

① Buts de ce chapitre

- Rappeler un certain nombre de résultats relatifs à un gaz d'atomes piégés en équilibre thermodynamique.
Nous aurons en effet besoin de ces résultats pour introduire le principe du refroidissement évaporatif et pour décrire ses objectifs. Les propriétés d'équilibre du gaz nous serviront également de repère pour évaluer les modifications introduites par la rupture d'équilibre associée à l'évaporation.
- Introduire l'idée du refroidissement évaporatif et évaluer de manière approchée son efficacité.
- Identifier les problèmes qui se posent et qui doivent faire l'objet d'une étude plus approfondie.

② Rappels sur les propriétés d'un gaz d'atomes piégés en équilibre thermodynamique2.1 Système étudié - Approximations

- Système de N bosons identiques, piégés dans un potentiel $U(\vec{r})$, en équilibre thermodynamique à la température T .
- On néglige les interactions entre particules.
- Approximation "continue" pour le spectre du Hamiltonien $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r})$. On remplace les sommes discrètes sur les valeurs propres de H par des intégrales. On suppose que $U(\vec{r})$ est minimum en $\vec{r} = \vec{0}$ et vaut $U(\vec{0}) = 0$.
- Dans le § 2.2, on tient compte d'une dégénérescence quantique éventuelle et on utilise la fonction de distribution de Bose-Einstein. Ensuite, on supposera $T \gg T_c$, où T_c est la température où la condensation de Bose-Einstein apparaît et on utilisera la fonction de distribution de Boltzmann. On étudie en effet, dans la suite, le refroidissement évaporatif d'un gaz bien au dessus du seuil de condensation.

2.2 Etude de quelques grandeurs physiquesFonction de distribution $f(E)$

- $f(E)$ est la probabilité d'occupation d'un niveau d'énergie E donnée par

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1} = \frac{1}{z^{-1} e^{E/k_B T} - 1} \quad (5.1)$$

$$\mu = \text{Potentiel chimique} \quad z = e^{\mu/k_B T} = \text{Fugacité} \quad (5.2)$$

- Développement en puissances de z

$$f(E) = \frac{z e^{-E/k_B T}}{1 - z e^{-E/k_B T}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell} e^{-\ell E/k_B T} \quad (5.3)$$

V-2) Densité d'états $\rho(E)$

- $\rho(E)dE =$ Nombre d'états d'énergie comprise entre E et $E+dE$
- Volume d'une cellule élémentaire associé dans l'espace de phases à un état quantique : $h^3 = (2\pi\hbar)^3$
- Soit $F(E)$ le nombre d'états d'énergie inférieure à E . On l'obtient en divisant par le volume élémentaire $(2\pi\hbar)^3$ le volume de l'espace des phases situé à l'intérieur de la surface $E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r})$

$$F(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iiint d^3r d^3p \chi\left(E - \frac{\vec{p}^2}{2m} - U(\vec{r})\right) \quad (5.4)$$

où $\chi(u)$ est la fonction saut : $\chi(u) = 1$ si $u > 0$, $\chi(u) = 0$ si $u < 0$.

- En utilisant $\rho(E)dE = F(E+dE) - F(E)$ et $d\chi(u)/du = \delta(u)$, on obtient

$$\rho(E) = \frac{dF(E)}{dE} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iiint d^3r d^3p \delta\left(E - \frac{\vec{p}^2}{2m} - U(\vec{r})\right) \quad (5.5)$$

Nombre total N de particules et densité spatiale $n(\vec{r})$

$$N = \int_0^\infty dE \rho(E) f(E) \quad (5.6)$$

- En utilisant (5.3) et (5.5), on obtient

$$\begin{aligned} N &= \int_0^\infty dE \rho(E) \sum_{\ell=1}^{\infty} z^\ell e^{-\ell E/k_B T} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{\ell=1}^{\infty} z^\ell \iiint d^3r d^3p e^{-\ell U(\vec{r})/k_B T} e^{-\ell \vec{p}^2/2mk_B T} \end{aligned} \quad (5.7)$$

- Intégrale sur \vec{p}

$$\int d^3p e^{-\ell \vec{p}^2/2mk_B T} = I_x I_y I_z = I_x^3 \quad (5.8)$$

$$I_x = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x e^{-\ell p_x^2/2mk_B T} = \sqrt{\frac{2mk_B T}{\ell}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{2\pi mk_B T}{\ell}} \quad (5.9)$$

- Après l'intégrale sur \vec{p} , il ne reste plus que l'intégrale sur \vec{r}

$$N = \int d^3r n(\vec{r}) \quad (5.10)$$

où la densité spatiale $n(\vec{r})$ est donnée par

$$\begin{aligned} n(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{\ell=1}^{\infty} z^\ell \left(\frac{2\pi mk_B T}{\ell}\right)^{3/2} e^{-\ell U(\vec{r})/k_B T} \\ &= \frac{1}{\Lambda^3} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell^{3/2}} e^{-\ell U(\vec{r})/k_B T} \end{aligned} \quad (5.11)$$

où Λ , qui a la dimension d'une longueur, est par définition la longueur d'onde de de Broglie thermique

$$\Lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}} \quad (5.12)$$

- Si l'on introduit la fonction $g_x(x)$ définie par

$$g_x(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{x^\ell}{\ell^x} \quad (5.13)$$

on peut récrire $n(\vec{r})$ sous la forme

$$n(\vec{r}) = \frac{1}{\Lambda^3} g_{3/2} [z e^{-U(\vec{r})/k_B T}] \quad (5.14) \quad \boxed{V-3}$$

Paramètre de dégénérescence - Seuil de condensation

- En $\vec{r} = \vec{0}$, on a $U(\vec{0}) = 0$. On déduit alors de (5.14) que

$$n(\vec{0}) \Lambda^3 = g_{3/2}(z) \quad (5.15)$$

Le produit de $n(\vec{0})$, densité spatiale au centre du piège, par Λ^3 est appelé paramètre de dégénérescence pour le gaz piégé. C'est le nombre d'atomes contenus dans un volume Λ^3 au centre du piège.

- Pour $T \gg T_c$, on trouve que la valeur de μ déduite de l'équation (5.6) est négative, de sorte que le dénominateur de (5.1) ne s'annule jamais. Par ailleurs, on a dans ce cas $z \ll 1$ et $g_{3/2}(z)$ se réduit à son terme d'ordre le plus bas, z .

$$T \gg T_c \rightarrow \mu \ll 0 \rightarrow z \ll 1 \rightarrow g_{3/2}(z) \simeq z \quad (5.16)$$

l'équation (5.15) devient alors

$$T \gg T_c \rightarrow n(\vec{0}) \Lambda^3 \simeq z = e^{\mu/k_B T} \quad (5.17)$$

ce qui permet d'exprimer le potentiel chimique μ en fonction du paramètre de dégénérescence

$$T \gg T_c \rightarrow \mu \simeq k_B T \ln [n(\vec{0}) \Lambda^3] \quad (5.18)$$

- Quand, N étant fixé, T décroît, μ croît et atteint la valeur 0. Le dénominateur de (5.1) s'annule alors en $E = 0$ l'approximation continue utilisée en (5.6) n'est plus valable. Il faut utiliser des sommes discrètes et on trouve qu'une population macroscopique commence à se bâtir dans l'état fondamental. C'est la condensation de Bose-Einstein.

Quand $\mu = 0$, $z = 1$ et l'équation (5.15) donne alors

$$n(\vec{0}) \Lambda^3 = g_{3/2}(1) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^{3/2}} = 2.612 \quad (5.19)$$

C'est la valeur du paramètre de dégénérescence au seuil de condensation.

2-3 Cas non dégénéré : $z \ll 1$

Fonction de distribution

- Pour $T \gg T_c$, on a $z \ll 1$ [voir 5.16], et on peut ne garder que le 1^{er} terme de (5.3), ce qui donne, compte tenu de (5.17)

$$f(E) \simeq z e^{-E/k_B T} \simeq n(\vec{0}) \Lambda^3 e^{-E/k_B T} \quad (5.20)$$

On retrouve la fonction de distribution de Boltzmann

- Notons par contre que la densité d'états $\rho(E)$ ne dépend pas de la dégénérescence et reste donné par (5.5).

V-4) Fonction de partition $\zeta(T)$

$$\zeta(T) = \int_0^{\infty} dE \rho(E) e^{-E/k_B T} \quad (5.21)$$

- En utilisant l'expression (5.5) de $\rho(E)$, on peut également écrire

$$\zeta(T) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iint d^3r d^3p e^{-H(\vec{r}, \vec{p})/k_B T} \quad (5.22)$$

où $H(\vec{r}, \vec{p})$ est le Hamiltonien égal à $\frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r})$. On reconnaît en (5.22) l'approximation continue de l'expression habituelle de ζ : $\zeta(T) = \text{Tr}(e^{-H/k_B T})$

Nombre total de particules et volume effectif V_e

$$N = \int_0^{\infty} dE \rho(E) f(E) \simeq z \int_0^{\infty} dE \rho(E) e^{-E/k_B T} = z \zeta(T) \quad (5.23)$$

- Comme $T \gg T_c$, on peut utiliser (5.17) et obtenir

$$N = n(\vec{0}) \Lambda^3 \zeta(T) \quad (5.24)$$

- Par définition le volume effectif V_e est le volume qu'occuperaient les N atomes si leur densité spatiale était constante et égale à $n(\vec{0})$, densité au centre du piège

$$N = n(\vec{0}) V_e \quad (5.25)$$

La comparaison de (5.24) et (5.25) donne alors

$$V_e = \Lambda^3 \zeta(T) \quad (5.26)$$

$\zeta(T)$ apparaît ainsi comme le rapport entre V_e et Λ^3

- Notons enfin que, comme $z \ll 1$, on peut ne garder que le 1^{er} terme du développement de la 2^{em} ligne de (5.11), ce qui donne, compte tenu de (5.17), la formule habituelle

$$n(\vec{r}) = n(\vec{0}) e^{-U(\vec{r})/k_B T} \quad (5.27)$$

Energie interne E

$$E = \int_0^{\infty} E \rho(E) f(E) dE \quad (5.28)$$

- En utilisant (5.20), (5.17) et la relation

$$\frac{d\zeta(T)}{dT} = \frac{1}{k_B T^2} \int_0^{\infty} E \rho(E) e^{-E/k_B T} dE \quad (5.29)$$

déduite de (5.21), on obtient

$$E = n(\vec{0}) \Lambda^3 k_B T^2 \frac{d\zeta(T)}{dT} \quad (5.30)$$

c'est à dire encore, compte tenu de (5.24)

$$E = N k_B T^2 \frac{1}{\zeta(T)} \frac{d\zeta(T)}{dT} = N k_B T \frac{d \ln \zeta(T)}{d \ln T} \quad (5.31)$$

Situation considérée

- On suppose que la dépendance en r de $U(\vec{r})$ est décrite par une loi de puissance

$$U(\vec{r}) = C r^{3/\delta} \quad (5.32)$$

où C est une constante. Le paramètre δ vaut $\delta = 0$ pour un potentiel carré, $\delta = 3/2$ pour un potentiel parabolique, $\delta = 3$ pour un potentiel linéaire.

- Nous considérerons également le cas où $U(\vec{r})$ est de la forme

$$U(x, y, z) = a |x|^{1/\delta_1} + b |y|^{1/\delta_2} + c |z|^{1/\delta_3} \quad (5.33)$$

$$\text{avec} \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \delta$$

a, b, c étant des constantes

Calcul de la densité d'états $\rho(\epsilon)$

- Revenons à l'expression (5.5) de $\rho(\epsilon)$. L'intégrale sur \vec{p} peut être effectuée et conduit à (voir Appendice A) :

$$\rho(\epsilon) = \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_{U(\vec{r}) \leq \epsilon} d^3r \sqrt{\epsilon - U(\vec{r})} \quad (5.34)$$

- Dans le cas où $U(\vec{r})$ est donné par (5.32) ou (5.33), on peut également effectuer l'intégrale sur \vec{r} de (5.34) (voir Appendice A). On trouve alors que la dépendance en ϵ de $\rho(\epsilon)$ est celle d'une loi de puissance en $\epsilon^{\frac{1}{2} + \delta}$, d'exposant $\frac{1}{2} + \delta$

$$\rho(\epsilon) = A_{PL} \epsilon^{\frac{1}{2} + \delta} \quad (5.35)$$

où A_{PL} est une constante dépendant de C (ou a, b, c) et de δ . Par exemple, pour un potentiel harmonique $U(\vec{r}) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$, on trouve

$$\rho(\epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\hbar\omega}\right)^3 \epsilon^2 \quad (5.36)$$

Fonction de partition $\zeta(T)$

En reportant (5.35) dans l'expression (5.21) de $\zeta(T)$, on obtient

$$\begin{aligned} \zeta(T) &= A_{PL} \int_0^\infty \epsilon^{\frac{1}{2} + \delta} e^{-\epsilon/k_B T} d\epsilon \\ &= A_{PL} (k_B T)^{\frac{3}{2} + \delta} \int_0^\infty u^{\frac{1}{2} + \delta} e^{-u} du = A_{PL} \Gamma\left(\frac{3}{2} + \delta\right) (k_B T)^{\frac{3}{2} + \delta} \end{aligned} \quad (5.37)$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du \quad (5.38)$$

Volume effectif V_e

- Il se déduit de (5.26) et (5.37)

$$V_e = (\Lambda(T))^3 \zeta(T) = A_{PL} \Gamma\left(\frac{3}{2} + \delta\right) (\Lambda(T))^3 (k_B T)^{\frac{3}{2} + \delta} \quad (5.39)$$

V-6

- D'après 5.12, la dépendance en T de $\Lambda(T)$ est en $T^{-1/2}$, de sorte que celle de V_e est en T^δ

$$V_e \propto T^\delta \quad (5.40)$$

On peut aussi établir ce résultat en calculant la valeur moyenne de x^2 qui s'écrit, compte tenu de (5.27)

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int x^2 n(\vec{r}) d^3r}{\int n(\vec{r}) d^3r} = \frac{\int x^2 e^{-U(\vec{r})/k_B T} d^3r}{\int e^{-U(\vec{r})/k_B T} d^3r} \quad (5.41)$$

et en utilisant (5.32) ou (5.33) et $V_e \propto \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle \langle z^2 \rangle}$

- Pour un potentiel carré ($\delta=0$), les atomes occupent tout le volume offert quel que soit T , ce qui explique pourquoi V_e donné en (5.40) ne dépend pas alors de T . Pour un potentiel parabolique, V_e croît en $T^{3/2}$, pour un potentiel linéaire en T^3 . Plus généralement

$$\frac{V_{e1}}{V_{e2}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^\delta \quad (5.42)$$

Quand on diminue T (T_1/T_2), V_e se contracte ($V_{e1} < V_{e2}$). Mais la contraction est d'autant plus forte que δ est plus grand.

Energie interne E

- D'après (5.37), $\ln \xi(T) = \text{Constante} + \left(\frac{3}{2} + \delta\right) \ln T$, de sorte que l'équation (5.31) donne

$$E = N k_B T \frac{d \ln \xi(T)}{d \ln T} = N \left(\frac{3}{2} + \delta\right) k_B T \quad (5.43)$$

- Les 2 termes de (5.43) ont une interprétation physique simple. Chaque atome piégé a une énergie cinétique moyenne égale à $\frac{3}{2} k_B T$ et une énergie potentielle moyenne égale à $\delta k_B T$

Volume dans l'espace des impulsions \mathcal{V}_p

Nous venons de retrouver le résultat bien connu $\langle \frac{p_x^2}{2m} \rangle = \frac{1}{2} k_B T$ (et idem pour $\langle p_y^2 \rangle$ et $\langle p_z^2 \rangle$). On en déduit que le volume occupé par les atomes dans l'espace des \vec{p} est de l'ordre de

$$\mathcal{V}_p \approx \sqrt{\langle p_x^2 \rangle \langle p_y^2 \rangle \langle p_z^2 \rangle} = m^{3/2} (k_B T)^{3/2} \quad (5.44)$$

Récapitulation : Dépendance en N et T de diverses grandeurs physiques

Dans le problème étudié ici, il y a 2 variables indépendantes, le nombre total N de particules et la température T

Dans le cas d'un piège décrit par une loi de puissance, chaque grandeur physique a une dépendance en N et T décrite par une loi de puissance. Le tableau I donne ces lois pour un certain nombre de grandeurs physiques.

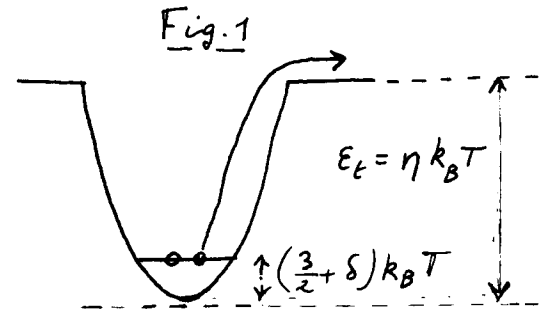
Volume spatial V_e	$V_e \propto T^\delta$
Volume V_p dans l'espace des \vec{p}	$V_p \propto T^{3/2}$
Densité spatiale n	$n \propto \frac{N}{V_e} \propto N T^{-\delta}$
Densité D dans l'espace des phases	$D \propto \frac{N}{V_e V_p} \propto N T^{-(\frac{3}{2} + \delta)}$
Vitesse moyenne v	$v \propto \sqrt{\frac{kT}{m}} \propto T^{1/2}$
Taux de collisions élastiques $n \sigma_e v$ (la section efficace σ_e ne dépend plus de T quand $T \rightarrow 0$)	$n \sigma v \propto N T^{(\frac{1}{2} - \delta)}$

Tableau I

③ Principe du refroidissement évaporatif

3.1 Description qualitative

- Le potentiel piégeant est courbé à partir d'une certaine hauteur seuil E_t (Fig. 1). En unités de $k_B T$ E_t vaut η



$$\frac{E_t}{k_B T} = \eta \quad (5.45)$$

- Les N particules sont initialement dans le piège, avec chacune une énergie moyenne $(\frac{3}{2} + \delta) k_B T$ bien plus faible que $\eta k_B T$
- Par suite des collisions ^{élastiques} entre particules piégées, il peut arriver que l'une d'entre elles acquière, au détriment des autres, une énergie suffisante pour lui permettre d'arriver au dessus du seuil et de s'échapper hors du piège. Les particules restant dans le piège ont dû lui céder cette énergie, au moins égale à $[\eta - (\frac{3}{2} + \delta)] k_B T$. Après rethermalisation, leur énergie moyenne, et donc leur température ont nécessairement diminué.

Un tel mécanisme permet donc d'abaisser la température du gaz au prix d'une perte d'atomes.

3.2 Evaluation de l'efficacité : lien entre la diminution relative de température et la diminution relative de N

- Considérons dN particules qui s'échappent du piège ($dN \ll N$). Nous verrons plus tard que la probabilité, pour les particules qui s'échappent, d'arriver très au dessus du seuil E_t est négligeable. Elles ont en fait une énergie très voisine de $\eta k_B T$ que nous écrivons $(\eta + \kappa) k_B T$ avec $\kappa \ll \eta$.

Pour s'échapper hors du piège, ces dN atomes ont dû donc recevoir, de la part de celles qui restent, une énergie dE égale à

$$dE = dN [(\eta + \kappa) - (\frac{3}{2} + \delta)] k_B T \quad (5.46)$$

- les $N - dN$ particules restantes, qui avaient initialement une énergie égale à $(N - dN) \left(\frac{3}{2} + \delta\right) N k T$, ont cédé cette énergie dE aux particules qui se sont échappées. Après rethermalisation, leur température a baissé de T à $T - dT$ et la conservation de l'énergie implique que

$$(N - dN) \left(\frac{3}{2} + \delta\right) k T - dE = (N - dN) \left(\frac{3}{2} + \delta\right) k (T - dT) \quad (5.47)$$

En remplaçant dans (5.47) dE par sa valeur (5.46), et en négligeant les termes du 2^{ème} ordre en dN et dT , on obtient

$$\frac{dT}{T} = \alpha \frac{dN}{N} \quad (5.48)$$

avec

$$\alpha = \frac{\eta + \kappa}{\frac{3}{2} + \delta} - 1 \quad (5.49)$$

- On voit ainsi que, au cours du refroidissement, T et N sont reliés par une loi de puissance. L'intégration de (5.49) donne

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^\alpha \quad (5.50)$$

Comme η peut être très grand devant 1, on voit sur (5.49) qu'il en va de même de α . L'équation (5.50) montre alors que si N diminue par un facteur 10 ($N_1/N_2 = 1/10$), T diminue par un facteur beaucoup plus grand : $T_1/T_2 = (1/10)^\alpha \ll 1/10$ si $\alpha \gg 1$. L'évaporation peut donc être un processus très efficace de refroidissement.

3.3 Dépendance en N des diverses grandeurs physiques au cours de l'évaporation.

- Au cours de l'évaporation, T et N ne sont plus des variables indépendantes puisqu'elles sont liées par l'équation (5.50).

En remplaçant T par N^α dans les expressions du tableau I, on obtient un nouveau tableau, le tableau II, donnant les lois de puissances en N qui caractérisent l'évolution des diverses grandeurs physiques au cours de l'évaporation

Température T	$T \propto N^\alpha$	<u>Tableau II</u>
Volume spatial V_e	$V_e \propto N^{\alpha \delta}$	
Densité spatiale n	$n \propto N^{1 - \alpha \delta}$	
Densité D dans l'espace des phases	$D \propto N^{1 - (\delta + \frac{3}{2})\alpha}$	
Vitesse moyenne v	$v \propto N^{\alpha/2}$	
Temps de collisions classiques $n \sigma_{cl} v$	$n \sigma_{cl} v \propto N^{1 - \alpha(\delta - \frac{1}{2})}$	

- L'examen du tableau II permet de répondre à des questions importantes. Par exemple, si l'on veut que la densité dans l'espace des phases D augmente lors de l'évaporation, il faut que l'exposant de N dans l'expression de D du tableau II soit négatif

$$1 - \left(\delta + \frac{3}{2}\right)\alpha < 0 \quad (5.51)$$

Bien que N diminue, V_e et v_p diminuent encore plus, de sorte que $D \propto \frac{N}{V_e v_p}$ augmente.

- De même, pour que le taux de collisions élastiques ne diminue pas, mais au contraire augmente au cours de l'évaporation, il faut que l'exposant de N dans l'expression du taux de collisions élastiques $n\sigma_{el}v$ soit négatif ou nul

$$1 - \alpha \left(\delta - \frac{1}{2} \right) \leq 0 \tag{5.52}$$

La diminution de v (qui varie en \sqrt{T}) quand T décroît est plus que compensée par une augmentation de la densité spatiale n . Un tel régime est appelé "run-away evaporation"

4

Les problèmes qui se posent

- La discussion précédente permet de comprendre le sens de variations des diverses grandeurs physiques au cours de l'évaporation. En particulier, si l'on prend η très grand, il en est de même de α d'après (5.49) et les conditions (5.51) et (5.52) sont aisément remplies.

- Un aspect important manque cependant dans la discussion, celui concernant la vitesse des processus d'évaporation. Si η est trop grand, la probabilité d'échappement est très faible et l'évaporation sera trop lente. D'autres processus, comme les collisions inélastiques ou les transitions de Majorana, auront fait perdre les atomes avant qu'ils n'aient pu être refroidis par évaporation.

- Il faut donc étudier la cinétique des processus d'évaporation et déterminer la valeur optimale de η (meilleur compromis entre efficacité et vitesse). Par ailleurs, quand T diminue, η augmente si l'on ne change pas le seuil E_f [voir (5.45)], et l'évaporation se ralentit. Une solution possible consiste à "forcer" l'évaporation en diminuant E_f au fur et à mesure que T diminue.

- Enfin, il est clair que l'évaporation fait sortir le système de son état d'équilibre et qu'il n'est plus correct en toute rigueur, notamment si η n'est pas très grand, d'utiliser les résultats du tableau I pour obtenir ceux du tableau II. Il faut donc décrire de manière plus précise l'état du système en train d'évoluer et voir si l'on peut pour cela introduire de nouvelles variables effectives, comme par exemple une température effective

- L'étude de ces divers problèmes fera l'objet des chapitres ultérieurs.

Références récentes

- 1 - J. Walraven in "Quantum dynamics of simple systems", Proceedings of the 44th Scottish Universities Summer School in Physics, Stirling (1996)
- 2 - W. Ketterle and N. J. van Druten, in "Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics", Vol 36 (1996) ed. by B. Bederson and H. Walker

Voici aussi des références plus anciennes comme

- 3 - H.F. Hess, Phys. Rev. B 34, 3476 (1986)
- 4 - J.M. Doyle, PhD thesis, M.I.T. (1991)

V-10 / Appendice A

Démonstration de (5.34)

- On part de

$$\delta \left[\frac{p^2}{2m} - E + U(\vec{r}) \right] = \delta \left[\frac{1}{2m} (p - \sqrt{2m(E - U(\vec{r}))}) (p + \sqrt{2m(E - U(\vec{r}))}) \right] \quad (A.1)$$

et on utilise $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$, ce qui donne

$$\delta \left[\frac{p^2}{2m} - E + U(\vec{r}) \right] = \frac{2m}{2\sqrt{2m(E - U(\vec{r}))}} \delta(p - \sqrt{2m(E - U(\vec{r}))}) \quad (A.2)$$

- l'équation (5.5) peut être réécrite sous la forme

$$\rho(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r \int_0^\infty 4\pi p^2 dp \frac{2m}{2\sqrt{2m(E - U(\vec{r}))}} \delta(p - \sqrt{2m(E - U(\vec{r}))}) \quad (A.3)$$

l'intégrale sur p de (A.3) est élémentaire et conduit à (5.34)

Démonstration de (5.35)

- Compte tenu de (5.32), on a

$$\int_{U(\vec{r}) \leq E} d^3r \sqrt{E - U(\vec{r})} = \int_{U \leq E} d^3r \sqrt{E - Cr^{3/\delta}} = \int_{U \leq E} d^3r \sqrt{E} \sqrt{1 - \frac{Cr^{3/\delta}}{E}} \quad (A.4)$$

- Le changement de variables

$$\frac{Cr^{3/\delta}}{E} = u^{3/\delta} \quad (A.5)$$

conduit alors à :

$$\int_{U(\vec{r}) \leq E} d^3r \sqrt{E - U(\vec{r})} = \frac{1}{C^\delta} E^{\frac{1}{2} + \delta} \int_0^1 d^3u \sqrt{1 - u^{3/\delta}} \quad (A.6)$$

ce qui montre bien que la dépendance de $\rho(E)$ en E est bien en $E^{\frac{1}{2} + \delta}$ comme l'indiquent (5.35)

- Cas particuliers $\delta = \frac{3}{2}$, $C = \frac{1}{2} m \omega^2$

$$\int_0^1 d^3u \sqrt{1 - u^2} = 4\pi \int_0^1 u^2 \sqrt{1 - u^2} du = \frac{\pi^2}{4} \quad (A.7)$$

En reportant (A.7) dans (A.6), puis dans (5.34), on obtient (5.36)

- Si $U(\vec{r})$ est donné par (5.33), il faut calculer

$$\int_{U \leq E} d^3r \sqrt{E - U(x, y, z)} = \iiint_{U \leq E} dx dy dz \sqrt{E - a|x|^{1/\delta_1} - b|y|^{1/\delta_2} - c|z|^{1/\delta_3}} \quad (A.8)$$

Le changement de variables

$$\xi^{1/\delta_1} = \frac{x^{1/\delta_1}}{E} \quad \eta^{1/\delta_2} = \frac{y^{1/\delta_2}}{E} \quad \zeta^{1/\delta_3} = \frac{z^{1/\delta_3}}{E} \quad (A.9)$$

conduit alors à

$$\int_{U \leq E} d^3r \sqrt{E - U(x, y, z)} = E^{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3} E^{1/2} \iiint_{U \leq E} d\xi d\eta d\zeta \sqrt{1 - a|\xi|^{1/\delta_1} - b|\eta|^{1/\delta_2} - c|\zeta|^{1/\delta_3}} \quad (A.10)$$

ce qui redonne bien (5.35) puisque $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \delta$.