

24.1.89

Etude d'un exemple simple

III-1

Effet de l'émission spontanée d'un photon sur les cohérences quantiques de l'atome émetteur (suite)

④ Etat initial du centre de masse : superposition linéaire de 2 paquets d'ondes bien séparés spatialement.

a) Description de l'état initial $|\psi\rangle$

Etat $|\psi_1\rangle$

$$|\psi_1\rangle = \sum_{\vec{K}} c_1(\vec{K}) |b, \vec{K}; 0\rangle = |b\rangle \otimes \sum_{\vec{K}} c_1(\vec{K}) |\vec{K}\rangle \otimes |0\rangle \quad (3.1)$$

Atome excité dans l'état $|b\rangle$ - Vide de photons $|0\rangle$

Centre de masse dans l'état

$$|\varphi_1\rangle = \sum_{\vec{K}} c_1(\vec{K}) |\vec{K}\rangle \quad (3.2)$$

- On suppose $|\varphi_1(\vec{r})|^2 = |\langle \vec{r} | \varphi_1 \rangle|^2$ centré autour d'un point \vec{r}_1 dans un volume d'extension linéaire

$$\Delta r = \sigma \quad (3.3)$$

De même, $|\varphi_1(\vec{p})|^2 = |\langle \vec{p} | \varphi_1 \rangle|^2 = |c_1(\vec{K})|^2$ (avec $\vec{p} = \hbar \vec{K}$) est supposé centré on $\vec{p} = \vec{0}$, dans un volume d'extension linéaire

$$\Delta p \simeq \frac{\hbar}{\sigma} \quad (3.4)$$

Etat $|\psi_2\rangle$

- Même état que $|\psi_1\rangle$, l'état du centre de masse étant translaté de \vec{p}

$$|\psi_2\rangle = |b\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \otimes |0\rangle \quad (3.5)$$

$$|\varphi_2\rangle = e^{-i\vec{P}\cdot\vec{p}/\hbar} |\varphi_1\rangle \quad (3.6)$$

où \vec{P} est l'opérateur impulsion du centre de masse. On a donc

$$|\varphi_2\rangle = \sum_{\vec{K}} c_2(\vec{K}) |\vec{K}\rangle \quad \text{avec} \quad c_2(\vec{K}) = c_1(\vec{K}) e^{-i\vec{K}\cdot\vec{p}} \quad (3.7)$$

- Il s'ensuit que $|\varphi_2(\vec{r})|^2 = |\langle \vec{r} | \varphi_2 \rangle|^2$ est centré autour de

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{p} \quad (3.8)$$

en ayant la même forme de $|\varphi_1(\vec{r})|^2$, et que $|\varphi_2(\vec{p})|^2 = |\varphi_1(\vec{p})|^2$

Etat initial $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \lambda_1 |\psi_1\rangle + \lambda_2 |\psi_2\rangle \quad (3.9)$$

- Atome excité, dans le vide de photons. Etat du centre de masse superposition linéaire de 2 paquets d'ondes identiques centrés en \vec{r}_1 et \vec{r}_2

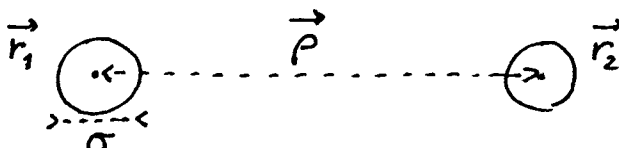


Fig. 1

On suppose les 2 paquets d'ondes bien séparés

$$|\vec{p}| \gg \sigma$$

(3.10)

- Distribution de \vec{r} et \vec{p} dans l'état

$$|\varphi\rangle = \lambda_1 |\varphi_1\rangle + \lambda_2 |\varphi_2\rangle \quad (3.11)$$

Comme les paquets d'ondes sont bien séparés, $\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle = 0$ et

$$|\varphi(\vec{r})|^2 = |\lambda_1|^2 |\varphi_1(\vec{r})|^2 + |\lambda_2|^2 |\varphi_2(\vec{r})|^2 \quad (3.12)$$

D'après (3.2), (3.7) et (3.11)

$$\begin{aligned} |\langle \vec{p} | \varphi \rangle|^2 &= |\langle \vec{p} = \hbar \vec{k} | \varphi \rangle|^2 = |\lambda_1 c_1(\vec{k}) + \lambda_2 c_2(\vec{k})|^2 \\ &= |c_1(\vec{k})|^2 |\lambda_1 + \lambda_2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}|^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Oscillations en $\vec{p} = \hbar \vec{k}$, de période \hbar/p , dues à l'interférence entre les 2 paquets d'ondes.

b) Hypothèse simplificatrice sur l'état initial.

- On suppose que l'effet Doppler $\Delta \nu_D$, lié à la distribution initiale des valeurs de p autour de $p=0$, est très petit devant la largeur naturelle Γ de l'état supérieur b .

$$\Delta \nu_D = \frac{k \Delta p}{M} = \frac{\hbar k \Delta k}{M} \ll \Gamma \quad (3.14)$$

- On peut alors négliger, dans les dénominateurs d'énergie apparaissant dans les coefficients (2.27) du développement de $|\psi(t)\rangle$, les termes $\hbar \vec{k} \cdot \vec{k} / M$ (effet Doppler) devant Γ

$$\frac{1}{\omega - \tilde{\omega}_0 - \hbar \frac{\vec{k} \cdot \vec{k}}{M} + i \frac{\Gamma}{2}} \approx \frac{1}{\omega - \tilde{\omega}_0 + i \frac{\Gamma}{2}} \quad (3.15)$$

- Condition sur la largeur σ de chaque paquet d'ondes

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\sigma} \rightarrow \Delta \nu_D \sim \frac{\hbar k_0}{M \sigma}$$

$$\Delta \nu_D \ll \Gamma \rightarrow \frac{\hbar k_0}{M \sigma} \ll \Gamma \rightarrow \frac{\hbar k_0}{M \Gamma} \ll \sigma \rightarrow \frac{\hbar^2 k_0^2 / 2M}{\hbar \Gamma} \ll k_0 \sigma$$

$$\hookrightarrow \lambda_0 \frac{E_{excit}}{\hbar \Gamma} \ll \sigma \quad \text{ou} \quad \lambda_0 = \frac{1}{k_0} \quad (3.16)$$

- Comme pour la plupart des transitions permises

$$E_{excit} \ll \hbar \Gamma \quad (3.17)$$

on peut choisir

$$\lambda_0 \frac{E_{excit}}{\hbar \Gamma} \ll \sigma \ll \lambda_0 \quad (3.18)$$

Chaque paquet d'ondes a une largeur spatiale σ très petite devant la longueur d'ondes $\lambda_0 \sim 1/k_0$ de la transition $a \leftrightarrow b$, mais cette largeur peut être suffisamment grande devant $\lambda_0 E_{excit} / \hbar \Gamma$ pour qu'on puisse négliger tout effet Doppler et utiliser (3.15).

c) Etat final du système global

Etat final atteint à partir de $|\varphi_1\rangle$

D'après (2.23), (2.24), et compte tenu de (2.27) et (3.15), l'état final du système partant à $t=0$ de l'état $|\varphi_1\rangle$ écrit en (3.1) est donné, pour $t \gg \Gamma^{-1}$, par :

$$|\Psi_1(t)\rangle = |a\rangle \otimes \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} c_1(\vec{k}) \frac{v/\hbar}{\omega - \tilde{\omega}_0 + i\frac{\Gamma}{2}} |\vec{k} - \vec{k}'\rangle \otimes |\vec{k}'\rangle e^{i[E_a + \hbar\omega + \frac{\hbar^2(\vec{k}-\vec{k}')^2}{2M}] \frac{t}{\hbar}} \quad (3.19)$$

C'est un état qui évolue librement (sous l'effet du seul hamiltonien non perturbé H_0) et qui semble provenir de l'état initial

$$|\Psi_1(0)\rangle = |a\rangle \otimes \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} c_1(\vec{k}) \frac{v/\hbar}{\omega - \tilde{\omega}_0 + i\frac{\Gamma}{2}} |\vec{k} - \vec{k}'\rangle \otimes |\vec{k}'\rangle \quad (3.20)$$

- Introduisons l'opérateur qui translate de $-\hbar\vec{k}$ l'impulsion $\hbar\vec{k}'$ du centre de masse

$$|\vec{k} - \vec{k}'\rangle = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}} |\vec{k}'\rangle \quad (3.21)$$

où \vec{R} est l'opérateur position du centre de masse. L'identité (3.21) permet d'écrire (3.20) sous la forme

$$\begin{aligned} |\Psi_1(0)\rangle &= |a\rangle \otimes \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}} \frac{v/\hbar}{\omega - \tilde{\omega}_0 + i\frac{\Gamma}{2}} \sum_{\vec{k}'} c_1(\vec{k}') |\vec{k}'\rangle \otimes |\vec{k}'\rangle \\ &= |a\rangle \otimes \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}} \frac{v/\hbar}{\omega - \tilde{\omega}_0 + i\frac{\Gamma}{2}} |\varphi_1\rangle \otimes |\vec{k}\rangle \end{aligned} \quad (3.22)$$

On a utilisé (3.2)

- Utilisons enfin le fait que la fonction d'onde $\langle \vec{r} | \varphi_1 \rangle$ associée à $|\varphi_1\rangle$ n'est différente de zéro que sur un intervalle de largeur σ autour de \vec{r}_1 . Comme par hypothèse $\sigma \ll \lambda_0$ et que donc $k\sigma \ll 1$, on peut écrire $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}} = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_1} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{R}-\vec{r}_1)}$ et remplacer par 1 la 2^{ème} exponentielle qui est de l'ordre de $e^{-ik\sigma} \sim 1$

$$|\Psi_1(0)\rangle = |a\rangle \otimes \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_1} \frac{v/\hbar}{\omega - \tilde{\omega}_0 + i\frac{\Gamma}{2}} |\varphi_1\rangle \otimes |\vec{k}\rangle \quad (3.23)$$

Etat final atteint à partir de $|\Psi_2\rangle$

Un raisonnement analogue montre que si le système global part de l'état (3.5), il aboutit au bout d'un temps $t \gtrsim \Gamma^{-1}$ dans un état $|\Psi_2(t)\rangle$ qui évolue librement et qui semble provenir de l'état

$$|\Psi_2(0)\rangle = |a\rangle \otimes \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_2} \frac{v/\hbar}{\omega - \tilde{\omega}_0 + i\frac{\Gamma}{2}} |\varphi_2\rangle \otimes |\vec{k}\rangle \quad (3.24)$$

Etat final atteint à partir de $|\Psi\rangle = \lambda_1 |\Psi_1\rangle + \lambda_2 |\Psi_2\rangle$

D'après la linéarité de l'équation de Schrödinger, c'est un état qui évolue librement et qui semble provenir de l'état initial

$$|\Psi(0)\rangle = |a\rangle \otimes \sum_{\vec{k}} \frac{v/\hbar}{\omega - \tilde{\omega}_0 + i\frac{\Gamma}{2}} [\lambda_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_1} |\varphi_1\rangle + \lambda_2 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_2} |\varphi_2\rangle] \otimes |\vec{k}\rangle \quad (3.25)$$

d) Etalement des paquets d'ondes pendant la durée Γ^{-1} de désintégration de l'état excité b

- L'état final de la désintégration ($t \gtrsim \Gamma^{-1}$) semble provenir par évolution libre de l'état (3.25). Dans l'état (3.25), la dispersion des valeurs de \vec{p} autour de $\vec{p} = 0$ est toujours de l'ordre de \hbar/σ , et \vec{r} est

toujours distribué dans 2 intervalles de largeur σ autour de \vec{r}_1 et \vec{r}_2 . L'évolution libre entre $t=0$ et $t=\text{quelques } \Gamma^{-1}$ "étale les paquets d'ondes" d'une quantité

$$\Delta r \sim \frac{\Delta p}{M} \Gamma^{-1} \sim \frac{\hbar}{M\sigma} \Gamma^{-1} \quad (3.26)$$

- On pourra négliger cet étalement devant la largeur des pics de la distribution de \vec{r} si

$$\frac{\hbar}{M\sigma} \Gamma^{-1} \ll \sigma \quad (3.27)$$

c'est à dire si

$$\frac{\hbar}{M\Gamma} \ll \sigma^2 \rightarrow \lambda_0^2 \frac{E_{\text{rec}}}{\hbar\Gamma} \ll \sigma^2 \quad (3.28)$$

- Nous supposons dans la suite

$$\lambda_0 \left[\frac{E_{\text{rec}}}{\hbar\Gamma} \right]^{1/2} \ll \sigma \ll \lambda_0 \quad (3.29)$$

Cette condition, qui est plus restrictive que (3.18), permet à la fois de prendre des paquets d'ondes de largeur très petite devant λ_0 , et de négliger l'effet Doppler et l'étalement des paquets d'ondes pendant la disintégration de l'état b . En particulier, on peut considérer que l'état final de la disintégration, pour t de l'ordre de quelques Γ^{-1} , est toujours donné par (3.25), puisqu'on peut négliger l'effet de l'évolution libre entre $t=0$ et $t=\Gamma^{-1}$.

$$|\Psi(t \sim \Gamma^{-1})\rangle = |a\rangle \otimes \sum_{\vec{k}} \frac{v/\hbar}{\omega - \tilde{\omega}_0 + i\frac{\Gamma}{2}} \left[\lambda_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_1} |\varphi_1\rangle + \lambda_2 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_2} |\varphi_2\rangle \right] \otimes |\vec{k}\rangle \quad (3.30)$$

- L'état (3.30) est l'état du système global, atome + photon, après la disintégration. Nous allons nous intéresser maintenant à l'état du seul atome. Pour faciliter la compréhension physique, nous allons supposer d'abord l'état final du photon parfaitement connu, puis diminuer progressivement cette information

e) Etat final de l'atome après émission d'un photon dans une direction bien définie et avec une énergie bien définie.

- On connaît l'état final $|\vec{k}_f\rangle$ du rayonnement. Par exemple, on a enregistré un événement sur un détecteur placé dans la direction \vec{k}_f/k_f et précédé d'un filtre très étroit en énergie autour de $\hbar\omega_f = \hbar ck_f$.

De tous les états de la superposition linéaire $\sum_{\vec{k}} \dots$ figurant dans (3.30), on sait donc quel est l'état sélectionné par la mesure. C'est l'état où figure $|\vec{k}_f\rangle$. L'état final du système global est alors factorisé et l'état final du centre de masse est, à une constante globale multiplicative près,

$$\lambda_1 e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}_1} |\varphi_1\rangle + \lambda_2 e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}_2} |\varphi_2\rangle \quad (3.31)$$

- Après émission d'un photon \vec{k}_f , l'état du centre de masse est toujours une superposition linéaire de 2 paquets d'ondes centrés en \vec{r}_1 et \vec{r}_2 . La cohérence quantique entre les 2 paquets d'ondes est simplement multiplié par un facteur de phase bien défini, dépendant de \vec{k}_f et $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$\lambda_1 \lambda_2^* \rightarrow \lambda_1 \lambda_2^* e^{-i\vec{k}_f\cdot(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \quad (3.32)$$

Remarque.

Que se passe-t-il si l'on tourne dans l'espace le détecteur à bande étroite, c'est à dire si l'on change \vec{k}_f/k_f sans changer $\hbar\omega_f$? En d'autres termes, la dépendance angulaire de la probabilité d'émission d'un photon d'énergie bien définie est-elle sensible à la cohérence quantique entre les 2 paquets d'ondes décrivant l'état initial du centre de masse?

Si l'on raisonne sur des ondes lumineuses de fréquence bien définie, issues soit de \vec{r}_1 , soit de \vec{r}_2 , on pourrait penser à l'existence d'interférences lumineuses avec une différence de marche égale à $\vec{k}_f \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. En fait, l'application des postulats de la mécanique quantique à ce problème indique que la probabilité d'émission d'un photon \vec{k}_f est donnée par la norme de la projection de (3.30) dans le sous-espace correspondant à $\vec{k} = \vec{k}_f$. Cette probabilité est donc égale à

$$\frac{|v|^2/\hbar^2}{(\omega_f - \tilde{\omega}_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \text{ Norme de } [\lambda_1 e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}_1} |\varphi_1\rangle + \lambda_2 e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}_2} |\varphi_2\rangle] =$$

$$\frac{|v|^2/\hbar^2}{(\omega_f - \tilde{\omega}_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} [|\lambda_1|^2 \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle + |\lambda_2|^2 \langle \varphi_2 | \varphi_2 \rangle + 2 \operatorname{Re} \lambda_1 \lambda_2^* e^{-i\vec{k}_f \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \langle \varphi_2 | \varphi_1 \rangle] \quad (3.33)$$

Comme $\langle \varphi_2 | \varphi_1 \rangle = 0$, cette probabilité ne dépend pas de $\lambda_1 \lambda_2^*$ et il n'y a donc pas d'interférences dans la probabilité d'émission.

Le calcul précédent montre d'ailleurs clairement l'erreur du raisonnement en termes d'ondes lumineuses. Ce raisonnement ignorait l'état final de l'atome. Si l'onde est issue de \vec{r}_1 , l'atome après émission est dans $|\varphi_1\rangle$ autour de \vec{r}_1 . Si l'onde est issue de \vec{r}_2 , l'atome après émission est dans $|\varphi_2\rangle$ autour de \vec{r}_2 . Comme $\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle = 0$ les 2 états finals possibles de l'atome sont orthogonaux et les "ondes" issues de \vec{r}_1 et \vec{r}_2 ne peuvent donc interférer.

f) Etat final de l'atome après émission d'un photon dans une direction bien définie, mais avec une énergie quelconque.

- On ne connaît maintenant que la direction du photon émis. Le détecteur placé dans la direction \hat{K} est un détecteur à bande très large. Il n'est pas sélectif en énergie.

- D'après les postulats de la mécanique quantique, l'état final sélectionné par la mesure est la projection de (3.30) dans le sous-espace correspondant à $\vec{k}/k = \hat{K}$ fixé. Comme les coefficients $(v/\hbar)/[\omega - \tilde{\omega}_0 + i\frac{\Gamma}{2}]$, $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_1}$, $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_2}$ dépendent de $|\vec{k}|$, cette projection ne se factorise plus en une partie atomique et une partie de rayonnement. L'état final du centre de masse est donc un mélange statistique obtenu par trace partielle sur le rayonnement. C'est un mélange statistique des états

$$\lambda_1 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_1} |\varphi_1\rangle + \lambda_2 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_2} |\varphi_2\rangle$$

correspondant à tous les vecteurs \vec{k} , de direction $\hat{K} = \vec{k}/k$ fixé et de module k quelconque, chaque état du mélange ayant pour poids $(|v|^2/\hbar^2)/[(\omega - \tilde{\omega}_0)^2 + \Gamma^2/4]$

- Après émission d'un photon d'énergie quelconque dans une direction \hat{K} donnée, la distribution des valeurs de \vec{r} présente toujours 2 pics de largeur σ autour de \vec{r}_1 et \vec{r}_2 , puisque l'étalement des paquets

d'onde est négligeable pendant le temps Γ^{-1} . Par contre la cohérence quantique entre ces 2 paquets d'ondes est la moyenne de

$$\lambda_1 \lambda_2^* e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \frac{|v|^2 / \hbar^2}{(\omega - \tilde{\omega}_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (3.34)$$

sur $\omega = ck$, \vec{k}/k étant fixé.

L'intégrale correspondante s'effectue aisément par la méthode des résidus (en étendant à $-\infty$ la borne inférieure de l'intégrale sur k , comme dans le cours II) et donne, au lieu de (3.32)

$$\lambda_1 \lambda_2^* \rightarrow \lambda_1 \lambda_2^* e^{-ik_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \cos \theta} e^{-\Gamma |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| |\cos \theta| / 2c} \quad (3.35)$$

où θ est l'angle entre \hat{k} et $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$

La cohérence entre les 2 paquets d'ondes est donc détruite si

$$\rho = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \gg \frac{c}{\Gamma |\cos \theta|} \quad (3.36)$$

Interprétation physique de (3.36)

Revenons au détecteur permettant de savoir qu'un photon a été émis dans la direction \hat{k} avec une énergie quelconque. Comme ce détecteur a une bande très large ($\Delta\omega \gg \Gamma$), il a une résolution temporelle très bonne. Il peut donc en principe permettre de déterminer le temps où le photon est détecté à beaucoup mieux que Γ^{-1} .

Or, chaque paquet d'ondes lumineuses issu, soit de \vec{r}_1 , soit de \vec{r}_2 a une longueur temporelle de l'ordre de Γ^{-1} et se propage à la vitesse c . Si $\cos \theta = 1$ et si $\rho \gg \frac{c}{\Gamma}$, les 2 paquets d'ondes issus de \vec{r}_1 et \vec{r}_2 ne se recouvrent pas. En détectant le temps d'arrivée du photon à mieux que Γ^{-1} , on peut donc savoir en principe si le photon détecté est issu de \vec{r}_1 ou \vec{r}_2 , ce qui détruit toute cohérence entre les 2 états finals possibles de l'atome en \vec{r}_1 et \vec{r}_2 .

Par contre, si le détecteur est précédé d'un filtre très étroit en énergie, comme dans le paragraphe précédent, le photon est gardé pendant un temps très long dans ce filtre, et quand il est détecté, on ne peut ne plus dire s'il vient de \vec{r}_1 ou \vec{r}_2 .

g) Etat final de l'atome après émission d'un photon quelconque

- On n'observe pas le photon émis et on ne sait donc rien sur lui. Il faut donc garder l'état final (3.30) tel quel et moyenner (3.34) à la fois sur k et sur \vec{k}/k . Les intégrales angulaire et radiale sont les mêmes que dans le cours II et donnent

$$\lambda_1 \lambda_2^* \rightarrow \lambda_1 \lambda_2^* \frac{\sin k_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{k_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} e^{-\frac{\Gamma |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{2c}} \quad (3.37)$$

- Si on n'observe pas le photon émis, la distribution en \vec{r} associée aux 2 paquets d'ondes de l'état initial n'est pas modifiée après l'émission mais la cohérence quantique entre les 2 paquets d'ondes est détruite si $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \gg \lambda_0$.

⑤ Etat initial du centre de masse : superposition linéaire de 2 ondes planes

a) Description de l'état initial

- On peut toujours choisir de se placer dans le référentiel où les 2 ondes planes ont des vecteurs d'ondes opposés $+\vec{k}_0$ et $-\vec{k}_0$. L'état initial du système global est alors

$$|\psi\rangle = |b\rangle \otimes |\varphi\rangle \otimes |0\rangle \quad (3.38.a)$$

où l'état $|\varphi\rangle$ du centre de masse s'écrit

$$|\varphi\rangle = \mu_1 |+\vec{k}_0\rangle + \mu_2 |-\vec{k}_0\rangle \quad (3.38.b)$$

- Distribution des valeurs de $\vec{p} = \hbar \vec{k}$

$$|\langle \vec{p} | \varphi \rangle|^2 = |\mu_1|^2 \delta_{\vec{p}, \vec{p}_0} + |\mu_2|^2 \delta_{\vec{p}, -\vec{p}_0} \quad \text{avec } \vec{p}_0 = \hbar \vec{k}_0 \quad (3.39)$$

- Les seules cohérences initiales non nulles, en \vec{p} sont

$$\langle \vec{p}_0 | \rho | -\vec{p}_0 \rangle = \mu_1 \mu_2^* \quad \langle -\vec{p}_0 | \rho | +\vec{p}_0 \rangle = \mu_1^* \mu_2 \quad (3.40)$$

- Distribution des valeurs de \vec{r}

$$|\langle \vec{r} | \varphi \rangle|^2 = |\mu_1 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} + \mu_2 e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}|^2 \quad (3.41)$$

Si par exemple $\mu_1 = \mu_2 = 1/\sqrt{2}$

$$|\langle \vec{r} | \varphi \rangle|^2 = 1 + \cos 2\vec{k}_0 \cdot \vec{r} \quad (3.42)$$

Oscillations spatiales de $|\langle \vec{r} | \varphi \rangle|^2$, de période $1/2k_0$

- Hypothèse simplificatrice sur l'effet Doppler associé à \vec{p}_0/M

$$\Delta \nu_D = \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}_0}{M} \ll \Gamma \quad (3.43)$$

Comme dans le § 4 précédent, cette hypothèse permet d'écrire

$$\frac{1}{\omega - \tilde{\omega}_0 \pm \frac{\hbar \vec{k}_0 \cdot \vec{k}}{M} + i \frac{\Gamma}{2}} \approx \frac{1}{\omega - \tilde{\omega}_0 + i \frac{\Gamma}{2}} \quad (3.44)$$

b) Etat final du système global

- Un calcul analogue à celui du paragraphe précédent montre, compte tenu de (2.23), (2.27), (3.38) et (3.44), que après quelques Γ^{-1} , l'état du système global est un état qui évolue librement et qui semble provenir de l'état initial

$$|\psi(t)\rangle = |a\rangle \otimes \sum_{\vec{k}} \frac{v/\hbar}{\omega - \tilde{\omega}_0 + i \frac{\Gamma}{2}} [\mu_1 |+\vec{k}_0 - \vec{k}\rangle + \mu_2 |-\vec{k}_0 - \vec{k}\rangle] \otimes |\vec{k}\rangle \quad (3.45)$$

- D'ailleurs, la condition (3.43) entraîne que l'effet de l'évolution libre entre $t=0$ et $t = \text{quelques } \Gamma^{-1}$ est négligeable et permet de remplacer dans (3.45) $|\psi(0)\rangle$ par $|\psi(t \sim \Gamma^{-1})\rangle$

c) Cohérences en \vec{p} dans l'état final du centre de masse

- Pour un photon émis \vec{k}_f bien défini, l'état final du centre

de masse est

$$\mu_1 |\vec{K}_0 - \vec{k}_f\rangle + \mu_2 |\vec{K}_0 - \vec{k}_f\rangle \quad (3.46)$$

C'est une superposition linéaire bien définie de 2 états dont les impulsions diffèrent toujours de $2\vec{p}_0 = 2\hbar\vec{K}_0$, comme en (3.38). Mais les 2 impulsions de (3.38) sont toutes 2 traduites de $-\hbar\vec{k}_f$, c'est à dire diminuées de l'impulsion du photon émis, $\hbar\vec{k}_f$. La cohérence quantique garde la même valeur, $\mu_1\mu_2^*$ ou $\mu_1^*\mu_2$, qu'avant l'émission, mais entre les états $|\vec{K}_0 - \vec{k}_f\rangle$ et $|\vec{K}_0 - \vec{k}_f\rangle$ au lieu de $|\vec{K}_0\rangle$ et $|\vec{K}_0\rangle$

- Si on n'observe pas le photon émis \vec{k} , et si on définit la "cohérence globale" entre 2 états d'impulsions différant de $2\vec{p}_0 = 2\hbar\vec{K}_0$ comme

$$\sum_{\vec{k}} \langle \vec{p}_0 - \hbar\vec{k} | \rho | -\vec{p}_0 - \hbar\vec{k} \rangle \quad (3.47)$$

où ρ est l'opérateur densité final du centre de masse, obtenu par trace partielle sur le rayonnement de l'opérateur densité associé à (3.45), on obtient

$$\sum_{\vec{k}} \langle \vec{p}_0 - \hbar\vec{k} | \rho | -\vec{p}_0 - \hbar\vec{k} \rangle = \mu_1 \mu_2^* \sum_{\vec{k}} \frac{|v|^2 / \hbar^2}{(\omega - \tilde{\omega}_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (3.48)$$

Or, $|v|^2$ et Γ ne sont pas indépendants, puisque d'après (2.12) et (2.25)

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}} |v|^2 \delta(\hbar\omega - \hbar\tilde{\omega}_0) \quad (3.49)$$

On démontre alors aisément à partir de (3.49) que

$$\sum_{\vec{k}} \frac{|v|^2 / \hbar^2}{(\omega - \tilde{\omega}_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = 1 \quad (3.50)$$

ce qui entraîne que

$$\sum_{\vec{k}} \langle \vec{p}_0 - \hbar\vec{k} | \rho | -\vec{p}_0 - \hbar\vec{k} \rangle = \mu_1 \mu_2^* \quad (3.51)$$

Il apparaît ainsi, en comparant (3.40) et (3.51), que la cohérence globale entre 2 états d'impulsions différant de $2\vec{p}_0$ ne change pas après l'émission d'un photon quelconque. Un tel résultat, qui est dû à la conservation de l'impulsion globale au cours de l'émission, montre, par comparaison avec les résultats du § 4 précédent, que les cohérences en impulsion sont beaucoup plus "résistantes" que les cohérences en position vis à vis du processus d'émission spontanée

Références : Calculs de ce cours faits en collaboration avec Y. Castin