

③ Evaporation à η constant

3-5 Evolution temporelle de quelques grandeurs physiques

Principe du calcul

- Nous avons établi plus haut (§§ 3-3 et 3-4) 2 relations entre la densité spatiale n et la vitesse moyenne thermique v :

$$n v \beta = e^{-rt} \quad (9.1)$$

$$n v = \frac{e^{-rt}}{1 - \left(\frac{A-B}{r}\right)(1-e^{-rt})} = \frac{e^{-rt}}{1 - B(1-e^{-rt})\frac{\beta-1}{r}} \quad (9.2)$$

Rappelons que $r = \Gamma_{\text{ind}} / \Gamma_{\text{el}}(t=0)$ et que $\beta = A/B$ où A et B sont donnés par (8.48). Rappelons également que n et v sont exprimées en unités de n_0 et v_0 , où n_0 et v_0 sont les valeurs de n et v à $t=0$, et que l'unité de temps est $\tau_0 = 1/n_0 v_0$.

- Des équations (9.1) et (9.2) on peut extraire n et v

$$n = \frac{e^{-rt}}{\left[1 - B(1-e^{-rt})\frac{\beta-1}{r}\right]\frac{\beta}{\beta-1}} \quad (9.3)$$

$$v = \left[1 - B(1-e^{-rt})\frac{\beta-1}{r}\right]^{\frac{1}{\beta-1}} \quad (9.4)$$

- Toute grandeur physique peut être exprimée en fonction de n et v , et son évolution temporelle se déduit donc de (9.3) et (9.4).
 Considérons par exemple N , T et la densité D dans l'espace des phases

$$\left\{ \begin{aligned} N = n V_e \propto n T^\delta \propto n v^{2\delta} &= \frac{e^{-rt}}{\left[1 - B(1-e^{-rt})\frac{\beta-1}{r}\right]^{\frac{\beta-2\delta}{\beta-1}}} \quad (9.5) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} T \propto v^2 &= \left[1 - B(1-e^{-rt})\frac{\beta-1}{r}\right]^{\frac{2}{\beta-1}} \quad (9.6) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} D \propto n v^{-3} &= \frac{e^{-rt}}{\left[1 - B(1-e^{-rt})\frac{\beta-1}{r}\right]^{\frac{\beta+3}{\beta-1}}} \quad (9.7) \end{aligned} \right.$$

Cas particuliers

(i) $r=0$ ($\Gamma_{\text{ind}}=0$). Les équations (9.5), (9.6), (9.7) deviennent

$$N \propto \frac{1}{\left[1 - B(\beta-1)t\right]^{\frac{\beta-2\delta}{\beta-1}}} \quad (9.8)$$

$$T \propto \left[1 - B(\beta-1)t\right]^{\frac{2}{\beta-1}} \quad (9.9)$$

$$D \propto \frac{1}{\left[1 - B(\beta-1)t\right]^{\frac{\beta+3}{\beta-1}}} \quad (9.10)$$

(ii) $\beta = 1$

Les 2 équations (9.1) et (9.2) sont alors identiques et ne permettent plus de déterminer séparément n et v . Revenons à l'équation (8.55 b) et remplaçons au 2^{ème} membre $n v$ par e^{-rt} , compte tenu de 9-1

$$\dot{v} = -B e^{-rt} v \quad (9.11)$$

Cette équation s'intègre aisément, avec la condition initiale $v(0) = 1$

$$v = e^{-\frac{B}{r}(1-e^{-rt})} \quad (9.12)$$

v décroît de 1 à $e^{-B/r}$ quand t croît de 0 à $+\infty$. $n = e^{-rt}/v$ peut commencer par croître quand t croît si r est suffisamment petit, mais tend ensuite vers 0 quand $t \rightarrow \infty$.

(iii) $\beta = 1$ et $r = 0$

On a alors $n v = 1$ et $A = B$. Les équations (8.55) donnent

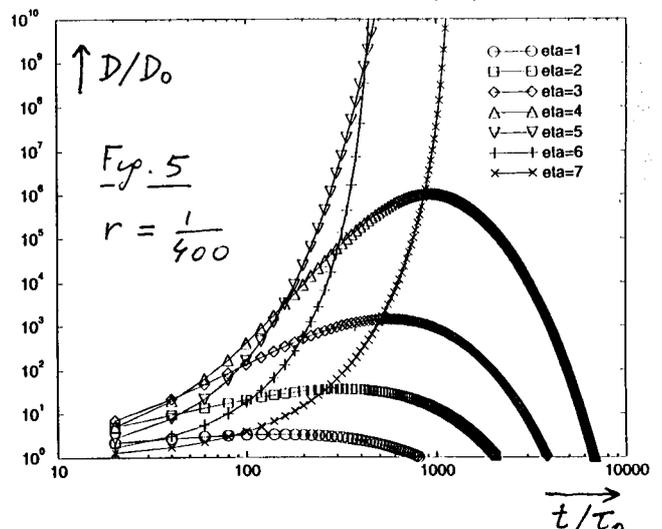
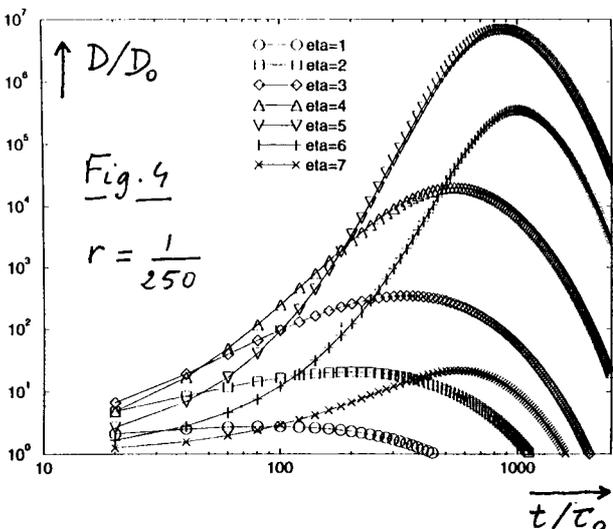
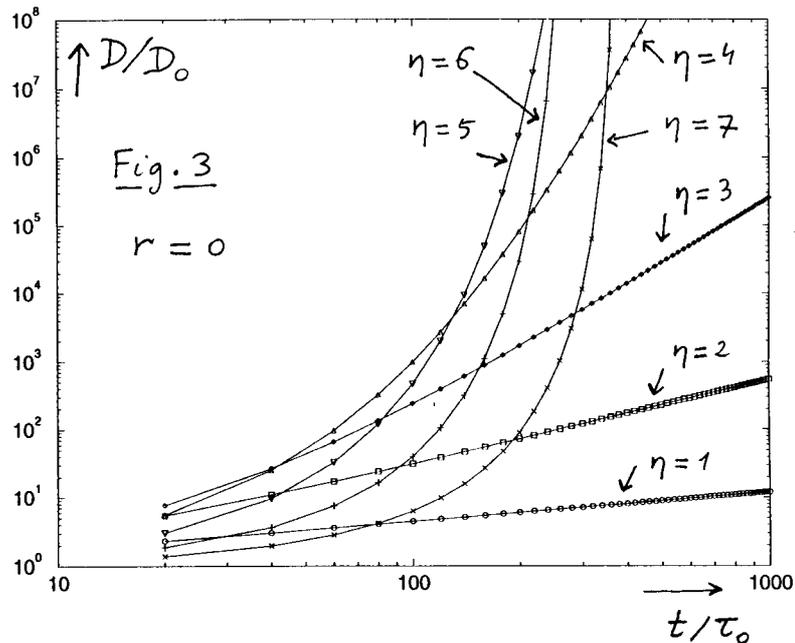
$$B = 1, r = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = e^{-Bt} \\ n = e^{+Bt} \end{cases} \quad (9.13)$$

Exemples de courbes donnant l'évolution temporelle de D

Courbes calculées à partir de (9.4) ou (9.10) et extraites de la référence [5] page VIII-9.

Chaque réseau de courbes correspond à diverses valeurs de η : $\eta = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ et à la même valeur de $\delta = 3/2$ (puits harmonique)

- Fig. 3 $r = 0$
- Fig. 4 $r = \frac{1}{250}$
- Fig. 5 $r = \frac{1}{400}$



(i) Cas $r=0$. ($\Gamma_{\text{incl}} = 0$)

- Il faut alors utiliser (9.10). Le crochet figurant au dénominateur de (9.10) est le même que celui qui figure au dénominateur de l'expression (8.61) qui donne les variations de $n\nu$. Il est élevé à la puissance $(\beta+3)/(\beta-1)$, exposant dont les variations avec β sont représentées sur la figure 6. En plus de la valeur $\beta=1$ qui sépare les 2 régimes de variation de $n\nu$ avec t (voir Fy.1 page VIII-8), apparaît la valeur $\beta=-3$ pour laquelle $(\beta+3)/(\beta-1)$ s'annule et change de signe.

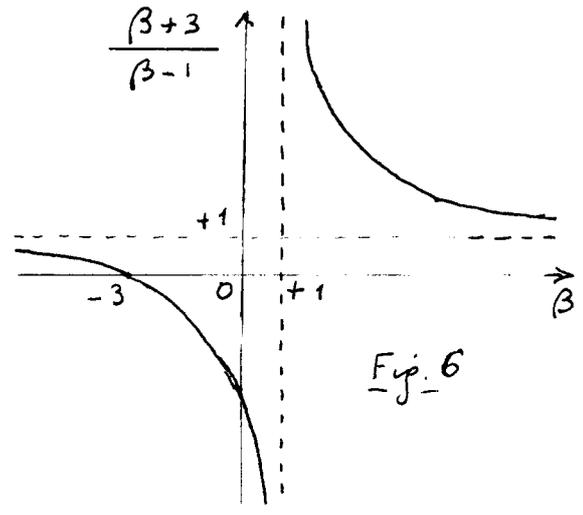


Fig. 6

- Les variations de β (voir Eq. 8.50) avec η sont données sur la figure D3 de l'Appendice D qui regroupe quelques autres figures donnant les variations avec η d'autres paramètres importants. On voit que les valeurs $\eta=1, 2, 3, 4$ considérées sur la figure 3 correspondent à des valeurs croissantes de β comprises entre -3 et $+1$. L'exposant $(\beta+3)/(\beta-1)$ est alors négatif et son module croît quand η croît de 1 à 4. Comme $\beta < 1$, $1 - B(\beta-1)t$ croît de 1 à $+\infty$ quand t croît de 0 à $+\infty$, et se comporte comme $B(1-\beta)t$ pour t grand. La densité D dans l'espace des phases se comporte donc comme une loi de puissance $t^{(\beta+3)/(1-\beta)}$ pour t grand. Dans les coordonnées log-log de la figure 3, on s'attend donc à trouver pour le comportement asymptotique de D des droites de pente $(\beta+3)/(1-\beta)$ croissant avec η quand η croît de 1 à 4. C'est bien ce que l'on constate sur la figure 3.

- Pour $\eta = 5, 6, 7$, on voit sur la figure D3 de l'appendice D que $\beta > 1$. Le crochet du dénominateur de (9.10) s'annule pour $t = 1/B(\beta-1) = 1/(A-B)$. Comme l'exposant $(\beta+3)/(\beta-1)$ est alors positif (voir Fy.6), D croît quand t croît de 0 à $t_{\text{div}} = 1/(A-B)$ et diverge pour $t = 1/(A-B)$. C'est bien ce que l'on constate sur la figure 3. L'abscisse $t_{\text{div}} = 1/(A-B)$ où se produit la divergence est d'autant plus petite que $A-B$ est plus grand. On voit sur la figure 2 page VIII-9 que $A-B$ est plus grand pour $\eta = 6$ que pour $\eta = 5$ ou $\eta = 7$. Effectivement, c'est bien la courbe $\eta = 6$ qui diverge le plus rapidement sur la figure 3.

- Le régime d'emballement conduit donc à une divergence, non seulement du taux de collisions élastiques $\Gamma_{\text{el}} = n\sigma\nu$, mais aussi de la densité D dans l'espace des phases. On voit donc tout l'intérêt qu'il y a à atteindre un tel régime dans la recherche de la condensation de Bose-Einstein.

- Notons enfin que si $\beta = 1$, $D \propto n\nu^{-3}$ varie exponentiellement avec t , comme e^{4Bt} [voir (9.13)]. La croissance asymptotique de D avec t passe donc d'une loi de puissance à une exponentielle quand β atteint la valeur 1, avant de diverger au bout d'un temps fini quand $\beta > 1$.

(ii) Cas $r \neq 0$ ($\Gamma_{\text{inel}} \neq 0$)

- Il faut alors utiliser (9.7). Le crochet figurant au dénominateur de (9.7) est le même que celui figurant au dénominateur de (8.64) puisque $A-B = (\beta-1)B$. Pour $(A-B) > r$, on s'attend donc, comme précédemment, à une divergence simultanée de Γ_{el} et D lorsque t croît et atteint la valeur t_{div} donnée en (8.66). D'après la figure 2, page VIII-9, la condition $A-B > r$ ne peut être réalisée que si $r < 0.0033$, ce qui est le cas pour la figure 5 correspondant à $r = 1/400 = 0.0025$, mais non pour la figure 4 correspondant à $r = 1/250 = 0.004$. Effectivement, on voit que des divergences sur D n'apparaissent que sur la figure 5. La présence de pertes dues aux collisions inélastiques n'empêche pas une divergence simultanée de Γ_{el} et D quand la condition d'emballement est satisfaite. Bien sûr, cette condition est plus difficile à réaliser en présence de collisions inélastiques puisqu'il faut avoir $A-B > r$ et non pas seulement $A-B > 0$.

- Notons enfin que pour les valeurs de η conduisant à des valeurs de $A-B$ telles que $A-B < r$, tout en ayant $\beta > -3$ (ce qui est le cas de toutes les courbes de la figure 4 et des courbes $\eta = 1, 2, 3, 4$ de la figure 5), D commence par croître, passe par un maximum, puis décroît. L'exponentielle e^{-rt} du numérateur de (9.7), qui décrit les fuites hors du piège, finit par imposer une décroissance aux grandes valeurs de t . Sans cette exponentielle, les variations du dénominateur conduiraient à une croissance de D . Les courbes de la figure 4 permettent donc de déterminer quelle est la valeur optimale de η pour obtenir la valeur la plus élevée possible de D , quand le régime d'emballement ne peut pas être atteint. Prendre une valeur de η trop élevée conduit à une évaporation efficace, mais trop lente devant les pertes. Il y a un compromis à réaliser entre efficacité et rapidité.

3-5 Importance d'une compression adiabatiqueMotivations

- L'étude précédente montre tout l'intérêt qu'il y a à atteindre le régime d'emballement, ou tout au moins de s'en rapprocher le plus possible. Les grandeurs physiques intéressantes, comme D , peuvent atteindre des valeurs importantes, voire même diverger.
- Pour atteindre le régime d'emballement, il faut réaliser $A-B > r$ (voir § 3-4). Comme $A-B$ est fixé et ne peut dépasser 0.0033 (voir Fig. 2, page VIII-4), il faut diminuer r autant que possible. Or, $r = \Gamma_{\text{inel}} / \Gamma_{\text{el}}(t=0)$. Il faut donc diminuer au maximum la pression du gaz résiduel, responsable de Γ_{inel} , et essayer de partir d'un état initial à $t=0$, où Γ_{el} a la valeur la plus grande possible.

- Comme nous allons le voir, une compression adiabatique IX-5
préalable ne change pas la densité initiale $D(t=0)$ dans l'espace des phases tout en augmentant $n v$, c'est à dire Γ_{cl} .

Cas simple d'un potentiel harmonique

- Il est plus simple en fait de raisonner en termes quantiques. Supposons qu'on augmente la courbure du puits harmonique, suffisamment lentement pour que les populations de niveaux d'énergie ne changent pas (Fig. 7)

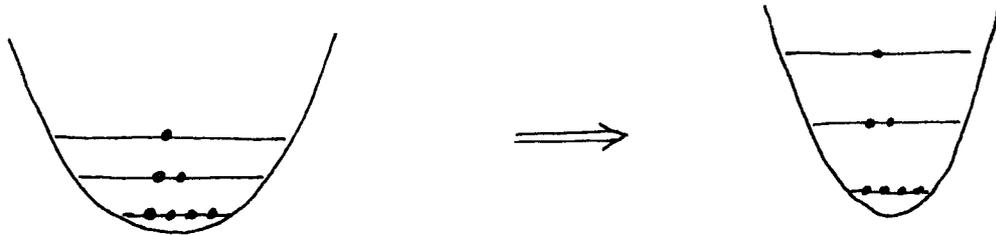


Fig. 7

- Multiplier dans l'hamiltonien $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$ la constante de raideur k par g revient à multiplier la fréquence d'oscillation ω par \sqrt{g} puisque $k = m \omega^2$.

$$k \rightarrow g k \quad \Rightarrow \quad \omega \rightarrow \sqrt{g} \omega \quad (9.14)$$

La température T , qui est proportionnelle à l'énergie moyenne, donc à ω , est multipliée par \sqrt{g} . La vitesse moyenne v , proportionnelle à \sqrt{T} , est multipliée par $g^{1/4}$

$$T \rightarrow \sqrt{g} T \quad v \rightarrow g^{1/4} v \quad (9.15)$$

La longueur en x des fonctions d'onde, qui varie comme $\sqrt{\hbar/m\omega}$, est multipliée par $g^{-1/4}$, et donc le volume spatial par $g^{-3/4}$

La densité spatiale $n = N/V_e$ est multipliée par $g^{3/4}$

$$\Delta x \rightarrow g^{-1/4} \Delta x \quad V_e \rightarrow g^{-3/4} V_e \quad n \rightarrow g^{3/4} n \quad (9.16)$$

On déduit alors de (9.15) et (9.16)

$$n v \rightarrow g^{3/4} g^{1/4} n v = g n v \quad \Gamma_{cl} \rightarrow g \Gamma_{cl} \quad (9.17a)$$

$$D \propto n v^{-3} \rightarrow g^{3/4} g^{-3/4} n v \quad D \rightarrow D \quad (9.17b)$$

- En conclusion, augmenter adiabatiquement ^(k) par un facteur g permet de gagner un facteur g sur le taux de collisions classiques sans changer la densité dans l'espace des phases D

Généralisation à un potentiel $V(\vec{r}) = k r^{3/8}$

- Considérons l'équation aux valeurs propres de H

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi_n + k r^{3/8} \Psi_n = E_n \Psi_n \quad (9.18)$$

et changeons de variables pour lui donner une forme indépendante de toutes les constantes \hbar, m, k

- Posons pour cela

IX-6]

$$x = \lambda \hat{x} \quad y = \lambda \hat{y} \quad z = \lambda \hat{z} \quad (9.19)$$

Comme $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dx} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \hat{x}}$, on obtient

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2}\right) \Psi_n + \frac{2m}{\hbar^2} \lambda^2 \lambda^{3/\delta} k \hat{r}^{3/\delta} \Psi_n = \frac{2m\lambda^2}{\hbar^2} E_n \Psi_n \quad (9.20)$$

- Choisissons alors λ tel que $\frac{2m}{\hbar^2} \lambda^{\frac{2\delta+3}{\delta}} k = 1$, c'est à dire

$$\lambda = \left(\frac{\hbar^2}{2mk}\right)^{\frac{\delta}{2\delta+3}} \quad (9.21)$$

et posons

$$E_n = \frac{2m\lambda^2}{\hbar^2} E_n = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2\delta+3}} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{2\delta}{2\delta+3}} E_n \quad (9.22)$$

L'équation (9.20) prend la forme générale cherchée

$$\left(-\hat{\Delta} + \hat{r}^{3/\delta}\right) \Psi_n = E_n \Psi_n \quad (9.23)$$

- On déduit de (9.19), (9.21) et (9.22) que la longueur des fonctions d'onde varie comme λ , donc comme $(1/k)^{\delta/(2\delta+3)}$, et que l'énergie varie comme $k^{2\delta/(2\delta+3)}$. Si l'on multiplie k par g , on a donc

$$\begin{aligned} \Delta x &\rightarrow \Delta x \left(\frac{1}{g}\right)^{\frac{\delta}{2\delta+3}} & V_e &\rightarrow V_e \left(\frac{1}{g}\right)^{\frac{3\delta}{2\delta+3}} \\ T &\rightarrow g^{\frac{2\delta}{2\delta+3}} & v &\rightarrow g^{\frac{\delta}{2\delta+3}} & n &\rightarrow n g^{\frac{3\delta}{2\delta+3}} \end{aligned} \quad (9.24)$$

On en conclut que

$$\begin{aligned} n v &\rightarrow g^{\frac{3\delta}{2\delta+3}} g^{\frac{\delta}{2\delta+3}} n v = g^{\frac{4\delta}{2\delta+3}} n v \\ D \propto n v^{-3} &\rightarrow g^{\frac{3\delta}{2\delta+3}} g^{-\frac{3\delta}{2\delta+3}} n v^{-3} = n v^{-3} \quad D \rightarrow D \end{aligned} \quad (9.25)$$

- Sans changer D , on gagne donc un facteur $g^{\frac{4\delta}{2\delta+3}}$ sur le taux de collisions élastiques. Pour $\delta = 3/2$, on retrouve le facteur g de (9.17a). Pour $\delta = 3$ (piège linéaire), on obtient un facteur g^2 , encore plus favorable.

Références

les mêmes que celles données pages VII-9 et VIII-9

Les courbes de l'appendice D ont été obtenues par D. Guéry Odélin à partir des équations donnant Γ_{ev}/P_{el} , α , β , A , B .

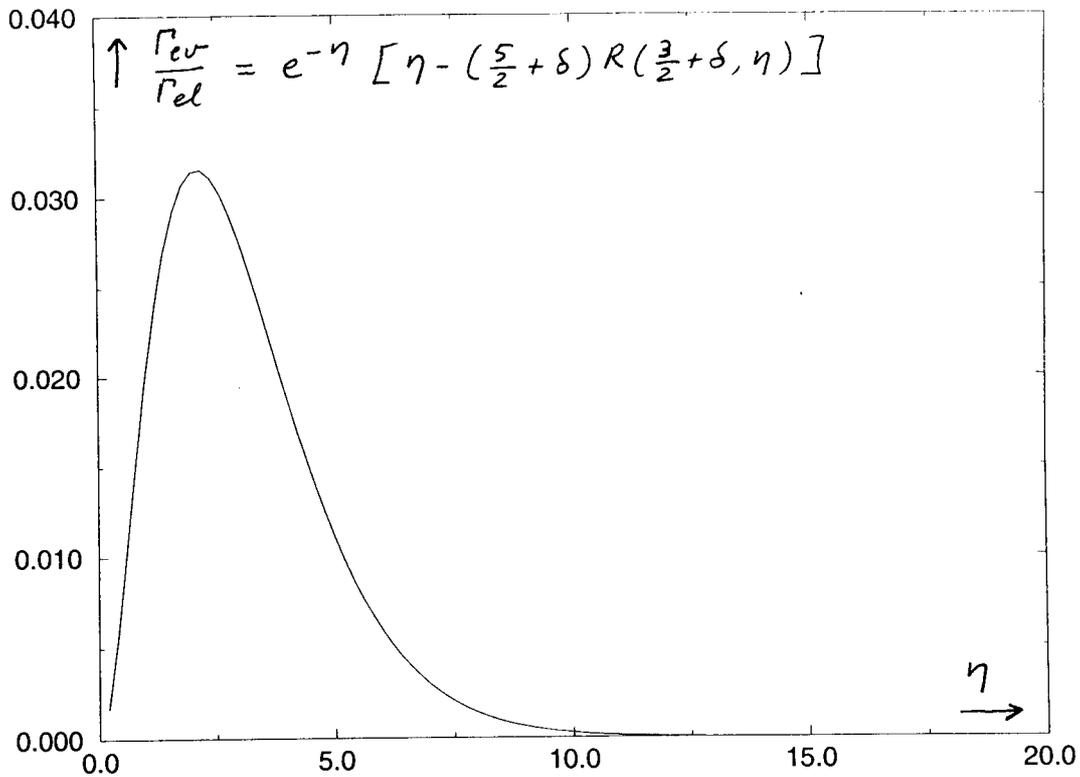


Fig. D1 Variations avec η de Γ_{cv}/Γ_{el} . Le fait que Γ_{cv}/Γ_{el} soit, au maximum, de l'ordre de $3 \cdot 10^{-2}$, montre bien l'existence de 2 échelles de temps dans le problème

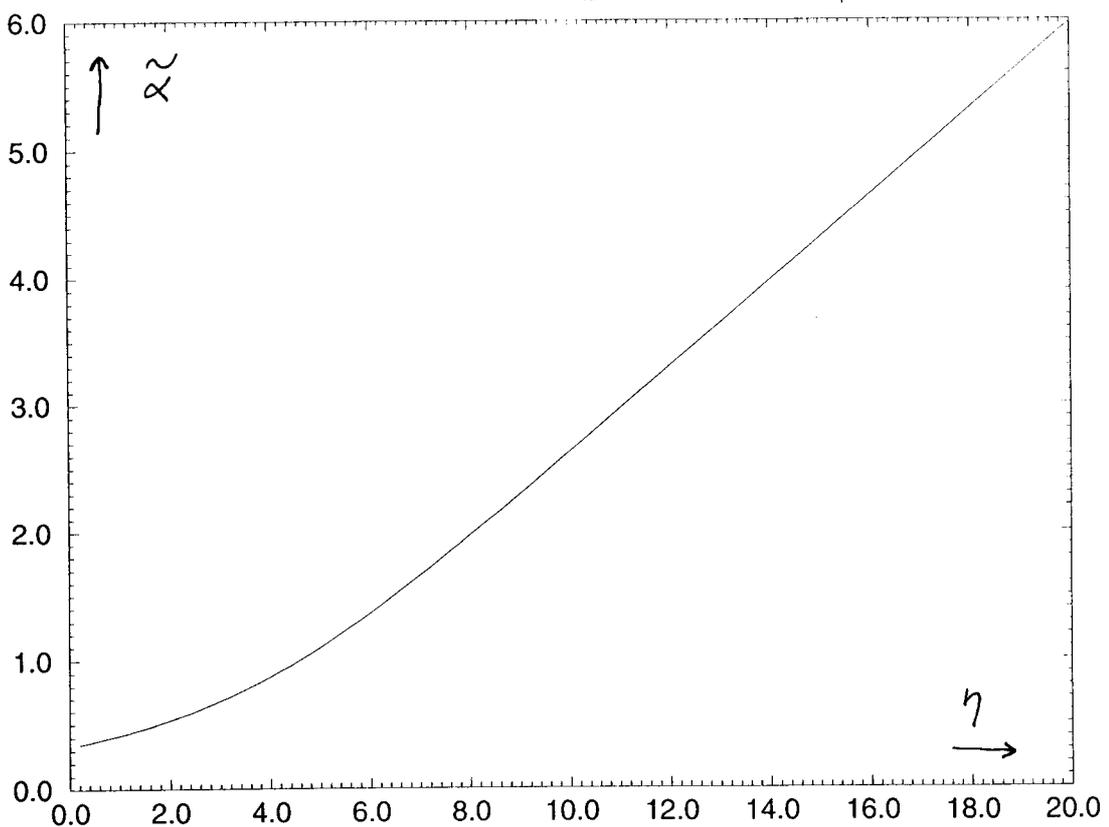


Fig. D2 Variations avec η de $\tilde{\alpha}$ (voir Eq. (8.37))

IX-8

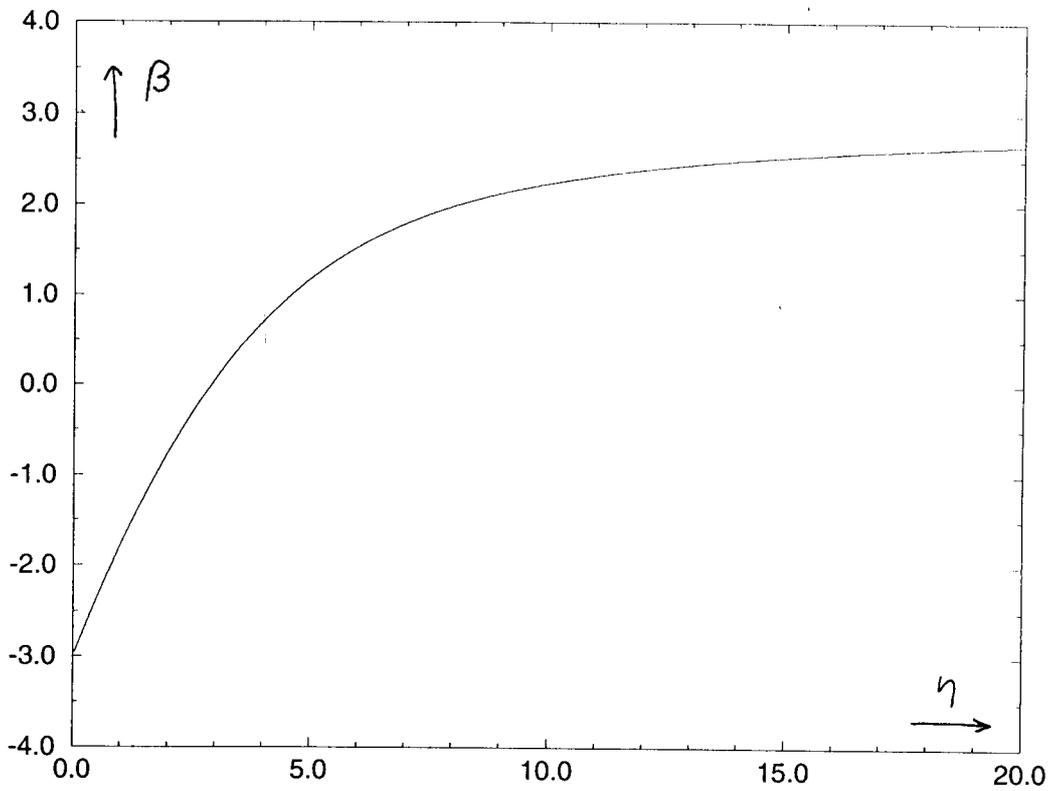


Fig. D3 Variations avec η de β (voir Eq. (8.50))

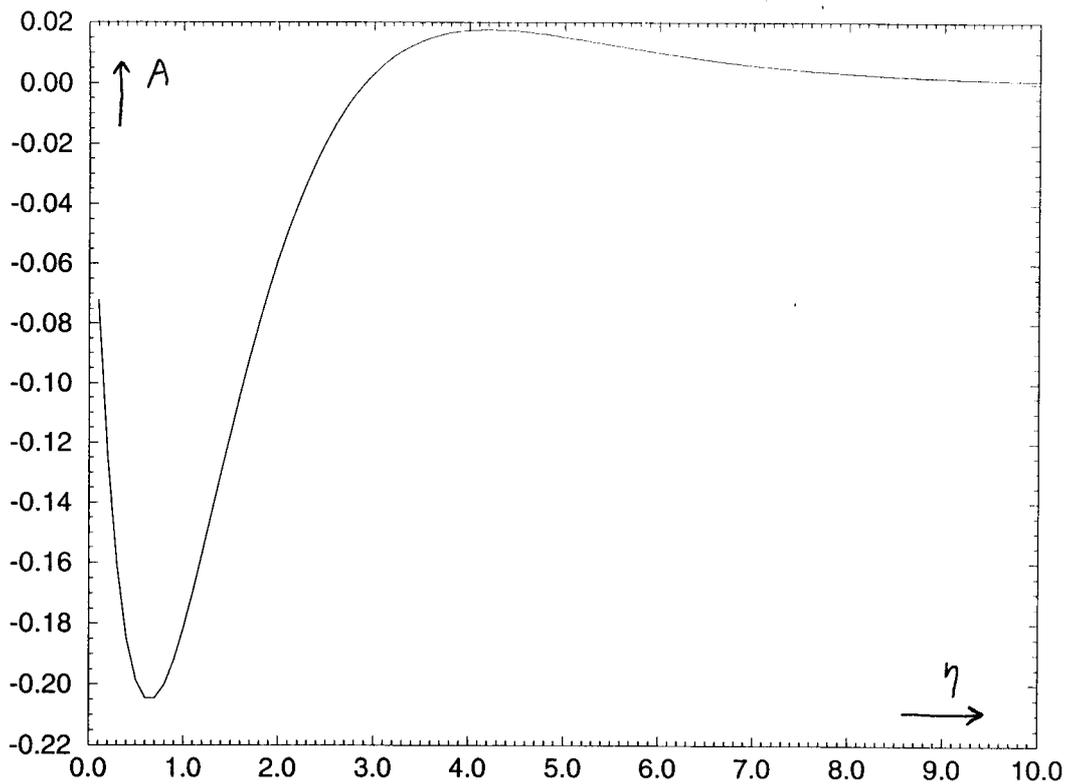


Fig. D4 Variations avec η de A (voir Eq. (8.48) a)

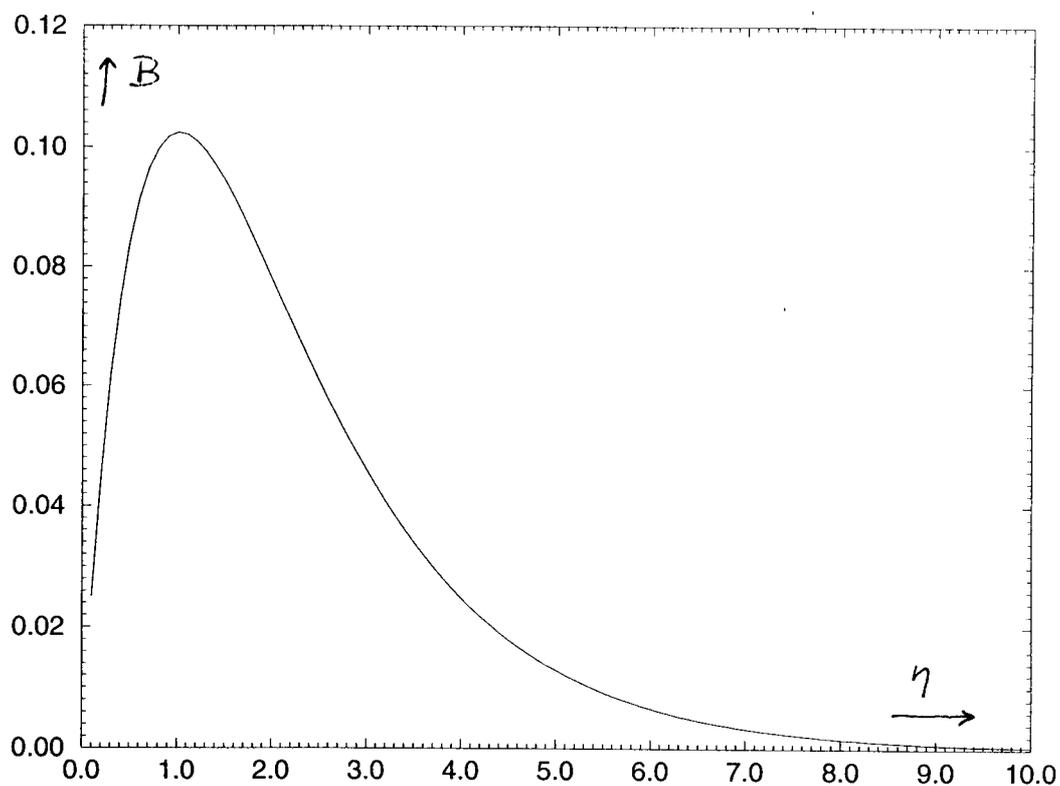


Fig. D5 Variations avec η de B (voir Eq. (8.48 b))

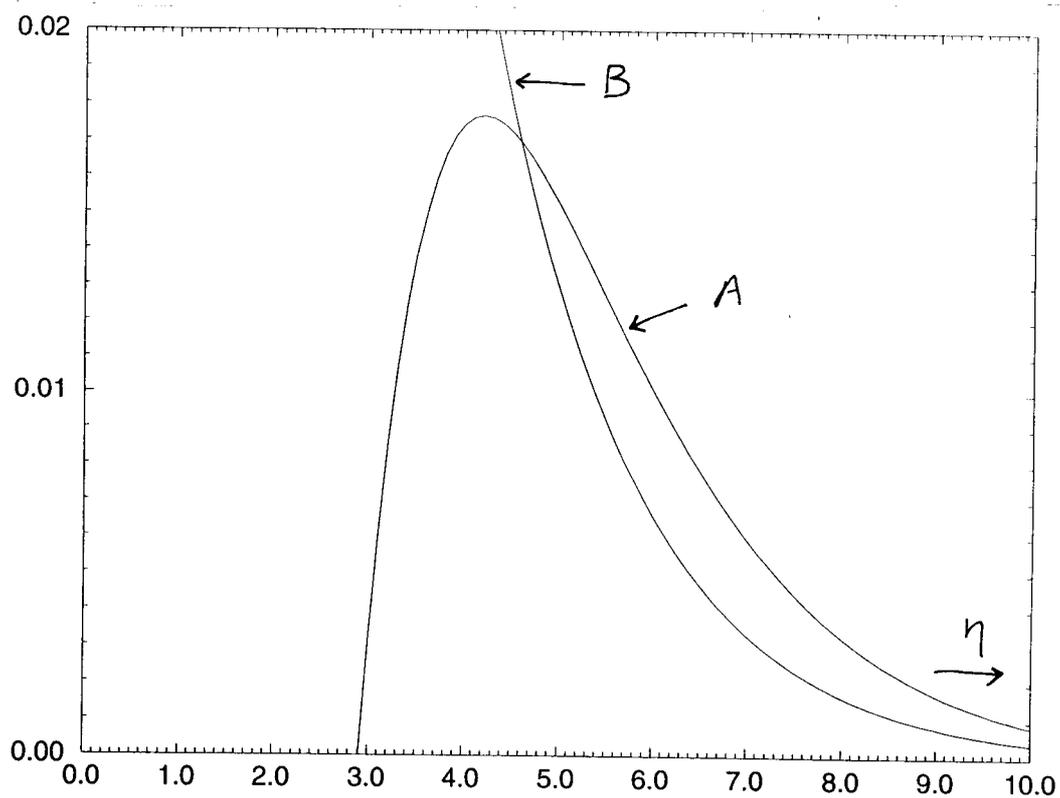


Fig. D6 Variations comparées avec η de A et B (voir Equs. (8.48))
 Noter la décroissance très forte de A et B avec η due au facteur $e^{-\eta}$ des équations (8.48)

IX-10

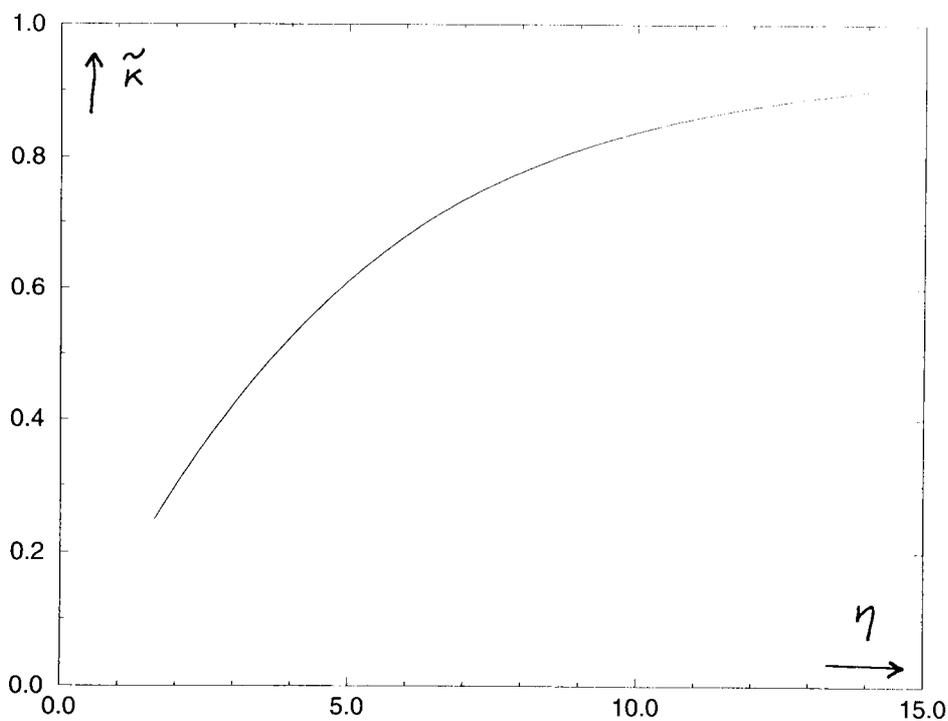


Fig. D7 - Variations avec η de $\tilde{\kappa}$ [voir Eqs. (8.27) et (8.28)]

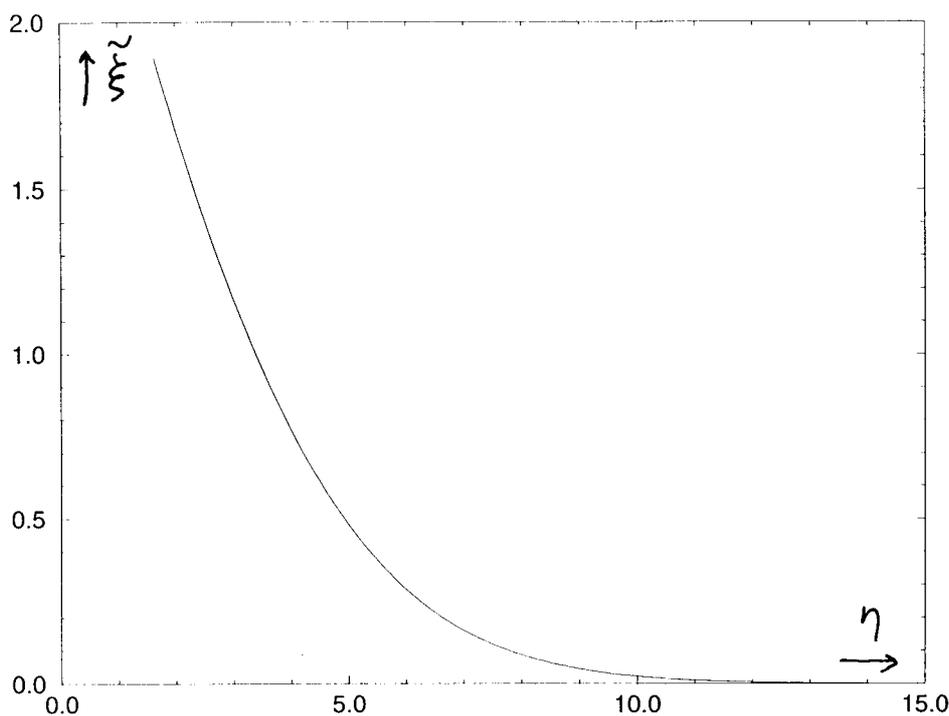


Fig. D8 - Variations avec η de $\tilde{\xi}$ [voir Eq. (8.23)]