieure à η_m .

- Au dessous du seuil d'emballement, $A-B < r$, et u est négatif.

Le maximum de δ_0 est réalisé pour le minimum de $|u|$. Or, $|A-B-r|$ est minimum en $\eta = \eta_m$. Comme le dénominateur, B , de $|u|$ est une fonction décroissante de η au voisinage de η_m , le maximum de $|u|$ est réalisé pour une valeur de η légèrement inférieure à η_m .

- En conclusion, la discussion précédente montre l'importance de la courbe donnant $A-B$ en fonction de η , et l'importance de la valeur η_m de η correspondant au maximum de $A-B$. Pour avoir, au voisinage de l'origine, la courbe la plus raide possible, de manière à couper l'horizontale $\log D_c$ au point d'abscisse la plus élevée possible, on a intérêt à prendre η voisin de η_m , légèrement au dessus pour $A-B > r$, légèrement au dessous pour $A-B < r$.

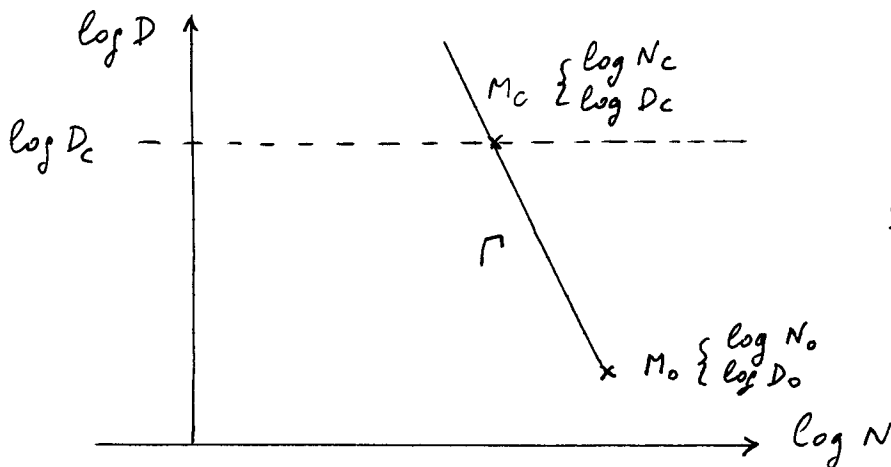


Fig. 7

Au seuil d'emballement, et pour $\delta = 3/2$, Γ se réduit à une droite de pente -2 , qui coupe l'horizontale $\log D_c$ correspondant au seuil de la condensation de Bose-Einstein au point N_o de coordonnées $\log N_c, \log D_c$ (voir Fig. 7). On a donc

$$\log D_c - \log D_o = -2 [\log N_c - \log N_o] \quad (10.15)$$

c'est à dire

$$\frac{N_c}{N_o} = \left(\frac{D_o}{D_c} \right)^{1/2} \quad (10.16)$$

- Au dessous du seuil d'emballement, et même si on atteint le seuil de condensation, on ne pourra jamais avoir, au moment où l'on atteint BEC, un nombre d'atomes supérieur à N_c où N_c est donné par (10.16). Si on part à 6 ordres de grandeur en dessous du seuil de BEC, on perdra au moins 3 ordres de grandeur sur N si l'on atteint ce seuil.

5.2 Vitesse initiale le long de la trajectoire Γ

X-7

- Il ne suffit pas que la pente initiale le long de Γ soit la plus élevée possible pour que la trajectoire Γ coupe l'horizontale $\log D_c$ au point d'abscisse la plus élevée possible. Il faut aussi que la vitesse initiale du point représentatif le long de cette trajectoire soit la plus élevée possible

- L'équation (8.64) donnant $n v$ montre que, au voisinage de $t=0$, on peut écrire

$$n v = \frac{e^{-rt}}{1 - (1 - e^{-rt}) \frac{A-B}{r}} \underset{t \rightarrow 0}{\approx} 1 + t(A-B-r) + \dots \quad (10.17)$$

(i) Au dessus du seuil d'emballlement, $A-B > r$ et $n v$ croît à partir de 1 avec une vitesse initiale, $A-B-r$, d'autant plus élevée que $A-B-r$ est plus grand. C'est donc pour $\eta \approx \eta_m$ que $n v$ croît le plus vite avec t et que, par suite, d'après (10.4), le point représentatif se déplacera le plus vite le long de Γ

(ii) Au dessous du seuil d'emballlement, $A-B < r$, et $n v$ décroît à partir de 1 avec une vitesse d'autant plus faible que $|A-B-r|$ est plus petit. Là encore, c'est au voisinage de $\eta = \eta_m$ que le mouvement du point représentatif le long de Γ se ralentira le moins

- En conclusion, la condition $\eta \approx \eta_m$ est donc favorable, aussi bien pour la pente initiale de Γ que pour la vitesse initiale de déplacement le long de Γ

5.3 Courbe des maxima en dessous du seuil d'emballlement

- En dessous du seuil d'emballlement, les trajectoires Γ présentent un maximum. Nous allons montrer que, pour chaque valeur de r , on peut trouver l'équation de la courbe donnant le lieu de tous ces maxima correspondant aux diverses valeurs de η .

- Le maximum de Γ est atteint quand $dY/dt = 0$, c'est à dire, d'après (10.4b), quand

$$n v = \frac{r}{A + 3B} \quad (10.18)$$

Remplaçons $n v$ par cette valeur dans l'expression (8.64) de $n v$ [voir aussi la 1^{ère} équation (8.17)]. On obtient une équation donnant la valeur de e^{-rt} quand le maximum de Γ est atteint

$$e^{-rt} = \frac{r - (A-B)}{4B} \quad (10.19)$$

Notons que, quand on s'approche du seuil d'emballlement, c-à-d quand $r - (A-B) \rightarrow 0$, $e^{-rt} \rightarrow 0$, ce qui veut dire que $t \rightarrow \infty$. Le point représentatif monte alors de plus en plus haut, et Γ n'a plus de maximum

- Pour obtenir les coordonnées du maximum, utilisons l'autre équation (8.58) reliant n et v : $n v \beta = e^{-rt}$. En remplaçant e^{-rt} par sa valeur (10.18), on obtient

$$n v^\beta = \frac{r - (A - B)}{4B} \quad (10.20)$$

A partir de (10.18) et (10.20), on peut alors obtenir les valeurs de n et v correspondant au maximum de Γ et, par suite, les coordonnées $D = n v^{-3}$ et $N = n v^{2\delta}$ de ce maximum. On trouve :

$$\begin{cases} D = \frac{r}{A + 3B} \left[\frac{r}{r - (A - B)} \frac{4B}{A + 3B} \right]^{-\frac{4}{1 - \beta}} & (10.21 a) \\ N = \frac{r}{A + 3B} \left[\frac{r}{r - (A - B)} \frac{4B}{A + 3B} \right]^{\frac{2\delta - 1}{1 - \beta}} & (10.21 b) \end{cases}$$

- Fixons r . Quand η varie, A, B et β varient et le point de coordonnées $(\log N, \log D)$ décrit une courbe qui est le lieu des maxima des trajectoires Γ correspondant aux diverses valeurs possibles de η . Les courbes de la figure 8, obtenues par D. Guéry-Odelin à partir de équations (10.21), donnent de telles courbes pour 5 valeurs différentes de r . Chaque courbe est parcourue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre quand η décroît. Les points les plus élevés sont obtenus pour les valeurs suivantes de η : $\eta = 3.32$ pour $r = 1/50$; $\eta = 4$ pour $r = 1/100$; $\eta = 4.58$ pour $r = 1/150$; $\eta = 5$ pour $r = 1/200$; $\eta = 5.4$ pour $r = 1/250$. Les valeurs optimales de η sont donc inférieures à $\eta_m \approx 5.8$ et se rapprochent d'autant plus de η_m que r est plus petit.

Courbe des maxima

$r = 1/50, 1/100, 1/150, 1/200, 1/250$

