

07.02.89

Autre exemple de destruction des cohérences spatiales
Diffusion de photons ou de particules légères (suite).

⑤ Discussion physique

a - But de ce paragraphe

- Dans le paragraphe 4 précédent a été établie une formule importante (4.43) reliant la vitesse de destruction des cohérences spatiales d'une particule lourde à un coefficient D décrivant la diffusion de l'impulsion de cette particule lourde sous l'effet des collisions qu'elle subit avec des particules beaucoup plus légères qu'elle.
- Si pour simplifier nous nous limitons à un problème à 1 dimension, la formule (4.43) se réécrit

$$\frac{\delta}{\delta t} \langle x' | \rho | x'' \rangle = - \frac{D}{\hbar^2} (x' - x'')^2 \langle x' | \rho | x'' \rangle \quad (5.1)$$

où le coefficient de diffusion D caractérise la vitesse d'accroissement de $\langle \delta p^2 \rangle$

$$\langle \delta p^2 \rangle = 2D \delta t \quad (5.2)$$

avec

$$\delta p = p(t + \delta t) - p(t) \quad (5.3)$$

δp est l'accroissement de p pendant un temps δt grand le temps associé à une collision

- Le but de ce paragraphe 5 est d'interpréter physiquement le lien qui existe entre destruction des cohérences spatiales et diffusion de l'impulsion.

b - Lien entre la cohérence spatiale globale et la fonction de distribution de l'impulsion

- Pour la discussion qui suit, il est commode d'introduire une fonction $F(u)$ qui caractérise l'ensemble des cohérences quantiques entre tous les couples de points x', x'' tels que $x' - x'' = u$. Pour cela, définissons les nouvelles variables x, u à partir de x', x''

$$x = \frac{1}{2}(x' + x'') \quad u = x' - x'' \quad (5.4)$$

ce qui entraîne

$$x' = x + \frac{u}{2} \quad x'' = x - \frac{u}{2} \quad (5.5)$$

et donc

$$\rho(x', x'') = \langle x' | \rho | x'' \rangle = \langle x + \frac{u}{2} | \rho | x - \frac{u}{2} \rangle \quad (5.6)$$

Par définition, nous posons

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle x + \frac{u}{2} | \rho | x - \frac{u}{2} \rangle \quad (5.7)$$

$F(u)$ est la somme de toutes les cohérences quantiques entre couples de points séparés par une distance donnée u , que nous pouvons encore appeler "cohérence spatiale globale à une distance u ".

- Les kets $|x\rangle$ sont les kets propres de l'opérateur position X
 $X|x\rangle = x|x\rangle$ (5.8)

Considérons aussi les kets propres $|p\rangle$ de l'opérateur impulsion P
 $P|p\rangle = p|p\rangle$ (5.9)

reliés aux précédents par la relation
 $\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$ (5.10)

Dans (5.7) insérons 2 fois, entre $\langle x + \frac{u}{2}|$ et p et entre p et $|x - \frac{u}{2}\rangle$, la relation de fermeture
 $\int_{-\infty}^{+\infty} dp |p\rangle\langle p| = \mathbb{1}$ (5.11)

relative à la base orthonormée $\{|p\rangle\}$. Il vient
 $\mathcal{F}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dp' \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle x + \frac{u}{2}|p\rangle \langle p|p'\rangle \langle p'|x - \frac{u}{2}\rangle$ (5.12)

L'équation (5.10) donne alors
 $\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dp' \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i(p-p')\frac{x}{\hbar}} e^{i(p+p')\frac{u}{2\hbar}} \langle p|p'\rangle$ (5.13)

L'intégrale sur x fait apparaître $\delta(p-p')$
 $\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i(p-p')\frac{x}{\hbar}} = \delta(p-p')$ (5.14)

de sorte qu'on obtient finalement, après intégration sur p'
 $\mathcal{F}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \mathcal{P}(p) e^{ipu/\hbar}$ (5.15)

où
 $\mathcal{P}(p) = \langle p|p|p\rangle$ (5.16)

est la fonction de distribution de l'impulsion. Il apparaît ainsi que la cohérence spatiale globale à la distance u est la transformée de Fourier, à la valeur u , de la fonction de distribution de l'impulsion.

c - Allure de $\mathcal{F}(u)$ et $\mathcal{P}(p)$ pour une particule se trouvant dans une superposition linéaire ou un mélange statistique de 2 paquets d'ondes bien séparés spatialement

Fonction d'onde en représentation x

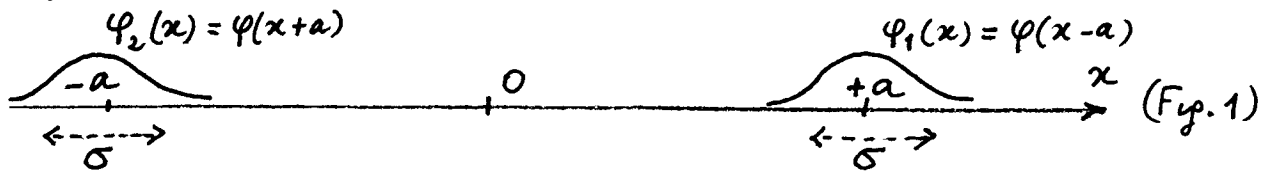
- Considérons tout d'abord un paquet d'ondes décrit par la fonction d'onde réelle $\varphi(x)$, centrée en $x=0$, de largeur $\Delta x = \sigma$
 La fonction

$$\varphi_1(x) = \varphi(x-a) \quad (5.17)$$

est obtenue par translation de $\varphi(x)$ d'une quantité a le long de Ox (la valeur de φ_1 en x est égale à la valeur de φ au point $x-a$ qui vient en x après une telle translation). De même, la fonction

$$\varphi_2(x) = \varphi(x+a) \quad (5.18)$$

est la fonction obtenue à partir de $\varphi(x)$ après une translation $-a$



Les 2 paquets d'ondes sont bien séparés spatialement si $a \gg \sigma$ V-3
(5.19)

- Dans ce qui suit, nous considérons soit la superposition linéaire $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(x) - \varphi_2(x)] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi(x-a) - \varphi(x+a)]$ (5.20)

soit le mélange statistique des états $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ avec des poids $1/2$

$$\rho = \frac{1}{2} |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + \frac{1}{2} |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| \quad (5.21)$$

Fonctions d'onde en représentation p

- Soit $\bar{\varphi}(p)$ la transformée de Fourier de $\varphi(x)$

$$\bar{\varphi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ipx/\hbar} \varphi(x) \quad (5.22)$$

C'est une fonction de largeur $\Delta p \sim \hbar/\Delta x \sim \hbar/\sigma$

- La transformée de Fourier $\bar{\varphi}_1(p)$ de $\varphi_1(x) = \varphi(x-a)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ipx/\hbar} \varphi(x-a) = \frac{e^{-ipa/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' e^{-ipx'/\hbar} \varphi(x') \\ &= e^{-ipa/\hbar} \bar{\varphi}(p) \end{aligned} \quad (5.23)$$

On a posé $x' = x - a$ et utilisé (5.22). Un calcul analogue donne pour la transformée de Fourier $\bar{\varphi}_2(p)$ de $\varphi_2(x) = \varphi(x+a)$

$$\bar{\varphi}_2(p) = e^{ipa/\hbar} \bar{\varphi}(p) \quad (5.24)$$

- On en déduit que la fonction d'onde $\bar{\Psi}(p)$ en représentation p associée à (5.20) s'écrit

$$\bar{\Psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-ipa/\hbar} - e^{ipa/\hbar}] \bar{\varphi}(p) = -i\sqrt{2} \sin \frac{pa}{\hbar} \bar{\varphi}(p) \quad (5.25)$$

Allure de la distribution d'impulsions $\mathcal{P}(p)$

- Pour la superposition linéaire d'états (5.20), c'est le carré du module de (5.25)

$$\mathcal{P}(p) = 2 \sin^2 \frac{pa}{\hbar} |\bar{\varphi}(p)|^2 \quad (5.26)$$

$|\bar{\varphi}(p)|^2$ est une fonction de largeur de l'ordre de \hbar/σ . Les oscillations de $\sin^2 \frac{pa}{\hbar}$, de période $\pi\hbar/a$, sont beaucoup plus rapides compte tenu de (5.19). Nous obtenons ainsi pour $\mathcal{P}(p)$ une figure analogue à une figure d'interférence avec des franges resserrées, dont l'enveloppe, plus large, a l'allure d'une courbe de diffraction (voir Fig 2.2)

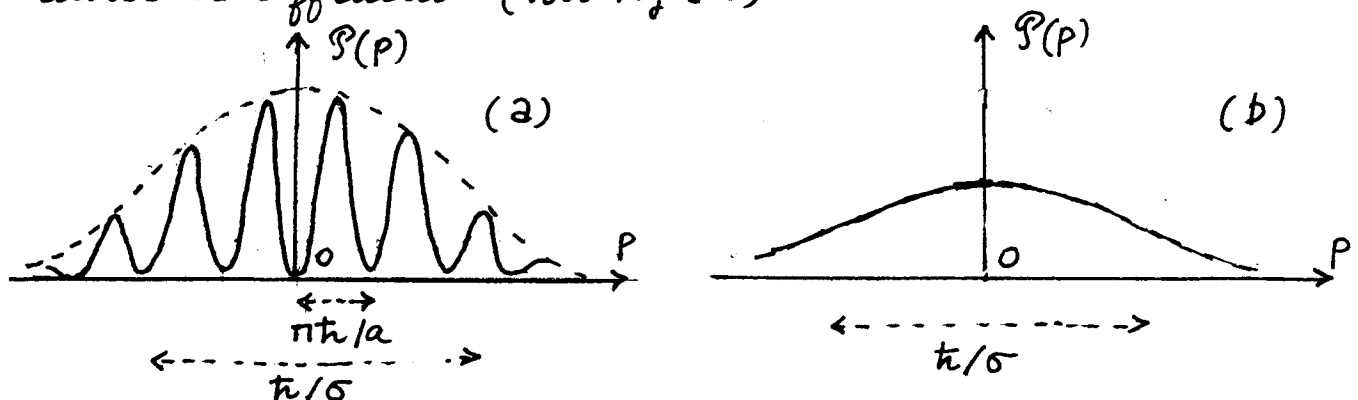


Fig. 2 : Allure de $\mathcal{P}(p)$ pour la superposition linéaire d'états (5.20) [Fig. a] et pour le mélange statistique (5.21) [Fig. b]

- Pour le mélange statistique d'états (5.21), $\mathcal{P}(p)$ est donné V-4
 par la somme de $|\bar{\varphi}_1(p)|^2$ et $|\bar{\varphi}_2(p)|^2$ avec des poids $1/2$. On a
 donc dans ce cas

$$\mathcal{P}(p) = |\bar{\varphi}(p)|^2 \quad (5.27)$$

L'allure correspondante de $\mathcal{P}(p)$ est représentée sur la figure 2.6
 Les ondulations présentes sur la figure (2.2) et absentes sur la
 figure (2.6) traduisent donc l'existence d'une cohérence spatiale
 entre les 2 paquets d'ondes.

Allure de la fonction $\mathcal{F}(u)$

- D'après (5.7), on a pour la superposition linéaire d'états (5.20)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi(x + \frac{u}{2}) \psi^*(x - \frac{u}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\varphi_1(x + \frac{u}{2}) \varphi_1(x - \frac{u}{2}) + \varphi_2(x + \frac{u}{2}) \varphi_2(x - \frac{u}{2}) - \right. \\ &\quad \left. - \varphi_1(x + \frac{u}{2}) \varphi_2(x - \frac{u}{2}) - \varphi_2(x + \frac{u}{2}) \varphi_1(x - \frac{u}{2}) \right] \end{aligned} \quad (5.28)$$

On en déduit pour $\mathcal{F}(u)$ l'allure représentée sur la figure (3.2)
 Notons que $\mathcal{F}(0) = 1$ (normalisation de ψ) et que $\mathcal{F}(\pm 2a) \simeq -1/2$
 (orthonormalisation de φ_1 et φ_2). On voit sur $\mathcal{F}(u)$ 3 structures de
 largeur de l'ordre de σ : l'une centrée en $u = 0$, correspondant à
 la longueur d'onde de cohérence de chaque paquet d'ondes, les
 2 autres, centrées en $u = +2a$ et $u = -2a$, correspondant à la
 cohérence entre les 2 paquets d'ondes

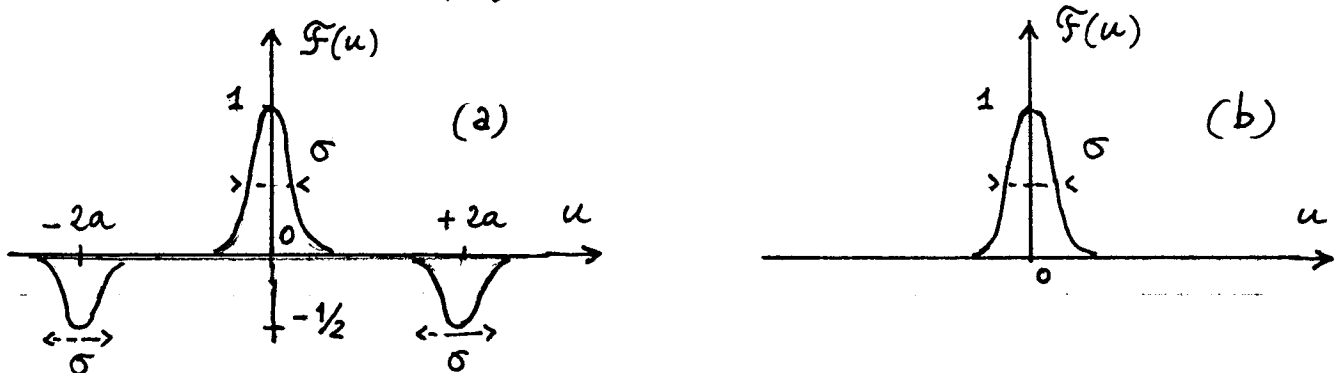


Fig. 3 : Allure de $\mathcal{F}(u)$ pour la superposition linéaire d'états
 (5.20) [Fig. 2] et pour le mélange statistique (5.21) [Fig. b]

- Pour le mélange statistique (5.21), on a

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\varphi_1(x + \frac{u}{2}) \varphi_1(x - \frac{u}{2}) + \varphi_2(x + \frac{u}{2}) \varphi_2(x - \frac{u}{2}) \right] \quad (5.29)$$

On n'a plus qu'une seule structure, centrée en $u = 0$, et de
 largeur σ [Fig. 3.b].

d. Interprétation physique de la vitesse de destruction des cohérences spatiales.

- D'après (5.1), la cohérence spatiale entre 2 paquets d'ondes
 distants de $2a$ est détruite avec un temps

$$\frac{1}{T_{rel}(2a)} = \frac{4D a^2}{\hbar^2} \quad (5.30)$$

$T_{rel}(2a)$ est le temps de relaxation de la cohérence spatiale

entre 2 points distants de $2a$.

- Pour interpréter physiquement (5.30), il suffit de comprendre comment les collisions de la particule lourde avec les particules légères qui l'environnent font passer la distribution de la particule lourde de la forme représentée sur la figure (2.2) à celle représentée sur la figure (2.6).

Chacune de ces collisions change l'impulsion de la particule lourde d'une quantité qui change aléatoirement d'une collision à l'autre. Dans l'espace des impulsions, l'impulsion de la particule lourde effectue une marche au hasard caractérisé par le coefficient de diffusion D défini en (5.2) et (5.3). Si à $t=0$, la fonction de distribution de l'impulsion est une fonction delta $\delta(p-p_0)$, on s'attend à ce qu'elle devienne, un instant Δt après, une fonction de largeur non nulle Δp , donnée par $(\Delta p)^2 = 2D \Delta t$.

Or, la fonction $\mathcal{P}(p)$ de la figure (2.2) peut être considérée comme le produit de convolution de $\delta(p-p_0)$ et $\mathcal{P}(p_0)$

$$\mathcal{P}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \mathcal{P}(p_0) \delta(p-p_0) \quad (5.31)$$

Nous verrons plus loin que l'équation d'évolution de $\mathcal{P}(p)$ est linéaire. Si on part à $t=0$ de (5.31), comme chaque fonction $\delta(p-p_0)$ a acquis une certaine largeur Δp après un temps Δt , on s'attend à ce que l'effet des collisions soit de remplacer le produit de convolution (5.31) par un autre

$$\mathcal{P}(p, \Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \mathcal{P}(p_0) g(p-p_0, \Delta t) \quad (5.32)$$

où $g(p-p_0, \Delta t)$ est une fonction centrée en p_0 , de largeur Δp telle que $(\Delta p)^2 = 2D \Delta t$.

Les oscillations de période $\pi \hbar / a$ présentes dans $\mathcal{P}(p, t=0)$ auront donc disparu quand la largeur de la fonction $g(p-p_0, \Delta t)$ figurant dans (5.32) deviennent de l'ordre de cette période $\pi \hbar / a$. Les "creux" de la figure (2.2) sont alors "remplis" le temps de relaxation $T_{rel}(2a)$ de la cohérence spatiale entre les 2 paquets d'ondes est donc défini par $(\Delta p)^2 = 2D \Delta t$ avec $\Delta p = \pi \hbar / a$ et $\Delta t = T_{rel}(2a)$, ce qui donne

$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{a^2} \sim 2D T_{rel}(2a) \quad (5.33)$$

soit encore

$$\frac{1}{T_{rel}(2a)} \sim \frac{2Da^2}{\pi^2 \hbar^2} \quad (5.34)$$

On retrouve bien à un coefficient près (5.30). Le raisonnement précédent permet ainsi de comprendre polynomiquement pourquoi $1/T_{rel}(2a)$ est proportionnel au carré a^2 de la distance entre les 2 paquets d'ondes et au coefficient de diffusion D de l'impulsion de la particule.

La formule (5.1) laisse penser que $T_{el}(2a)$ devient infiniment court quand $|x' - x''| \rightarrow \infty$. Il ne faut pas oublier cependant les approximations sur lesquelles repose la démonstration de (5.1).

Nous avons en effet supposé que $|x' - x''| \ll \lambda_0$ où λ_0 est la longueur d'onde de de Broglie des particules légères entrant en collision avec la particule lourde (voir formule (4.14)). Si $|x' - x''| \gtrsim \lambda_0$, il suffit d'une seule collision pour détruire la cohérence spatiale entre x' et x'' . Le temps de relaxation de $\langle x' | \rho | x'' \rangle$ est alors le temps moyen séparant 2 collisions successives subies par la particule lourde.

e - les phénomènes négligés dans la discussion précédente

- Nous nous sommes limités dans ce qui précède aux effets d'ordre le plus bas en $1/M$. Nous avons donc négligé
 - (i) le vol libre de la particule lourde. Ce phénomène provoque, en l'absence de collisions, un étalement du paquet d'ondes. Ce phénomène change-t-il la portée des cohérences spatiales?
 - (ii) la friction associée au changement de la vitesse de la particule lourde lors des collisions. Ce phénomène tend à réduire la largeur Δp de $P(p)$ et augmente donc ~~aussi~~ la portée des cohérences spatiales.
- Pour compléter l'étude de ce chapitre, il faut donc résoudre un certain nombre de problèmes
 - (i) Etablir l'équation cinétique quantique décrivant l'évolution de l'opérateur densité de la particule lourde et tenant compte de l'effet des divers processus : vol libre, friction, diffusion.
Etudier en particulier les diverses formes de cette équation cinétique suivant la représentation choisie pour l'opérateur densité
 - (ii) Résoudre cette équation cinétique et comprendre l'évolution temporelle des cohérences spatiales sous l'effet combiné des divers processus.
- Nous allons laisser de côté pour le moment le problème (i) et admettre le résultat suivant qui sera démontré dans un chapitre ultérieur sur un modèle simple de mouvement Brownien (modèle de Caldeira-Leggett) : l'équation du mouvement de la représentation de Wigner de l'opérateur densité est une équation de Fokker-Planck.
Après quelques rappels sur la représentation de Wigner (voir appendice ci-joint), nous montrons dans le chapitre suivant comment il est possible de résoudre l'équation cinétique, et de comprendre les modifications introduites par le vol libre et la friction sur l'évolution des cohérences.

① - Fonction caractéristique $C(u, v)$ associée à l'opérateur densité ρ

Définition A ρ on associe une fonction de 2 variables réelles

$$\rho \rightarrow C(u, v) = \text{Tr} \left\{ e^{i(uP + vX)/\hbar} \rho \right\} \quad (5.35)$$

X et P : opérateurs positions et impulsions de la particule (à 1 dimension)
 u a les dimensions d'une position, v celles d'une impulsion

Coefficients du développement de $C(u, v)$ en puissances de u et v

- Développons en série l'exponentielle de (5.35). Le coefficient de $u^2 v$ s'écrit

$$C(u, v) = \dots + u^2 v \left(\frac{i}{\hbar}\right)^3 \frac{1}{3!} \text{Tr} \left\{ (P^2 X + P X P + X P^2) \rho \right\} + \dots \quad (5.36)$$

- On en déduit

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \Big|_{u=v=0} = \frac{1}{3} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \langle P^2 X + P X P + X P^2 \rangle + \dots \quad (5.37)$$

$C(u, v)$ est donc bien adaptée au calcul des valeurs moyennes des fonctions symétrisées de X et P

Fonctions caractéristiques associées à $X\rho, \rho X, P\rho, \rho P$

- Comme uP et vX commutent avec $[uP, vX] = -i\hbar uv$, on peut utiliser l'identité de Glauber $\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B) \exp(-\frac{1}{2}[A, B])$

$$e^{i(uP + vX)/\hbar} = e^{-iuv/2\hbar} e^{iuP/\hbar} e^{ivX/\hbar} = e^{iuv/2\hbar} e^{ivX/\hbar} e^{iuP/\hbar} \quad (5.38)$$

- On en déduit par dérivation (en posant $\partial_u = \partial/\partial u$)

$$\partial_u e^{i(uP + vX)/\hbar} = \frac{i}{\hbar} \left(P - \frac{v}{2}\right) e^{i(uP + vX)/\hbar} = \frac{i}{\hbar} e^{i(uP + vX)/\hbar} \left(P + \frac{v}{2}\right) \quad (5.39)$$

En multipliant par ρ à droite, en prenant la trace, et en utilisant l'invariance d'une trace dans une permutation circulaire, on montre que, si $C(u, v)$ est la fonction caractéristique de ρ , $\partial_u C(u, v)$ est celle de $(i/\hbar) \rho (P - \frac{v}{2})$ ou de $(i/\hbar) (P + \frac{v}{2}) \rho$.

$$\rho \rightarrow C(u, v) \quad \frac{i}{\hbar} \rho \left(P - \frac{v}{2}\right) \rightarrow \partial_u C(u, v) \quad \frac{i}{\hbar} \left(P + \frac{v}{2}\right) \rho \rightarrow \partial_u C(u, v) \quad (5.40)$$

$$\text{Si } \rho \rightarrow C(u, v) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho P \rightarrow \left(\frac{v}{2} - i\hbar \partial_u\right) C(u, v) \\ P \rho \rightarrow -\left(\frac{v}{2} + i\hbar \partial_u\right) C(u, v) \end{array} \right. \quad (5.41.a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho P \rightarrow \left(\frac{v}{2} - i\hbar \partial_u\right) C(u, v) \\ P \rho \rightarrow -\left(\frac{v}{2} + i\hbar \partial_u\right) C(u, v) \end{array} \right\} \quad (5.41.b)$$

Des calculs analogues donnent, après dérivation de (5.38) par rapport à v

$$\text{Si } \rho \rightarrow C(u, v) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho X \rightarrow -\left(\frac{u}{2} + i\hbar \partial_v\right) C(u, v) \\ X \rho \rightarrow \left(\frac{u}{2} - i\hbar \partial_v\right) C(u, v) \end{array} \right. \quad (5.41.c)$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho X \rightarrow -\left(\frac{u}{2} + i\hbar \partial_v\right) C(u, v) \\ X \rho \rightarrow \left(\frac{u}{2} - i\hbar \partial_v\right) C(u, v) \end{array} \right\} \quad (5.41.d)$$

② Représentation de Wigner $w(x, p)$ associée à ρ

Définition $w(x, p)$ est la transformée de Fourier de $C(u, v)$

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x, p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iint du dv e^{-i(ux + vp)/\hbar} C(u, v) \\ C(u, v) = \iint dx dp e^{i(ux + vp)/\hbar} w(x, p) \end{array} \right. \quad (5.42.a)$$

$$\left. \begin{array}{l} w(x, p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iint du dv e^{-i(ux + vp)/\hbar} C(u, v) \\ C(u, v) = \iint dx dp e^{i(ux + vp)/\hbar} w(x, p) \end{array} \right\} \quad (5.42.b)$$

D'après (5.35), $C(u=0, v=0) = \text{Tr} \rho = 1$. On déduit alors de (5.42.b)

$$C(u, v) \Big|_{u=v=0} = \iint dx dp w(x, p) = 1 \quad (5.43)$$

Par dérivation de (5.42.a) par rapport à x, p , ou de (5.42.b) par

rapport à u, v , on obtient

$$\text{Si } C(u, v) \leftrightarrow w(x, p) \rightarrow \begin{cases} u C(u, v) \leftrightarrow i\hbar \partial_p w(x, p) & (5.44.a) \\ v C(u, v) \leftrightarrow i\hbar \partial_x w(x, p) & (5.44.b) \\ \partial_u C(u, v) \leftrightarrow (ip/\hbar) w(x, p) & (5.44.c) \\ \partial_v C(u, v) \leftrightarrow (ix/\hbar) w(x, p) & (5.44.d) \end{cases}$$

Expression des valeurs moyennes des produits symétrisés de X et P

- D'après (5.43) et (5.44)

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \Big|_{u=v=0} = \iint dx dp \left(\frac{ip}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{ix}{\hbar}\right) e^{i(uv+vx)/\hbar} w(x, p) \Big|_{u=v=0} \quad (5.45)$$

On en déduit, par comparaison avec (5.37)

$$\frac{1}{3} \langle P^2 X + P X P + X P^2 \rangle = \iint dx dp p^2 x w(x, p) \quad (5.46)$$

- D'après (5.43) et (5.46), $w(x, p)$ se comporte comme une densité de probabilité normée permettant de calculer les valeurs moyennes de produits symétrisés de puissances de X et P

En fait, $w(x, p)$ peut prendre des valeurs négatives et des formules aussi simples que (5.46) n'existent pas pour des produits non symétrisés de puissances de X et P. $w(x, p)$ est en fait une densité de quasi-probabilité.

Représentations de Wigner associées à $X\rho, \rho X, P\rho, \rho P$

En combinant (5.41) et (5.44), on obtient

$$\text{Si } \rho \rightarrow w(x, p), \quad \begin{cases} P\rho \rightarrow (i\frac{\hbar}{2} \partial_x + p) w(x, p) & (5.47.a) \\ \rho P \rightarrow (-i\frac{\hbar}{2} \partial_x + p) w(x, p) & (5.47.b) \\ \rho X \rightarrow (-i\frac{\hbar}{2} \partial_p + x) w(x, p) & (5.47.c) \\ X\rho \rightarrow (i\frac{\hbar}{2} \partial_p + x) w(x, p) & (5.47.d) \end{cases}$$

③ Lien avec la représentation $\{|x\rangle\}$

Définition de $F(x, u)$

C'est la transformée de Fourier de $w(x, p)$ par rapport à p , ou encore celle de $C(u, v)$ par rapport à v

$$F(x, u) = \int dp e^{ipu/\hbar} w(x, p) \quad (5.48)$$

En utilisant (5.42.a), on obtient

$$\begin{aligned} F(x, u) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iiint dp du' dv e^{ip(u-u')/\hbar} e^{-ivx/\hbar} C(u', v) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{-ivx/\hbar} C(u, v) \end{aligned} \quad (5.49)$$

Lien avec les éléments de matrice de ρ en représentation $\{|x\rangle\}$

En reportant (5.35) et (5.38) dans (5.49), on obtient

$$\begin{aligned} F(x, u) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{-ivx/\hbar} e^{iuv/2\hbar} \text{Tr} \left\{ e^{ivX/\hbar} e^{iuP/\hbar} \rho \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dv dx' e^{i\frac{v}{\hbar}(\frac{u}{2}-x)} \langle x' | e^{ivX/\hbar} e^{iuP/\hbar} \rho | x' \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dv dx' e^{i\frac{v}{\hbar}(\frac{u}{2}-x+x')} \langle x' | e^{iuP/\hbar} \rho | x' \rangle \end{aligned} \quad (5.50)$$

En utilisant $\frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{\frac{iv}{\hbar}(x'-x+\frac{u}{2})} = \delta(x'-(x-\frac{u}{2}))$ (V-9)
(5.51)

et $e^{-iuP/\hbar} |x'\rangle = |x'+u\rangle$ $\langle x'|e^{iuP/\hbar} = \langle x'+u|$ (5.52)

on obtient

$$F(x, u) = \langle x + \frac{u}{2} | \rho | x - \frac{u}{2} \rangle \quad (5.53)$$

ce qui entraîne, par inversion de (5.48), une autre forme très utilisée de la représentation de Wigner

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int du e^{-ipu/\hbar} \langle x + \frac{u}{2} | \rho | x - \frac{u}{2} \rangle \quad (5.54)$$

Cohérence globale en position à une distance u

Compte tenu de (5.49), on obtient

$$\mathcal{F}(u) = \int dx F(x, u) = C(u, v=0) \quad (5.55)$$

Distribution de probabilité pour la position

Toujours compte tenu de (5.49) on obtient

$$\mathcal{R}(x) = \langle x | \rho | x \rangle = F(x, u=0) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{-ivx/\hbar} C(u=0, v) \quad (5.56)$$

④ Lien avec la représentation $\{|p\rangle\}$

Calculs très analogues à ceux du § 3. On donne juste les résultats

Fonction $G(p, v)$

$$G(p, v) = \int dx e^{ixv/\hbar} w(x, p) \quad (5.57)$$

$$G(p, v) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int du e^{-ipu/\hbar} C(u, v) \quad (5.58)$$

Lien avec les éléments de matrice de ρ en représentation $\{|p\rangle\}$

$$G(p, v) = \langle p + \frac{v}{2} | \rho | p - \frac{v}{2} \rangle \quad (5.59)$$

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{-ixv/\hbar} \langle p + \frac{v}{2} | \rho | p - \frac{v}{2} \rangle \quad (5.60)$$

Cohérence globale en impulsion à une distance v

$$\mathcal{G}(v) = \int dp G(p, v) = C(u=0, v) \quad (5.61)$$

Distribution de probabilité pour l'impulsion

$$\mathcal{P}(p) = \langle p | \rho | p \rangle = G(p, v=0) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int du e^{-ipu/\hbar} C(u, v=0) \quad (5.62)$$

Références pour cet appendice

Voir cours VII du cours 83-84