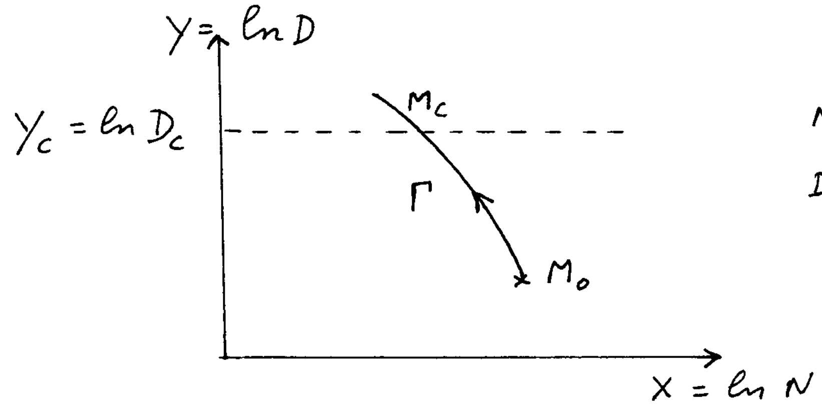
19.12.96

Optimisation du refroidissement évaporatif

① Choix de nouvelles variables : $X = \ln N \quad Y = \ln D$



N : Nombre de particules

D : Densité dans l'espace des phases

Fig. 1

- Problème considéré.

Trouver la trajectoire Γ parcourue par le point représentatif du système dans le plan $X = \ln N$, $Y = \ln D$. Quelle est sa forme ? A quelle vitesse est-elle parcourue ? Coupe-t-elle l'horizontale $Y_c = \ln D_c$ associée au seuil de condensation de Bose-Einstein ?

- Intérêt d'une telle représentation

Permet de discuter commodément le problème de l'optimisation. En général, on cherche à atteindre le seuil de condensation en perdant le moins possible d'atomes. La trajectoire optimale Γ est donc celle qui, partant du point initial M_0 ($D_0 = 1$, $N_0 = 1$ avec les unités choisies), coupe l'horizontale $Y_c = \ln D_c$ au point M_c d'abscisse la plus élevée.

② Equations du mouvement de $X = \ln N$, $Y = \ln D$

-
$$\begin{cases} D \propto n v^{-3} & (10.1\,a) \\ N \propto n V_e \propto n T^{\delta} \propto n v^{2\delta} & (10.1\,b) \end{cases}$$

-
$$\begin{cases} \dot{X} = \dfrac{\dot{N}}{N} = \dfrac{\dot{n}}{n} + 2\delta\,\dfrac{\dot{v}}{v} & (10.2\,a) \\ \dot{Y} = \dfrac{\dot{D}}{D} = \dfrac{\dot{n}}{n} - 3\,\dfrac{\dot{v}}{v} & (10.2\,b) \end{cases}$$

- D'après les équations (8.55)

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{n}}{n} = A n v - r & (10.3a) \\ \dfrac{\dot{v}}{v} = -B n v & (10.3b) \end{cases}$$

- On en déduit

$$\begin{cases} \dot{X} = -(2\delta B - A)\, n v - r & (10.4a) \\ \dot{Y} = (A + 3B)\, n v - r & (10.4b) \end{cases}$$

Il suffit alors de reporter l'expression (8.64) de nv dans (10.4) pour obtenir explicitement $\dot{X}$ et $\dot{Y}$ en fonction de t. On pourrait aussi utiliser directement les expressions (9.5) et (9.7) de N et D. Mais nous allons voir que, pour discuter la forme de la trajectoire Γ de la figure 1, il est plus commode de partir de (10.4)

– On peut éliminer nv entre les 2 équations (10.4). Il suffit d'ajouter ces 2 équations, la première multipliée par $(A+3B)$, la deuxième multipliée par $(2\delta B - A)$. On obtient ainsi

$$\dot{Y} = -\gamma \dot{X} - \frac{2\delta+3}{2\delta-\beta}\, r \qquad (10.5)$$

où le coefficient γ est défini par

$$\gamma = \frac{A+3B}{-A+2\delta B} = \frac{\beta+3}{2\delta-\beta} \qquad (10.6)$$

On a utilisé la définition (8.50) de β : $\beta = A/B$. D'après la même équation, $\beta = 2\delta - \frac{2}{\tilde{\alpha}}$, ce qui donne

$$\gamma = \left(\delta + \frac{3}{2}\right)\tilde{\alpha} - 1 \qquad (10.7)$$

Comme $\tilde{\alpha}$ (voir Fig. D2, page IX-7), γ est donc une fonction croissante de η.

(3) Etude du cas $r = 0$

– Si l'on fait $r = 0$ dans (10.5), on obtient par intégration

$$Y = -\gamma X \qquad (10.8)$$

La trajectoire Γ est donc une droite de pente $-\gamma$. Pour que l'abscisse de son intersection avec l'horizontale Y_c soit la plus grande possible, on a intérêt à prendre γ, et donc η, le plus grand possible.

– L'équation (10.8) ne renseigne pas sur la vitesse à laquelle la trajectoire Γ est parcourue. Il faut pour cela revenir aux équations (10.4) et utiliser les résultats du cours VIII sur nv.

(i) Au seuil d'emballement, quand $A = B$ (ou $\beta = 1$), on a $nv = 1$ $\forall\, t$. Le point représentatif parcourt la droite (10.8) avec une vitesse constante.

En faisant $\beta = 1$ dans (10.6), on obtient

$$\beta = 1 \longrightarrow \gamma = \frac{4}{2\delta - 1} \qquad (10.9)$$

ce qui donne $\gamma = 2$ pour un puits harmonique ($\delta = 3/2$)

(ii) Au dessus du seuil, quand $A > B$ (ou $\beta > 1$), nv croît avec t. Le mouvement du point représentatif sur la droite (10.8), qui a alors une pente supérieure à 2, est accéléré

(iii) Au dessous du seuil, quand $A < B$ (ou $\beta < 1$), nv décroît avec t et le mouvement du point est retardé.

– Un moyen commode de représenter la vitesse de déplacement du point est de représenter la position du point à des instants régulièrement espacés. On obtient pour $\beta = 1$ une série de points régulièrement espacés. Pour $\beta > 1$, l'intervalle entre 2 points successifs croît, alors que pour $\beta < 1$, il décroît (Fig. 2)

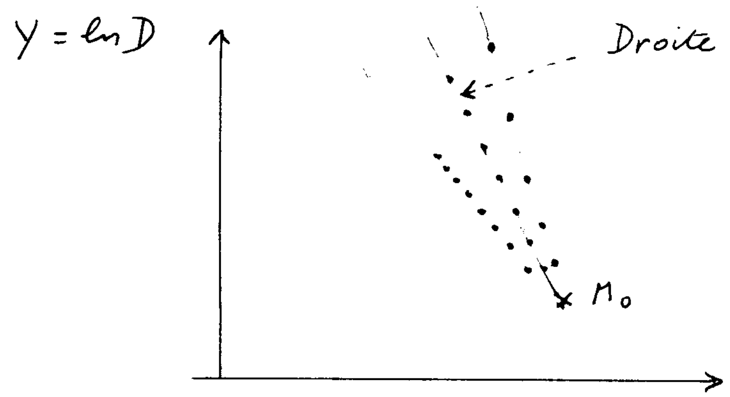


Fig. 2
$(r = 0)$

(4) Allure de la trajectoire Γ pour $r \neq 0$

– Plaçons nous tout d'abord au seuil d'emballement qui, d'après le cours VIII, apparait pour $A - B = r$, nv restant alors égal à 1 quel que soit t. En remplaçant dans (10.4) nv par 1 et r par $A - B$, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{X} &= (1 - 2\delta) B \\ \dot{Y} &= 4B \end{aligned} \right. \qquad (10.10)$$

On obtient pour Γ une droite de pente $-\gamma$, où $\gamma = \frac{4}{2\delta - 1}$ a la même valeur que pour $r = 0$ et $A - B = 0$ [voir Eq. (10.9)]. Cette droite, de pente -2 si $\delta = 3/2$, est parcourue à vitesse constante

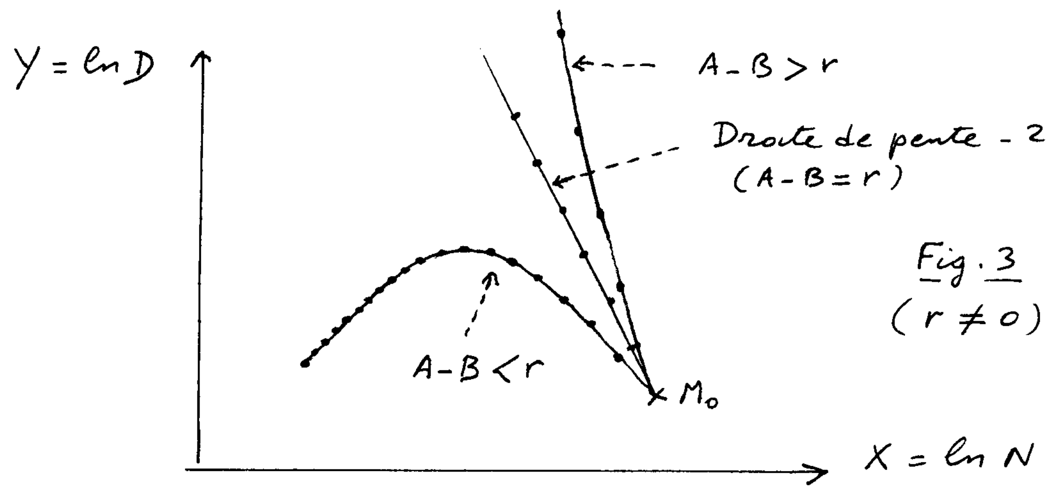
– Si on est au dessus du seuil d'emballement ($A - B > r$), nv croit avec t et la trajectoire Γ n'est plus une droite. La tangente en un point de cette trajectoire a une pente égale à

$$- \frac{(A + 3B)\, nv - r}{(2\delta B - A)\, nv + r} \qquad (10.11)$$

dont le module croit de $\frac{A + 3B - r}{2\delta B - A + r}$ à $\frac{A + 3B}{2\delta B - A}$ quand nv croit de 1 à $+\infty$. Le point représentatif parcourt cette trajectoire avec un mouvement accéléré

– Si enfin on est en dessous du seuil d'emballement ($A - B < r$), nv décroit de 1 à 0. On voit sur (10.4b) que $\dot{Y}$ s'annule pour une certaine valeur de nv, alors que $\dot{X}$ est toujours négatif. La trajectoire Γ va donc présenter un maximum. Quand $t \to \infty$, $nv \to 0$ et $\dot{X}$ et $\dot{Y}$ tendent tous 2 vers $-r$. La trajectoire Γ tend alors vers une droite de pente 1 parcourue à vitesse constante

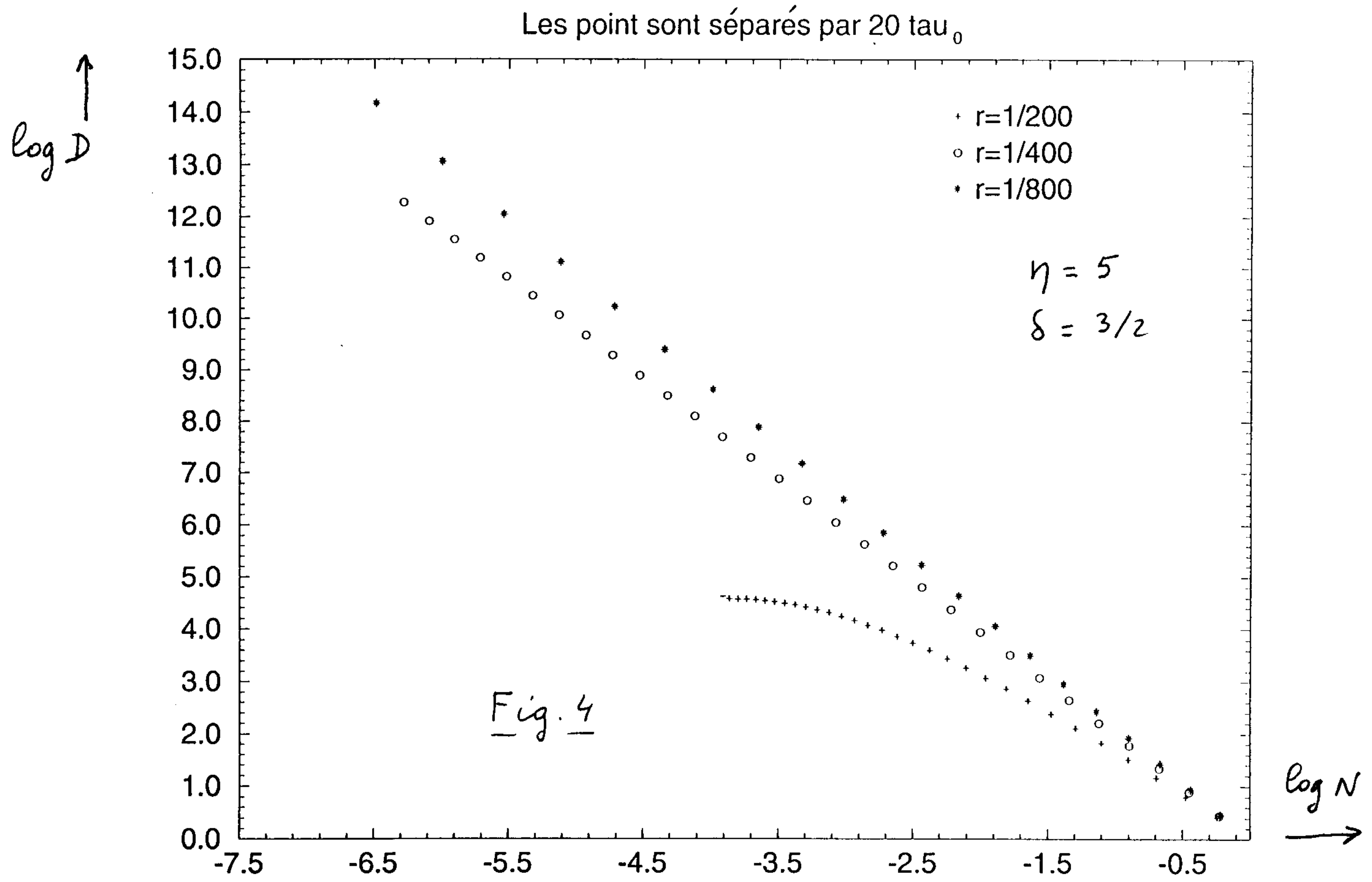
– Tous ces résultats sont résumés sur la figure 3 où, comme sur la figure 2, on represente le point représentatif du système à des instants régulièrement espacés, pour $A - B = r$, $A - B > r$ et $A - B < r$



– Tous ces résultats, déduits des équations (10.4) sont confirmés par un calcul direct utilisant les expressions explicites (9.8) et (9.10) de N et D. Les courbes des figures 4 et 5, obtenues par D. Guéry-Odelin, représentent les points de coordonnées $\log N$, $\log D$ (logarithmes de base 10 et non logarithmes népériens), pour des valeurs de t régulièrement espacées de $20\,\tau_0$ où $\tau_0 = 1/\Gamma_{el}(t=0) = 1/n_0 \sigma v_0$.

La figure 4 représente les trajectoires Γ correspondant à $\eta = 5$ et $r = 1/200$, $r = 1/400$, $r = 1/800$. D'après la figure 2, page VIII-8, pour $\eta = 5$, $r = 1/400$ correspond à peu près au seuil d'emballement, $r = 1/200$ étant au dessous de ce seuil et $r = 1/800$ au dessus.

La figure 5 correspond à $r = 1/200$ et à $\eta = 3, 5, 7$. Dans les 3 cas, on est en dessous du seuil. On voit que $\eta = 5$ est plus favorable que $\eta = 3$ et $\eta = 7$.



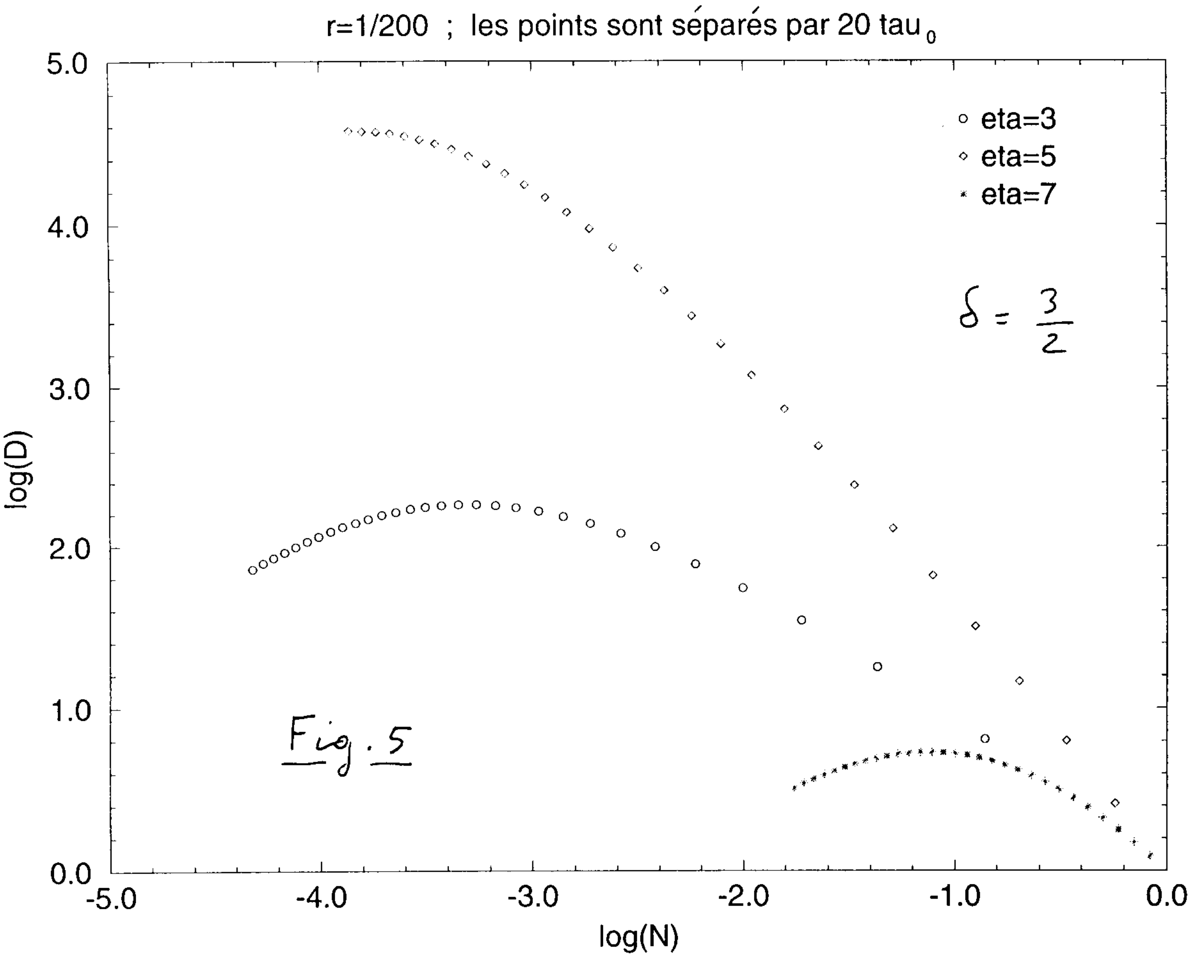


Fig. 5

(5) Discussion physique

5.1 Pente à l'origine de la courbe Γ

- Le module γ_0 de la pente à l'origine des trajectoires Γ est obtenu en faisant $n v = 1$ dans les équations (10.4) :

$$\gamma_0 = \left| \frac{A + 3B - r}{-[(2\delta B - A) - r]} \right| \qquad (10.12)$$

Prenons un puits harmonique : $\delta = 3/2$. Il vient

$$\gamma_0 = \frac{A + 3B - r}{3B - A + r} = \frac{4B + A - B - r}{2B - (A - B - r)} = \frac{2 + u}{1 - u} \qquad (10.13)$$

avec

$$u = \frac{A - B - r}{2B} \qquad (10.14)$$

- Au dessus du seuil d'emballement, $A - B > r$ et u est positif.
La valeur la plus grande de γ_0 est obtenue en maximisant u

La figure 6, analogue à la figure 2 du cours VIII (p. VIII-9) donne les variations de $A - B$ avec η.

Soit η_M (de l'ordre de 5.8), la valeur de η pour laquelle $A - B$ atteint sa valeur maximale, $A_M - B_M$ (de l'ordre de 0.0033).

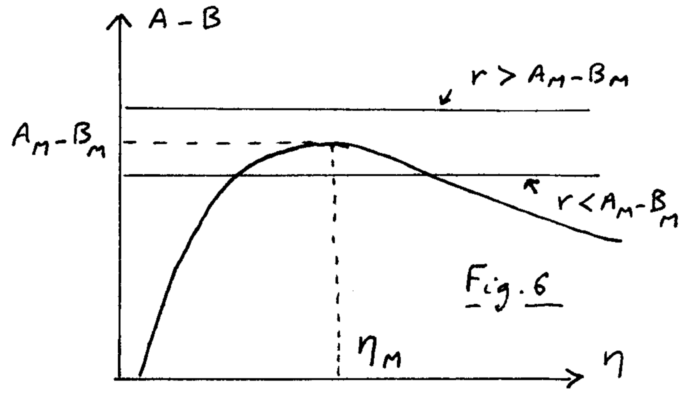


Fig. 6

Au dessus du seuil, $A-B > r$, et la valeur maximale de $A-B-r$ est réalisée pour $\eta = \eta_M$ et vaut $A_M - B_M - r$. Comme B est une fonction décroissante de η au voisinage de $\eta = \eta_M$ (voir Fig. D5 du cours IX, p. IX-9), le maximum de u donné par (10.14) est réalisé pour une valeur de η légèrement supérieure à η_M

- Au dessous du seuil d'emballement, $A-B < r$, et u est négatif.
  Le maximum de γ_0 est réalisé pour le minimum de $|u|$. Or, $|A-B-r|$ est minimum en $\eta = \eta_M$. Comme le dénominateur, B, de $|u|$ est une fonction decroissante de η au voisinage de η_M, le maximum de $|u|$ est realisé pour une valeur de η légèrement inférieure à η_M
- En conclusion, la discussion précédente montre l'importance de la courbe donnant $A-B$ en fonction de η, et l'importance de la valeur η_M de η correspondant au maximum de $A-B$. Pour avoir, au voisinage de l'origine, la courbe la plus raide possible, de manière à couper l'horizontale $\log D_c$ au point d'abscisse la plus élevée possible, on a intérêt à prendre η voisin de η_M, légèrement au dessus pour $A-B > r$, légèrement au dessous pour $A-B < r$.

-

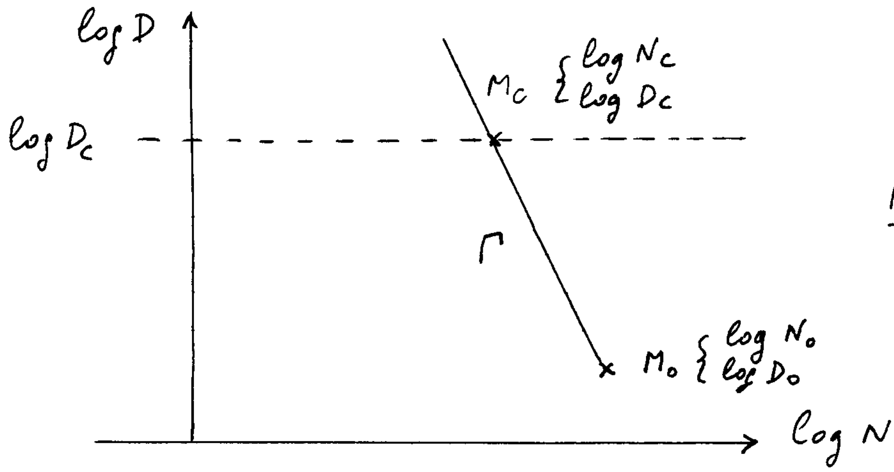


Fig. 7

Au seuil d'emballement, et pour $\delta = 3/2$, Γ se réduit à une droite de pente -2, qui coupe l'horizontale $\log D_c$ correspondant au seuil de la condensation de Bose-Einstein au point N_0 de coordonnées $\log N_c$, $\log D_c$ (voir Fig. 7). On a donc

$$\log D_c - \log D_0 = -2\left[\log N_c - \log N_0\right] \qquad (10.15)$$

c'est à dire

$$\frac{N_c}{N_0} = \left(\frac{D_0}{D_c}\right)^{1/2} \qquad (10.16)$$

- Au dessous du seuil d'emballement, et même si on atteint le seuil de condensation, on ne pourra jamais avoir, au moment où l'on atteint BEC, un nombre d'atomes supérieur à N_c où N_c est donné par (10.16). Si on part à 6 ordres de grandeur en dessous du seuil de BEC, on perdra au moins 3 ordres de grandeur sur N si l'on atteint ce seuil.

5.2 Vitesse initiale le long de la trajectoire Γ

- Il ne suffit pas que la pente initiale le long de Γ soit la plus élevée possible pour que la trajectoire Γ coupe l'horizontale $\log D_c$ au point d'abscisse la plus élevée possible. Il faut aussi que la vitesse initiale du point représentatif le long de cette trajectoire soit la plus élevée possible
- L'équation (8.64) donnant nv montre que, au voisinage de $t=0$, on peut écrire

$$nv = \frac{e^{-rt}}{1-(1-e^{-rt})\frac{A-B}{r}} \underset{t\to 0}{\simeq} 1 + t(A-B-r) + \cdots \qquad (10.17)$$

(i) Au dessus du seuil d'emballement, $A-B>r$ et nv croît à partir de 1 avec une vitesse initiale, $A-B-r$, d'autant plus élevée que $A-B-r$ est plus grand. C'est donc pour $\eta \simeq \eta_M$ que nv croît le plus vite avec t et que, par suite, d'après (10.4), le point représentatif se déplacera le plus vite le long de Γ

(ii) Au dessous du seuil d'emballement, $A-B<r$, et nv décroît à partir de 1 avec une vitesse d'autant plus faible que $|A-B-r|$ est plus petit. Là encore, c'est au voisinage de $\eta=\eta_M$ que le mouvement du point représentatif le long de Γ se ralentira le moins

- En conclusion, la condition $\eta \simeq \eta_M$ est donc favorable, aussi bien pour la pente initiale de Γ que pour la vitesse initiale de déplacement le long de Γ

5.3 Courbe des maxima en dessous du seuil d'emballement

- En dessous du seuil d'emballement, les trajectoires Γ présentent un maximum. Nous allons montrer que, pour chaque valeur de r, on peut trouver l'équation de la courbe donnant le lieu de tous ces maxima correspondant aux diverses valeurs de η.
- Le maximum de Γ est atteint quand $dY/dt=0$, c'est à dire, d'après (10.4b), quand

$$nv = \frac{r}{A+3B} \qquad (10.18)$$

Remplaçons nv par cette valeur dans l'expression (8.64) de nv [voir aussi la 1ère équation (8.17)]. On obtient une équation donnant la valeur de e^{-rt} quand le maximum de Γ est atteint

$$e^{-rt} = \frac{r-(A-B)}{4B} \qquad (10.19)$$

Notons que, quand on s'approche du seuil d'emballement, c-à-d quand $r-(A-B)\to 0$, $e^{-rt}\to 0$, ce qui veut dire que $t\to\infty$. Le point représentatif monte alors de plus en plus haut, et Γ n'a plus de maximum

- Pour obtenir les coordonnées du maximum, utilisons l'autre équation (8.58) reliant n et v : $nvB = e^{-rt}$. En remplaçant e^{-rt} par sa valeur (10.18), on obtient

$$n v^{\beta} = \frac{r-(A-B)}{4B} \qquad (10.20)$$

A partir de (10.18) et (10.20), on peut alors obtenir les valeurs de n et v correspondant au maximum de Γ et, par suite, les coordonnées $D = n v^{-3}$ et $N = n v^{2\delta}$ de ce maximum. On trouve :

$$\left\{ \begin{aligned} D &= \frac{r}{A+3B}\left[\frac{r}{r-(A-B)}\,\frac{4B}{A+3B}\right]^{-\frac{4}{1-\beta}} && (10.21a) \\ N &= \frac{r}{A+3B}\left[\frac{r}{r-(A-B)}\,\frac{4B}{A+3B}\right]^{\frac{2\delta-1}{1-\beta}} && (10.21b) \end{aligned} \right.$$

- Fixons r. Quand η varie, A, B et β varient et le point de coordonnées ($\log N$, $\log D$) décrit une courbe qui est le lieu des maxima des trajectoires Γ correspondant aux diverses valeurs possibles de η. Les courbes de la figure 8, obtenues par D. Guéry-Odelin à partir des équations (10.21), donnent de telles courbes pour 5 valeurs différentes de r. Chaque courbe est parcourue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre quand η décroit. Les points les plus élevés sont obtenus pour les valeurs suivantes de η : $\eta = 3.32$ pour $r = 1/50$; $\eta = 4$ pour $r = 1/100$; $\eta = 4.58$ pour $r = 1/150$; $\eta = 5$ pour $r = 1/200$; $\eta = 5.4$ pour $\eta = 1/250$. Les valeurs optimales de η sont donc inférieures à $\eta_M \simeq 5.8$ et se rapprochent d'autant plus de η_M que r est plus petit.

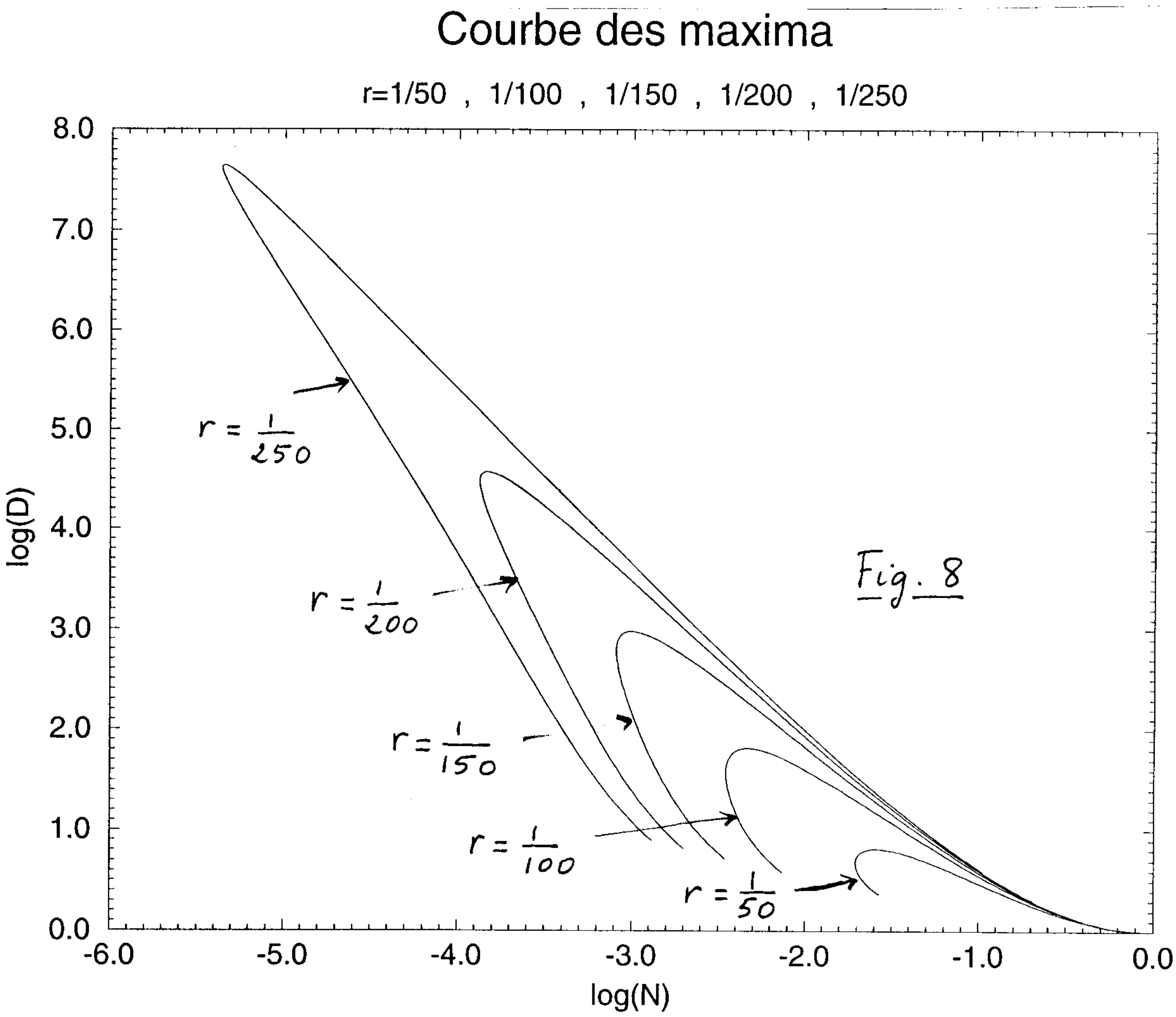


Fig. 8