

Buts de ce chapitre : Étudier la forme et le contenu physique des équations générales introduites dans le cours II, à la limite des faibles intensités et faibles vitesses, qui est celle où les nouveaux mécanismes de refroidissement laser sont les plus efficaces.

1 - Élimination adiabatique des cohérences optiques

a. Approximations

Faibles intensités

- A faible intensité, des constantes de temps longues, de l'ordre du temps de pompage τ_p (ou de $1/\delta'$), apparaissent dans l'évolution de σ_{gg} , beaucoup plus longues que le temps $\tau_R = 1/\Gamma$ caractérisant l'amortissement de $\tilde{\sigma}_{eg}$ et $\tilde{\sigma}_{ee}$. Dans l'évolution couplée de $\tilde{\sigma}_{ee}$, σ_{gg} , $\tilde{\sigma}_{eg}$, c'est la variable lente σ_{gg} qui va imposer sa vitesse de variation à toutes les autres, de sorte que $\tilde{\sigma}_{eg}$ sera de l'ordre de $\tilde{\sigma}_{eg}/\tau_p$, qui est beaucoup plus petit que $\Gamma\tilde{\sigma}_{eg}/2 = \tilde{\sigma}_{eg}/2\tau_R$. Il en est de même pour $\tilde{\sigma}_{ee}$ qui est négligeable devant $\Gamma\tilde{\sigma}_{ee}$.

Dans les équations (2.42) et (2.47), on peut donc négliger $\tilde{\sigma}_{eg}$ devant $-\Gamma\tilde{\sigma}_{eg}/2$ et remplacer le membre de gauche des 2 équations par 0.

- A faible intensité, σ_{gg} est d'ordre 0 en champ laser \vec{E}_L^+ . D'après (2.42) et (2.47), $\tilde{\sigma}_{eg}$ est alors au moins d'ordre 1, et d'après (2.43) et (2.48), $\tilde{\sigma}_{ee}$ est au moins d'ordre 2. Le dernier terme de (2.42) et (2.47), qui fait intervenir le produit de $\tilde{\sigma}_{ee}$ par \vec{E}_L^+ est donc au moins d'ordre 3. Si on se limite à l'ordre 2, on peut donc négliger ce dernier terme.

Faibles vitesses

- Si les degrés de liberté externes sont traités classiquement, \vec{r} est remplacé par $\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$ dans (2.42) et (2.43). Dans le calcul de $\tilde{\sigma}_{eg}$ et $\tilde{\sigma}_{ee}$, des termes supplémentaires apparaissent à cause de cette dépendance temporelle de \vec{r} . Ils sont de l'ordre de $\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \tilde{\sigma}_{eg} \approx k v_0 \tilde{\sigma}_{eg}$ et $\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \tilde{\sigma}_{ee} \approx k v_0 \tilde{\sigma}_{ee}$. Si on fait un calcul à l'ordre 0 en $k v / \Gamma$, on peut négliger ces termes devant $-\Gamma\tilde{\sigma}_{eg}/2$ et $-\Gamma\tilde{\sigma}_{ee}$.

En procédant ainsi, on perd bien sûr le mécanisme de refroidissement Doppler dans une mélasse optique. Mais on s'intéresse ici aux nouveaux mécanismes de refroidissement laser qui apparaissent à des vitesses beaucoup plus faibles que le refroidissement Doppler (effets en $k v_0 / \delta'$ ou $k v_0 / \delta''$).

Notons enfin qu'il n'est pas question de négliger la dépendance temporelle de \vec{r} dans l'équation donnant $\dot{\sigma}_{gg}$, car nous verrons plus loin que les termes de droite de (2.44) sont de l'ordre de $\delta' \sigma_{gg}$ et $\delta'' \sigma_{gg}$ qui ne sont pas nécessairement grands devant $k v_0 \sigma_{gg}$.

- Si les degrés de liberté externes sont traités quantiquement, il suffit de noter que les termes provenant de $[\vec{P}^2/2M, \sigma]/i\hbar$ deviennent, en représentation de Wigner, égaux à $(\vec{P}/M) \cdot \vec{\nabla} w \approx (k p / M) w \approx k v w$. Comme précédemment, ces termes sont négligeables devant ceux décrivant l'amortissement par émission spontanée pour w_{eg} et w_{ee} (à l'ordre 0 en $k v / \Gamma$). On peut donc, dans un calcul à l'ordre 0 en $k v / \Gamma$, négliger les commutateurs avec $\vec{P}^2/2M$ dans (2.47) et (2.48), mais non dans (2.44).

b. Expression des cohérences optiques en fonction de σ_{gg}

III-2

- Compte tenu des approximations précédentes, (2.47) donne

$$\tilde{\sigma}_{eg} = -\frac{1}{\hbar} \frac{1}{\delta + i\frac{\Gamma}{2}} \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R}) \sigma_{gg} \quad (3.1.a)$$

et par suite, en prenant l'adjoint

$$\tilde{\sigma}_{ge} = -\frac{1}{\hbar} \frac{1}{\delta - i\frac{\Gamma}{2}} \sigma_{gg} \vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{R}) \quad (3.1.b)$$

- Dans (3.1.a) et (3.1.b), les degrés de liberté externes sont traités quantiquement. A la limite semiclassical, il suffit de remplacer \vec{R} par $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$.

2 - Nouvelle expression pour la force moyenne à la limite semiclassical

a. Valeur moyenne du dipôle atomique

$$\begin{aligned} \langle \vec{d} \rangle &= \text{Tr} \{ \vec{d}^- \cdot \sigma_{eg} + \sigma_{ge} \vec{d}^+ \} \\ &= \text{Tr} \{ \vec{d}^- \cdot \tilde{\sigma}_{eg} \} e^{-i\omega_L t} + \text{Tr} \{ \tilde{\sigma}_{ge} \cdot \vec{d}^+ \} e^{i\omega_L t} = \langle \vec{d}^-(t) \rangle + \langle \vec{d}^+(t) \rangle \end{aligned} \quad (3.2)$$

- Le report de (3.1) dans (3.2) donne (après avoir remplacé \vec{R} par $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$)

$$\langle \vec{d}^-(t) \rangle = -\frac{1}{\hbar} \frac{1}{\delta + i\frac{\Gamma}{2}} \text{Tr} \{ \vec{d}^- \cdot \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{r}) \sigma_{gg} \} e^{-i\omega_L t} \quad (3.3.a)$$

$$\langle \vec{d}^+(t) \rangle = -\frac{1}{\hbar} \frac{1}{\delta - i\frac{\Gamma}{2}} \text{Tr} \{ \vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{r}) \vec{d}^+ \sigma_{gg} \} e^{i\omega_L t} \quad (3.3.b)$$

On pourrait aisément, à partir de ces expressions, calculer le tenseur de susceptibilité linéaire reliant $\langle \vec{d}^- \rangle$ à \vec{E}^+ , ou $\langle \vec{d}^+ \rangle$ à \vec{E}^- .

b. Expression de la force moyenne en fonction de σ_{gg}

- En reportant (3.3) dans (2.22), on obtient

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{\hbar} \frac{1}{\delta - i\frac{\Gamma}{2}} \sum_{i,j} \text{Tr} \{ d_i^- d_j^+ \sigma_{gg} \} E_{Li}^-(\vec{r}) (\vec{\nabla} E_{Lj}^+(\vec{r})) \\ &\quad - \frac{1}{\hbar} \frac{1}{\delta + i\frac{\Gamma}{2}} \sum_{i,j} \text{Tr} \{ d_i^- d_j^+ \sigma_{gg} \} E_{Lj}^+(\vec{r}) (\vec{\nabla} E_{Li}^-(\vec{r})) \end{aligned} \quad (3.4)$$

- Nous reviendrons, dans un chapitre ultérieur, sur l'interprétation physique de cette expression et nous la réécrirons sous une forme plus suggestive. Il nous faut auparavant identifier un certain nombre de grandeurs physiques régissant l'évolution de l'état fondamental.

3 - Matrice densité décrivant l'état des atomes excités dans e.

a. Expression de σ_{ee} en fonction de σ_{gg}

- Dans l'équation (2.48) donnant $\dot{\sigma}_{ee}$, on peut, comme nous l'avons expliqué ci-dessus (§.1), négliger $\dot{\sigma}_{ee}$ dans le membre de gauche et le commutateur avec $\vec{P}^2/2m$ dans le membre de droite. On obtient alors une équation donnant σ_{ee} en fonction de $\tilde{\sigma}_{eg}$ et $\tilde{\sigma}_{ge}$

$$\sigma_{ee} = -\frac{1}{\Gamma} \frac{1}{i\hbar} \left[\vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R}) \tilde{\sigma}_{ge} - \tilde{\sigma}_{eg} \vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{R}) \right] \quad (3.5)$$

Il suffit alors de remplacer $\tilde{\sigma}_{eg}$ et $\tilde{\sigma}_{ge}$ par leurs expressions (3.1) données plus haut en fonction de σ_{gg} pour obtenir l'équation

$$\sigma_{ee} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{s^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R}) \sigma_{gg} \vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{R})$$

qui donne σ_{ee} en fonction de σ_{gg} .

- Dans (3.6) les degrés de liberté externes sont traités quantiquement. A la limite semiclassical, il suffit de remplacer \vec{R} par $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$
- L'équation (3.6) montre que si l'état fondamental est pur, c-à-d si

$$\sigma_{gg} = |\Psi_g\rangle \langle \Psi_g| \quad (3.7)$$

($|\Psi_g\rangle$ dépend également des degrés de liberté externes), alors l'état excité est aussi pur : $\sigma_{ee} = |\Psi_e\rangle \langle \Psi_e|$ avec

$$|\Psi_e\rangle \text{ proportionnel à } \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R}) |\Psi_g\rangle \quad (3.8)$$

b - Etude plus détaillée d'un exemple concret : atome à 2 niveaux à un noeud d'une onde stationnaire.

Buts de ce calcul

- Les notations sont les mêmes que dans l'appendice des cours II page II-9.
- On place un atome à 2 niveaux, dans l'état fondamental, en $x=0$, c'est à dire à un noeud de l'onde stationnaire (2.50). Ses degrés de liberté externes sont traités quantiquement. L'état de son centre de masse est donc décrit par une fonction d'onde $\Psi_g(x)$, supposée réelle, centrée en $x=0$, paire, de largeur Δx

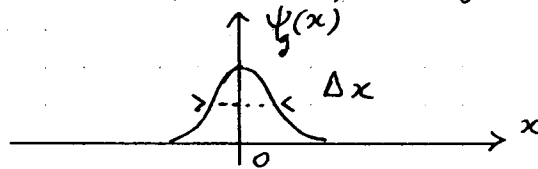


Fig. 1

On suppose également $\Delta x \ll \lambda_L$ (3.9)

L'atome est donc bien localisé au noeud.

- La transformée de Fourier $\Psi_g(p)$ de $\Psi_g(x)$ est elle aussi paire, centrée en $p=0$ et de largeur $\Delta p \sim \hbar/\Delta x$. La condition (3.9) entraîne que

$$\Delta p \gg \hbar k_L \quad (3.10)$$

- Comme Δx n'est pas strictement nul, l'atome peut absorber des photons et monter dans e . Dans ce qui suit, on essaie, à partir de (3.8) de comprendre comment varie la variance $\langle p^2 \rangle$ de p quand un atome passe de g à e

Fonction d'onde des atomes excités

- L'équation (3.6) donne, compte tenu de (2.50), (2.51), (2.52), (2.53), (2.54)

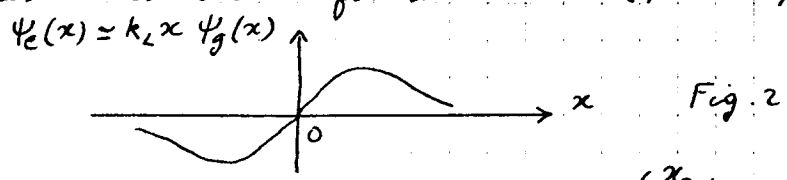
$$\begin{aligned} \sigma_{ee} &= \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{s^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \left(\frac{1}{2} d E_0 \right)^2 |e\rangle \langle e| \otimes |\Psi_e\rangle \langle \Psi_e| \\ &= \frac{s}{2} |e\rangle \langle e| \otimes |\Psi_e\rangle \langle \Psi_e| \end{aligned} \quad (3.11)$$

où la fonction d'onde $\Psi_e(x)$ associée à $|\Psi_e\rangle$ s'écrit

$$\Psi_e(x) = \sin k_L x \Psi_g(x) \approx k_L x \Psi_g(x) \quad (3.12)$$

Dans (3.11), s est le paramètre de saturation aux centres de l'onde stationnaire. $s = 4s_0$ où s_0 est le paramètre de saturation de chacune des 2 ondes progressives formant l'onde stationnaire.

- Les équations (3.11) et (3.12) montrent que les atomes qui sont dans l'état excité ont leur centre de masse décrit par une fonction d'onde ayant une forme très différente (voir Fig. 2) de celle des atomes restés dans l'état fondamental (produit par x d'une fonction paire en x)



Ceci ne serait plus vrai en tout autre point x_0 de l'onde stationnaire. On aurait alors $\psi_e(x) = \sin k_L x \psi_g(x)$. Si $\sin k_L x_0 \neq 0$, la forme de $\psi_e(x)$ est très voisine de celle de $\psi_g(x)$ puisque $\sin k_L x$ varie peu sur la largeur Δx de $\psi_g(x)$

Proportion d'atome excités : π_e

- Cette proportion est donnée par la trace de σ_e

$$\pi_e = \text{Tr } \sigma_e = \frac{\delta}{2} \langle \psi_e | \psi_e \rangle = \frac{\delta}{2} \langle \psi_g | k_L^2 x^2 | \psi_g \rangle \quad (3.13)$$

- Cette proportion est faible, non seulement parce que $\delta \ll 1$ (faibles intensités), mais parce que $\langle \psi_g | k_L^2 x^2 | \psi_g \rangle \approx k_L^2 \Delta x^2 \approx \frac{\Delta x^2}{\lambda_L^2} \ll 1$. C'est uniquement parce que la fonction d'ondes ψ_g centrée en $x = 0$ n'a pas une largeur nulle que l'atome peut "voir" un champ non nul, dont l'intensité est de l'ordre de $(\Delta x / \lambda_L)^2$, et par suite être excité.

- Prenons pour fixer les idées une fonction d'onde ψ_g gaussienne

$$\psi_g(x) = \left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{1/4} e^{-x^2/2a^2} \quad (3.14)$$

a est la largeur à $1/e$ de $|\psi_g(x)|^2$. Un calcul élémentaire donne

$$\pi_e = \frac{\delta}{2} k_L^2 \langle x^2 \rangle = \frac{\delta}{4} k_L^2 a^2 \quad (3.15)$$

Contribution des atomes excités à la variance d'impulsion

$$\Delta P^2 = \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2 = \langle P^2 \rangle \quad \text{puisque } \langle P \rangle = 0 \quad (3.16)$$

- Calcul de $\langle P^2 \rangle_e$ dans l'état excité. D'après (3.11)

$$\langle P^2 \rangle_e = \text{Tr } \sigma_{ee} P^2 = \frac{\delta}{2} k_L^2 \langle \psi_g | x P^2 x | \psi_g \rangle \quad (3.17)$$

Si l'on prend la fonction d'onde (3.14), l'élément de matrice de (3.17) peut être aisément calculé en représentation x . On trouve alors

$$\langle P^2 \rangle_e = \frac{3}{8} \delta \hbar^2 k_L^2 \quad (3.18)$$

- Calcul de $\langle P^2 \rangle$ pour un atome excité $\langle P^2 \rangle_{\text{atome excité}}$.

(3.17) et (3.18) donnent la contribution totale de l'état excité qui contient une proportion π_e d'atome excité. Par atome, on a donc

$$\langle P^2 \rangle_{\text{atome excité}} = \frac{\langle P^2 \rangle_e}{\pi_e} = \frac{\langle \psi_g | x P^2 x | \psi_g \rangle}{\langle \psi_g | x^2 | \psi_g \rangle} \quad (3.19)$$

On a utilisé (3.17) et (3.13). Pour la fonction d'ondes gaussienne (3.14), on obtient, compte tenu de (3.18) et (3.15)

$$\langle P^2 \rangle_{\text{atome excité}} = \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{a^2} \quad (3.20)$$

Variation de $\langle P^2 \rangle$ par atome quand on passe de g à e

- la proportion d'atome dans g est pratiquement égale à 1 : $\pi_g = 1$

On a donc

$$\langle P^2 \rangle_{\text{atome fondamental}} = \frac{\langle \Psi_g | P^2 | \Psi_g \rangle}{\pi_g} \approx \langle \Psi_g | P^2 | \Psi_g \rangle \quad (3.21)$$

qui est égal pour la fonction d'ondes gaussienne (3.14) à

$$\langle P^2 \rangle_{\text{atome fondamental}} = \frac{\hbar^2}{2a^2} \quad (3.22)$$

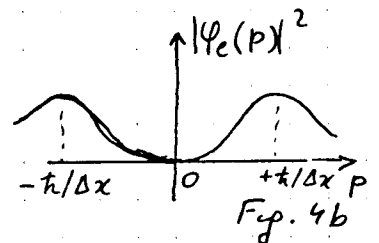
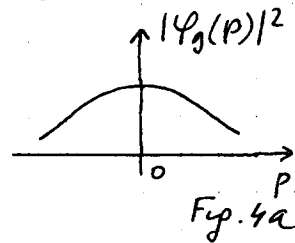
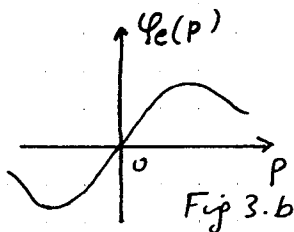
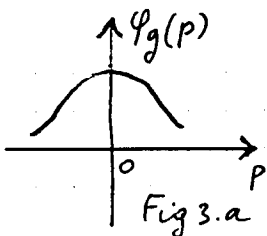
- En comparant (3.22) à (3.20), on voit alors que, en moyenne, quand un atome passe de g à e , la variation de $\langle P^2 \rangle$ vaut

$$\langle P^2 \rangle_{\text{atome excité}} - \langle P^2 \rangle_{\text{atome fondamental}} = \frac{\hbar^2}{a^2} \quad (3.23)$$

Cette variation de $\langle P^2 \rangle$ est beaucoup plus grande que $\hbar^2 k_L^2$ d'après (3.10), et devient de plus en plus grande quand $a \rightarrow 0$. Ce résultat peut paraître étrange. Lorsque l'atome absorbe un photon dans une onde stationnaire, son impulsion ne peut augmenter que de $+\hbar k_L$ ou $-\hbar k_L$. Comment son $\langle P^2 \rangle$ peut-il augmenter de beaucoup plus que $\hbar^2 k_L^2$?

Etude du même phénomène en représentation p

- Comme $|\Psi_e\rangle \sim X |\Psi_g\rangle$ d'après (3.12) et que l'opérateur X en représentation p est $-\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dp}$, on voit que si $\Psi_g(p)$ est la fonction d'onde des atomes dans g en représentation p , celle des atomes excités est $\Psi_e(p) \sim i\hbar \frac{d\Psi_g(p)}{dp}$. Les figures 3a et 3b donnent l'allure de $\Psi_g(p)$ et $\Psi_e(p)$ - Les figures 4a et 4b celle des distributions d'impulsion $|\Psi_g(p)|^2$ et $|\Psi_e(p)|^2$



- On voit que, comme en représentation x , les fonctions d'onde diffèrent notablement dans g et e .

En particulier, la distribution d'impulsion dans e a un "trou" en $p=0$ et 2 "bosses" centrées au voisinage de $\pm \hbar/\Delta x$. Si on prend des distributions normalisées à 1, on voit bien que la distribution de la figure 4.b conduit à un $\langle P^2 \rangle$ plus grand que celui de la figure 4.a par une quantité de l'ordre de $\hbar^2/\Delta x^2$.

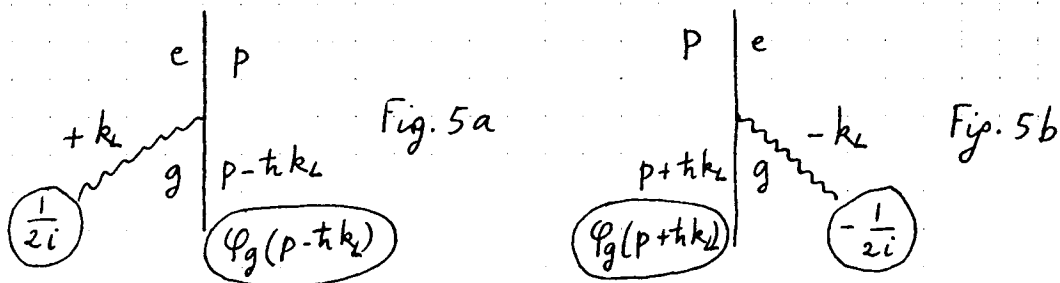
Interférences et filtrage

- Le trou en $p=0$ de la figure 4.b résulte d'un effet d'interférence.

- Pour le voir, rappelons tout d'abord qu'une onde stationnaire en $\sin k_L x$ est une superposition de 2 ondes planes $e^{ik_L x}$ et $e^{-ik_L x}$ interférant avec un signe -

$$\sin k_L x = \frac{1}{2i} [e^{ik_L x} - e^{-ik_L x}] \quad (3.24)$$

- Pour arriver dans l'état $|e, p\rangle$ (atome dans l'état excité e avec une impulsion p), l'atome peut partir de l'état $|g, p - \hbar k\rangle$, dans lequel il a une amplitude $\varphi_g(p - \hbar k)$ de se trouver, et absorber un photon e^{ikx} , qui a une amplitude $1/2i$ de se trouver dans l'onde stationnaire (Fig. 5a). Il peut également partir de $|g, p + \hbar k\rangle$ (amplitude $\varphi_g(p + \hbar k)$) et absorber un photon e^{-ikx} (amplitude $-1/2i$) (Fig. 5b)



- les 2 chemins de la figure 5 aboutissent au même état final. Comme le système global "atome + photon" a une amplitude non nulle de se trouver dans chacun des 2 états initiaux, les 2 chemins peuvent interférer, et l'amplitude d'exciter l'atome dans l'état e avec une impulsion p est proportionnelle à

$$\frac{1}{2i} [\varphi_g(p - \hbar k) - \varphi_g(p + \hbar k)] \approx i \hbar k \frac{d}{dp} \varphi_g(p) \quad (3.25)$$

On retrouve bien que l'amplitude d'avoir un atome excité d'impulsion p est proportionnelle à $d\varphi_g(p)/dp$.

- Si $\varphi_g(p)$ était indépendant de p , c'est à dire si $\varphi_g(x)$ était proportionnel à $\delta(x)$, l'interférence entre les 2 amplitudes de figures 5a et 5b serait parfaitement destructive, quel que soit p , ce qui correspond bien à l'impossibilité d'exciter un atome parfaitement localisé à un noeud. Par contre, si $\varphi_g(x)$ et $\varphi_g(p)$ ont une certaine largeur, on voit que l'interférence, parfaitement destructive au voisinage de $p=0$, ne l'est plus quand on s'écarte de $p=0$, à cause du fait que $\varphi_g(p - \hbar k)$ et $\varphi_g(p + \hbar k)$ deviennent différents, l'excitation étant maximale au voisinage des points d'inflexion de la courbe donnant $\varphi_g(p)$.

Ainsi, si $\langle p^2 \rangle$ est beaucoup plus grand pour un atome excité que pour un atome dans l'état fondamental, c'est parce que l'interférence entre les 2 amplitudes possibles d'excitations filtre les atomes d'après leur impulsion initiale et empêche les atomes de p faible d'être excités. Ne peuvent être excités que les atomes d'impulsion suffisamment grande, de l'ordre de $\hbar/\Delta x$. C'est parce qu'il y a une corrélation importante entre l'impulsion initiale de l'atome et sa probabilité d'excitation que $\langle p^2 \rangle$ varie de beaucoup plus que $\hbar^2 k^2$ quand l'atome passe de g à e . Il n'y a aucune violation de la conservation de l'impulsion lors des processus d'absorption, comme cela apparaît clairement sur les figures 5.

- L'augmentation spectaculaire de $\langle p^2 \rangle$ discutée ici rappelle l'augmentation spectaculaire de $\langle J_z \rangle$ lorsqu'une molécule passe d'un état J à un état $J+1$ par absorption d'un photon σ^+ . la probabilité de transition $J, M \rightarrow J+1, M+1$ croît très vite avec M .
 Voir J. Vigué, N. Billy, B. Girard et G. Gouesard, C.R. Acad. Sci. à paraître
 Voir aussi mêmes auteurs Phys. Rev. Lett. 62, 1358 (1989).