

But de ce cours

- Certaines propositions expérimentales [1] envisagent la possibilité de préparer un oscillateur harmonique (associé à un mode du champ électromagnétique) dans une superposition cohérente de 2 états cohérents. En l'absence de dissipation, les paquets d'ondes associés à ces 2 états cohérents oscilleraient sans se déformer, et on pourrait essayer d'observer les phénomènes d'interférence associés à la cohérence qui existe entre eux.
- Problème étudié dans ce cours : comme une dissipation très faible va-t-elle perturber ces phénomènes d'interférence ? Pourquoi la cohérence entre les 2 paquets d'ondes est-elle amortie beaucoup plus rapidement que le mouvement de chaque paquet d'ondes ?

① Comment préparer un oscillateur harmonique dans une superposition linéaire de 2 états cohérents ?

a) Problème physique considéré [réf. (1)]

- Champ monomode de fréquence ω_0 . b^+ et b : opérateurs de création et d'annihilation d'un photon $\hbar\omega_0$ de ce mode
- Hamiltonien modèle pris pour ce mode

$$H = \hbar\omega_0 b^+ b + \hbar\Omega (b^+ b)^2 \quad (10.1)$$

1^{er} terme : énergie propre du mode (états propres $|N\rangle$, avec $N=0,1,2,\dots$)

2^{ème} terme : terme phénoménologique décrivant l'effet d'une interaction avec un milieu non-linéaire. Par exemple, H décrit schématiquement un champ monomode dans une ligne de transmission (fibre optique) avec une susceptibilité non-linéaire.

- A $t=0$, le mode est dans un état cohérent $|\beta\rangle$

$$|\psi(0)\rangle = e^{-|\beta|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\beta^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle \quad (10.2)$$

Nous allons montrer que, sous l'effet de H , le mode va évoluer et se retrouver, après un certain temps d'interaction, dans une superposition linéaire de 2 états cohérents.

b) Evolution de l'oscillateur en l'absence de dissipation

- Les états propres de H sont les états $|N\rangle$

$$H|N\rangle = (N\hbar\omega_0 + N^2\hbar\Omega) |N\rangle \quad (10.3)$$

Après un temps T , l'état (10.2) est devenu, en représentation d'interaction par rapport à $H_0 = \hbar\omega_0 b^+ b$

$$|\tilde{\psi}(T)\rangle = e^{-|\beta|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\beta^N}{\sqrt{N!}} e^{-iN^2\Omega T} |N\rangle \quad (10.4)$$

- Prenons $T = \frac{\pi}{2\Omega}$ et calculons $e^{-iN^2\Omega T} = e^{-iN^2\pi/2}$

$$\bullet \text{ Si } N=2n \text{ pair, } N^2=4n^2 \text{ et } e^{-iN^2\pi/2} = e^{-2i\pi n^2} = 1 \quad (10.5a)$$

$$\bullet \text{ Si } N=2n+1 \text{ impair, } N^2=4n^2+4n+1 = 4n(n+1)+1 \text{ et } e^{-iN^2\pi/2} = e^{-2i\pi n(n+1)} e^{-i\pi/2} = -i \quad (10.5b)$$

- Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\beta^N e^{-i\pi/4} + (-\beta)^N e^{i\pi/4} \right] = \begin{cases} \beta^N \frac{2 \cos \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} = \beta^N & \text{si } N \text{ pair} \\ \beta^N \frac{(-i) 2 \sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} = -i \beta^N & \text{si } N \text{ impair} \end{cases} \quad (10.6.a)$$

$$(10.6.b)$$

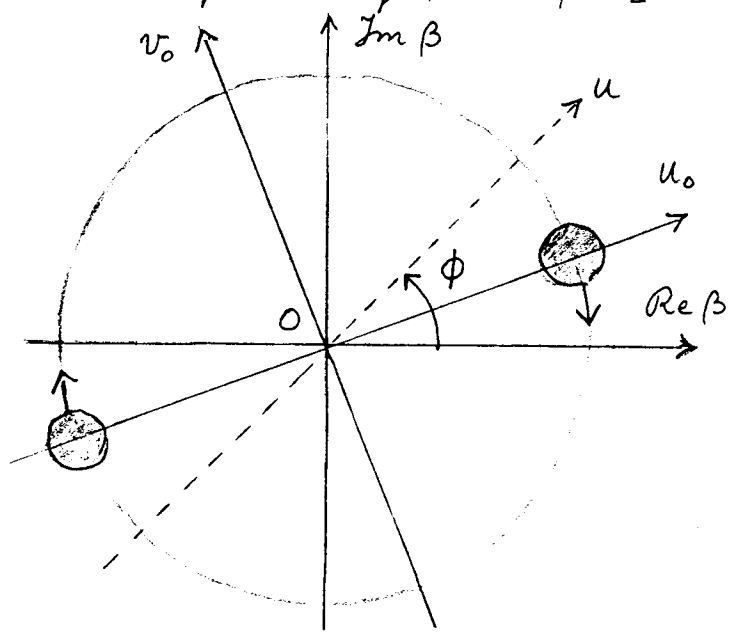
- En utilisant (10.5) et (10.6), on peut finalement réécrire $|\tilde{\Psi}(\frac{\pi}{2\Omega})\rangle$ sous la forme

$$|\tilde{\Psi}(\frac{\pi}{2\Omega})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\beta\rangle e^{-i\pi/4} + |-\beta\rangle e^{i\pi/4} \right] \quad (10.7)$$

Ainsi, après un temps $T = \pi/2\Omega$, l'état de l'oscillateur est devenu une superposition linéaire de 2 états cohérents $|\beta\rangle$ et $|-\beta\rangle$ oscillant en opposition de phase. Si l'interaction responsable du 2^{ème} terme de (10.1) est coupée à partir de cet instant, l'état du champ évolue librement à partir de (10.7).

c) Que pourrait-on mesurer sur le champ préparé dans un tel état?

- Représentation graphique de l'état du mode par des petites surfaces dans le plan complexe de β [voir référence (2)]



- La projection des 2 paquets d'ondes associés aux 2 états cohérents (tournant en opposition de phase) sur un axe Ou faisant l'angle ϕ avec l'axe réel (et tournant lui aussi) donne l'amplitude de probabilité pour que la composante du champ en phase avec un champ de référence de phase ϕ ait une amplitude donnée

- Si l'axe Ou coïncide avec l'axe Ou_0 passant par les centres des 2 paquets d'ondes, les projections des 2 paquets d'ondes seront bien séparées, et la distribution de probabilité de l'amplitude du champ aura 2 pics bien séparés. Si par contre, l'axe Ou coïncide avec l'axe Ov_0 perpendiculaire à Ou_0 , les projections des 2 paquets d'ondes se recouvriront. Comme ils sont cohérents l'un avec l'autre et qu'ils ont des vitesses moyennes opposées, la distribution de probabilité de l'amplitude du champ présentera des franges d'interférence très resserrées sur une petite plage centrée autour de 0.

plitude du champ aura 2 pics bien séparés. Si par contre, l'axe Ou coïncide avec l'axe Ov_0 perpendiculaire à Ou_0 , les projections des 2 paquets d'ondes se recouvriront. Comme ils sont cohérents l'un avec l'autre et qu'ils ont des vitesses moyennes opposées, la distribution de probabilité de l'amplitude du champ présentera des franges d'interférence très resserrées sur une petite plage centrée autour de 0.

- Possibilité donc, suivant la phase du champ de référence, d'observer des distributions de probabilité avec des pics très espacés ou des franges d'interférence très resserrées. Interférences quantiques entre 2 états macroscopiquement différents

Concrètement, une telle mesure pourrait être faite en faisant interférer le champ dans l'état (10.7) avec un champ local intense de référence sur un détecteur homodyne (voir référence (1) et références in)

② Etude de la dissipation dans la base des états propres de l'oscillateur (voir référence (3))

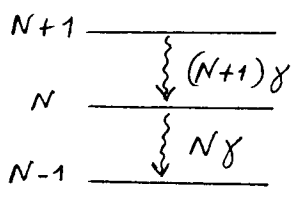
L'oscillateur précédent est faiblement amorti par couplage avec un réservoir R que nous supposons pour simplifier au zéro absolu. L'équation pilote décrivant l'évolution de l'opérateur densité σ de l'oscillateur a été établie dans le cours IX (voir (9.51))
 Nous allons tout d'abord projeter cette équation sur la base $\{|N\rangle\}$ des états propres de $H_0 = \hbar\omega_0 b^\dagger b$.

Pour interpréter les résultats, il peut être utile de considérer l'oscillateur ω_0 comme une charge élastiquement liée et le réservoir R comme l'ensemble des modes du champ de rayonnement dans l'état vide. La dissipation de l'oscillateur est alors due à l'émission spontanée de photons par la charge oscillante

a) Evolution des populations $\sigma_{NN}(t) = \langle N | \sigma(t) | N \rangle$

En projetant (9.51) sur $|N\rangle$ et $\langle N|$ et en utilisant les éléments de matrice de b et b^\dagger , on obtient

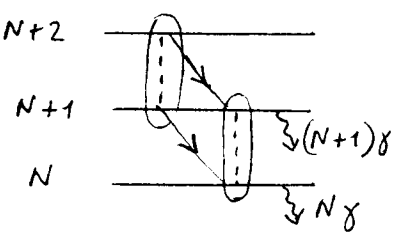
$$\dot{\sigma}_{NN} = -N\gamma \sigma_{NN} + (N+1)\gamma \sigma_{N+1 N+1} \tag{10.8}$$



L'oscillateur quitte le niveau N vers le niveau $N-1$ avec un taux $N\gamma$ et est alimenté à partir de $N+1$ avec un taux $(N+1)\gamma$
 γ est le taux de transition de $|1\rangle$ vers $|0\rangle$ (taux d'émission spontanée d'un photon à partir de $|1\rangle$)
 Plus N est grand, plus la probabilité de quitter $|N\rangle$ est grande

b) Evolution des cohérences $\sigma_{N+1 N}(t) = \langle N+1 | \sigma(t) | N \rangle$

$$\dot{\sigma}_{N+1 N} = -i\omega_0 \sigma_{N+1 N} - \frac{1}{2} [(N+1) + N] \gamma \sigma_{N+1 N} + \sqrt{(N+2)(N+1)} \gamma \sigma_{N+2 N+1} \tag{10.9}$$



1^{er} terme : évolution propre
 2^{ème} terme : Taux d'amortissement de $\sigma_{N+1 N}$ égal à la 1/2 somme des taux de départ $(N+1)\gamma$ et $N\gamma$ à partir de $|N+1\rangle$ et $|N\rangle$
 3^{ème} terme : Transfert de cohérence de $\sigma_{N+2 N+1}$ vers $\sigma_{N+1 N}$

c) Evolution de quelques valeurs moyennes

- En multipliant b par l'expression (9.51) de $d\sigma/dt$, en prenant la trace et en utilisant la propriété d'invariance de la trace dans une permutation circulaire, on obtient

$$\frac{d}{dt} \langle b \rangle = - (i\omega_0 + \frac{\gamma}{2}) \langle b \rangle \tag{10.10}$$

$\langle b \rangle$ "tourne" à la fréquence $-\omega_0$ et est amorti avec un taux $\frac{\gamma}{2}$

- On trouve de même que

$$\frac{d}{dt} \langle b^\dagger b \rangle = -\gamma \langle b^\dagger b \rangle \tag{10.11}$$

$\langle b^\dagger b \rangle$ tend vers 0 avec un taux γ .

③ Autre écriture possible de l'équation pilote

a) Fonction caractéristique adaptée à l'ordre normal

Définition et propriétés

A l'opérateur densité de l'oscillateur σ , on associe une fonction $C_N(\lambda, \lambda^*)$

$$C_N(\lambda, \lambda^*) = \text{Tr}[\sigma e^{\lambda b^+} e^{-\lambda^* b}] \quad (10.12)$$

où λ est un nombre complexe. Dans (10.12), les opérateurs b et b^+ sont rangés dans l'ordre normal. $C_N(\lambda, \lambda^*)$ est appelé fonction caractéristique adaptée à l'ordre normal car les valeurs moyennes de produits de b^+ et b rangés dans l'ordre normal s'expriment simplement en fonction des dérivées partielles de C_N évaluées en $\lambda = \lambda^* = 0$

$$\langle (b^+)^m b^p \rangle = (-1)^p \frac{\partial^{m+p}}{\partial \lambda^m \partial \lambda^{*p}} C_N(\lambda, \lambda^*) \Big|_{\lambda = \lambda^* = 0} \quad (10.13)$$

Fonctions caractéristiques associées à σb^+ , $b\sigma$, $b^+\sigma$, σb

$$\frac{\partial C_N}{\partial \lambda} = \text{Tr}[\sigma b^+ e^{\lambda b^+} e^{-\lambda^* b}]$$

$$\frac{\partial C_N}{\partial \lambda^*} = -\text{Tr}[\sigma e^{\lambda b^+} e^{-\lambda^* b} b] = -\text{Tr}[b\sigma e^{\lambda b^+} e^{-\lambda^* b}]$$

On en déduit que

$$\text{si } \sigma \rightarrow C_N(\lambda, \lambda^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma b^+ \rightarrow \frac{\partial C_N(\lambda, \lambda^*)}{\partial \lambda} \end{array} \right. \quad (10.14.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b\sigma \rightarrow -\frac{\partial C_N(\lambda, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} \end{array} \right. \quad (10.14.b)$$

D'après l'identité de Glauber

$$e^{\lambda b^+} e^{-\lambda^* b} = e^{\lambda b^+ - \lambda^* b} e^{|\lambda|^2/2} = e^{-\lambda^* b} e^{\lambda b^+} e^{|\lambda|^2/2}$$

On en déduit

$$C_N(\lambda, \lambda^*) = e^{\lambda \lambda^*} \text{Tr}[\sigma e^{-\lambda^* b} e^{\lambda b^+}]$$

$$\frac{\partial C_N(\lambda, \lambda^*)}{\partial \lambda} = \lambda^* C_N(\lambda, \lambda^*) + e^{\lambda \lambda^*} \text{Tr}[b^+ \sigma e^{-\lambda^* b} e^{\lambda b^+}]$$

$$= \lambda^* C_N(\lambda, \lambda^*) + \text{Tr}[b^+ \sigma e^{\lambda b^+} e^{-\lambda^* b}]$$

$$\frac{\partial C_N(\lambda, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} = \lambda C_N(\lambda, \lambda^*) - \text{Tr}[\sigma b e^{\lambda b^+} e^{-\lambda^* b}]$$

Donc

$$\text{si } \sigma \rightarrow C_N(\lambda, \lambda^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} b^+\sigma \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} - \lambda^*\right) C_N(\lambda, \lambda^*) \end{array} \right. \quad (10.15.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma b \rightarrow \left(\lambda - \frac{\partial}{\partial \lambda^*}\right) C_N(\lambda, \lambda^*) \end{array} \right. \quad (10.15.b)$$

b) Fonctions $C_N(\lambda, \lambda^*)$ associées à quelques états de l'oscillateur

Etat cohérent $|\psi\rangle = |\beta\rangle$

$$C_N(\lambda, \lambda^*) = \text{Tr}[|\beta\rangle\langle\beta| e^{\lambda b^+} e^{-\lambda^* b}] = \langle\beta| e^{\lambda b^+} e^{-\lambda^* b} |\beta\rangle = e^{\lambda\beta^* - \lambda^*\beta} \quad (10.16)$$

On a utilisé $b|\beta\rangle = \beta|b\rangle$ et $\langle\beta|b^+ = \beta^*\langle\beta|$

Superposition linéaire de 2 états cohérents

$$|\psi\rangle = c_1 |\beta_1\rangle + c_2 |\beta_2\rangle \quad (10.17)$$

$$\sigma = |\psi\rangle\langle\psi| = |c_1|^2 |\beta_1\rangle\langle\beta_1| + |c_2|^2 |\beta_2\rangle\langle\beta_2| + c_1 c_2^* |\beta_1\rangle\langle\beta_2| + c_2 c_1^* |\beta_2\rangle\langle\beta_1| \quad (10.18)$$

- Les 2 premiers termes donnent des contributions analogues à (10.16) avec β remplacé par β_1 ou β_2 , $|c_1|^2 e^{\lambda \beta_1^* - \lambda^* \beta_1}$ et $|c_2|^2 e^{\lambda \beta_2^* - \lambda^* \beta_2}$. Le 3ème terme donne

$$\begin{aligned} c_1 c_2^* \text{Tr} [|\beta_1\rangle\langle\beta_2| e^{\lambda b^+} e^{-\lambda^* b}] &= c_1 c_2^* \langle\beta_2| e^{\lambda b^+} e^{-\lambda^* b} |\beta_1\rangle \\ &= c_1 c_2^* e^{(\lambda \beta_2^* - \lambda^* \beta_1)} \langle\beta_2|\beta_1\rangle \end{aligned} \quad (10.19)$$

Le dernier terme est obtenu à partir de (10.19) en permutant 1 et 2. Finalement, la fonction C_N associée à (10.17) s'écrit

$$\begin{aligned} C_N(\lambda, \lambda^*) &= |c_1|^2 e^{\lambda \beta_1^* - \lambda^* \beta_1} + |c_2|^2 e^{\lambda \beta_2^* - \lambda^* \beta_2} \\ &+ c_1 c_2^* \langle\beta_2|\beta_1\rangle e^{\lambda \beta_2^* - \lambda^* \beta_1} + c_2 c_1^* \langle\beta_1|\beta_2\rangle e^{\lambda \beta_1^* - \lambda^* \beta_2} \end{aligned} \quad (10.20)$$

- Calculons enfin $\langle\beta_2|\beta_1\rangle$. A partir du développement (10.2) écrit pour β_1 et β_2 , on obtient

$$\begin{aligned} \langle\beta_2|\beta_1\rangle &= e^{-\beta_1 \beta_1^* / 2} e^{-\beta_2 \beta_2^* / 2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\beta_1 \beta_2^*)^N}{N!} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\beta_1 \beta_1^* + \beta_2 \beta_2^* + 2\beta_1 \beta_2^*] \right\} \\ &= e^{-\frac{1}{2} |\beta_1 - \beta_2|^2} e^{i\varphi_{12}} = \langle\beta_1|\beta_2\rangle \end{aligned} \quad (10.21)$$

$$\text{ou} \quad \varphi_{12} = \frac{\beta_1 \beta_2^* - \beta_2 \beta_1^*}{2i} = \text{Im} \beta_1 \beta_2^* \quad (10.22)$$

Superposition linéaire de 2 états cohérents avec réduction de la cohérence entre les 2 états cohérents

- L'opérateur densité σ est analogue à (10.18), mais les 2 derniers termes sont multipliés par des facteurs η et η^* avec $|\eta| < 1$

$$\sigma = |c_1|^2 |\beta_1\rangle\langle\beta_1| + |c_2|^2 |\beta_2\rangle\langle\beta_2| + \eta c_1 c_2^* |\beta_1\rangle\langle\beta_2| + \eta^* c_2 c_1^* |\beta_2\rangle\langle\beta_1| \quad (10.23)$$

A la limite $\eta \rightarrow 0$, on obtient un mélange statistique de $|\beta_1\rangle$ et $|\beta_2\rangle$ avec des poids $|c_1|^2$ et $|c_2|^2$

- Le calcul de la fonction C_N associée à (10.23) est très analogue au précédent. Il suffit de multiplier les 2 derniers termes par η et η^*

$$\begin{aligned} C_N(\lambda, \lambda^*) &= |c_1|^2 e^{\lambda \beta_1^* - \lambda^* \beta_1} + |c_2|^2 e^{\lambda \beta_2^* - \lambda^* \beta_2} \\ &+ \eta c_1 c_2^* \langle\beta_2|\beta_1\rangle e^{\lambda \beta_2^* - \lambda^* \beta_1} + \eta^* c_2 c_1^* \langle\beta_1|\beta_2\rangle e^{\lambda \beta_1^* - \lambda^* \beta_2} \end{aligned} \quad (10.24)$$

c) Equation d'évolution de $C_N(\lambda, \lambda^*)$

Terme $-i\omega_0 [b^+ b, \sigma] = -i\omega_0 [b^+ b \sigma - \sigma b^+ b]$ de l'équation pilote (9.51)

En utilisant (10.14) et (10.15), on obtient pour la fonction C_N associée à ce terme

$$-i\omega_0 \left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} - \lambda^* \right) \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda^*} \right) - \left(\lambda - \frac{\partial}{\partial \lambda^*} \right) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] C_N = -i\omega_0 \left[\lambda^* \frac{\partial}{\partial \lambda^*} - \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] C_N \quad (10.25)$$

Terme $-\frac{\gamma}{2} [b^+ b \sigma + \sigma b^+ b]$ de (9.51). Un calcul analogue donne

$$-\frac{\gamma}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} - \lambda^* \right) \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda^*} \right) + \left(\lambda - \frac{\partial}{\partial \lambda^*} \right) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] C_N = \gamma \left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \lambda^*} - \frac{1}{2} \left(\lambda^* \frac{\partial}{\partial \lambda^*} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \right] C_N \quad (10.26)$$

Terme $\gamma b \sigma b^\dagger$ de (9.51). Un calcul analogue donne

X-6

$$\gamma \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda^*}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right) C_N = -\gamma \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \lambda^*} C_N \quad (10.27)$$

Finalement, d'après (9.51), $\partial C_N / \partial t$ est égal à la somme des 3 termes (10.25), (10.26) et (10.27). L'équation d'évolution de C_N est donc

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0\right) \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right) \lambda^* \frac{\partial}{\partial \lambda^*} \right] C_N(\lambda, \lambda^*, t) = 0 \quad (10.28)$$

C'est une équation aux dérivées partielles linéaire, homogène, du 1^{er} ordre, rigoureusement équivalente à (9.51). (voir aussi (4))

④ Solution de l'équation d'évolution de C_N

a) Forme générale de la solution

Nous utilisons la méthode des caractéristiques (voir cours VI)

Courbes caractéristiques

Solutions des équations différentielles

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\lambda}{\left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0\right)\lambda} = \frac{d\lambda^*}{\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right)\lambda^*} \quad (10.29)$$

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0\right)\lambda \\ \frac{d\lambda^*}{dt} = \left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right)\lambda^* \end{cases} \quad (10.30)$$

Solution de (10.30) $\begin{cases} \lambda = \lambda_0 e^{\left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0\right)t} \\ \lambda^* = \lambda_0^* e^{\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right)t} \end{cases} \quad (10.31)$

Inversion de (10.31) : donne les coordonnées λ_0 et λ_0^* de l'intersection avec le plan $t=0$ de la caractéristique passant par le point λ, λ^* en t

$$\begin{cases} \lambda_0 = \lambda e^{-\left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0\right)t} \\ \lambda_0^* = \lambda^* e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right)t} \end{cases} \quad (10.32)$$

Solution de (10.28) correspondant à $C_N = C_0$ pour $t=0$

L'équation (10.28) exprime que C_N ne varie pas le long d'une courbe caractéristique. On a donc

$$C_N(\lambda, \lambda^*, t) = C_0(\lambda_0, \lambda_0^*) \quad (10.33)$$

où les points $t=0, \lambda_0, \lambda_0^*$ et t, λ, λ^* sont sur la même courbe caractéristique et satisfont donc à (10.32). Par suite,

$$C_N(\lambda, \lambda^*, t) = C_0\left(\lambda e^{-\left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0\right)t}, \lambda^* e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right)t}\right) \quad (10.34)$$

b) Solution correspondant à un état initial cohérent $|\beta\rangle$

- Dans ce cas, d'après (10.16), $C_0(\lambda, \lambda^*) = e^{\lambda\beta^* - \lambda^*\beta}$. En reportant cette expression de C_0 dans (10.34), on obtient

$$C_N(\lambda, \lambda^*, t) = \exp\left\{\lambda e^{-\left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0\right)t}\beta^* - \lambda^* e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right)t}\beta\right\} \quad (10.35)$$

qui peut être réécrit

$$C_N(\lambda, \lambda^*, t) = \exp\left\{\lambda\beta^*(t) - \lambda^*\beta(t)\right\} \quad (10.36)$$

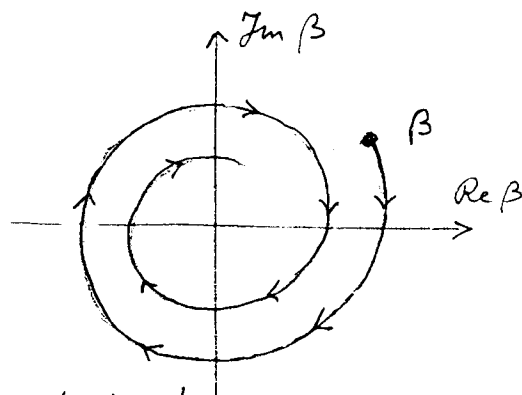
avec

$$\beta(t) = \beta e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right)t}$$

X-7
(10.37)

La solution de (10.28) à l'instant t a donc toujours la forme (10.16) avec β remplacé par (10.37)

- On en déduit que, même en présence de dissipation, l'oscillateur reste dans un état cohérent. Mais le point représentatif de cet état cohérent dans le plan complexe de β décrit, à la fréquence ω , une spirale dont le rayon est amorti avec un taux $\gamma/2$



Comme $\omega_0 \gg \gamma$, il y a plusieurs tours pendant γ^{-1} . Un tel résultat confirme les résultats obtenus plus haut pour l'évolution de certaines valeurs moyennes (voir (10.10) et (10.11)).

- c) Cas où l'état initial est une superposition linéaire de 2 états cohérents (voir aussi (4), (5))

- Dans ce cas, il faut remplacer $C_0(\lambda, \lambda^*)$ par l'expression (10.20). D'après (10.34), il faut alors remplacer dans (10.20), λ et λ^* par $\lambda e^{-\left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0\right)t}$ et $\lambda^* e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right)t}$

Comme dans le paragraphe 4b ci-dessus, une telle opération revient à remplacer, dans les exponentielles de (10.20), β_1 et β_2

par

$$\beta_1(t) = \beta_1 e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right)t} \quad \beta_2(t) = \beta_2 e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right)t} \quad (10.38)$$

On obtient ainsi pour $C_N(\lambda, \lambda^*, t)$

$$C_N(\lambda, \lambda^*, t) = |c_1|^2 e^{\lambda \beta_1^*(t) - \lambda^* \beta_1(t)} + |c_2|^2 e^{\lambda \beta_2^*(t) - \lambda^* \beta_2(t)} + c_1 c_2^* \langle \beta_2 | \beta_1 \rangle e^{\lambda \beta_2^*(t) - \lambda^* \beta_1(t)} + c_2 c_1^* \langle \beta_1 | \beta_2 \rangle e^{\lambda \beta_1^*(t) - \lambda^* \beta_2(t)} \quad (10.39)$$

- On constate alors que, dans les 2 derniers termes de (10.39), ce ne sont $\beta_1(t)$ et $\beta_2(t)$ qui figurent dans les produits scalaires $\langle \beta_2 | \beta_1 \rangle$ et $\langle \beta_1 | \beta_2 \rangle$. Si nous posons

$$\eta = \frac{\langle \beta_2 | \beta_1 \rangle}{\langle \beta_2(t) | \beta_1(t) \rangle} \quad (10.40)$$

on voit alors qu'on peut réécrire (10.39) sous la forme

$$C_N(\lambda, \lambda^*, t) = |c_1|^2 e^{\lambda \beta_1^*(t) - \lambda^* \beta_1(t)} + |c_2|^2 e^{\lambda \beta_2^*(t) - \lambda^* \beta_2(t)} + \eta c_1 c_2^* \langle \beta_2(t) | \beta_1(t) \rangle e^{\lambda \beta_2^*(t) - \lambda^* \beta_1(t)} + \eta^* c_2 c_1^* \langle \beta_1(t) | \beta_2(t) \rangle e^{\lambda \beta_1^*(t) - \lambda^* \beta_2(t)} \quad (10.41)$$

En comparant (10.41) avec (10.24), on voit qu'on peut maintenant décrire l'effet de la dissipation sur une superposition linéaire de 2 états cohérents : l'état à l'instant t est toujours

une superposition linéaire de 2 états cohérents $|\beta_1(t)\rangle$ et $|\beta_2(t)\rangle$ dont les points représentatifs décrivent, dans le plan complexe, des spirales amorties. Mais, en plus, la cohérence entre ces 2 états cohérents est réduite par un facteur $|\eta|$.

- Calculons $|\eta|$. A partir de (10.40) et (10.21), on obtient

$$|\eta| = \frac{e^{-\frac{1}{2}|\beta_1 - \beta_2|^2}}{e^{-\frac{1}{2}|\beta_1 - \beta_2|^2 e^{-\gamma t}}} = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\beta_1 - \beta_2|^2(1 - e^{-\gamma t})\right\} \quad (10.42)$$

Pour $\gamma t \ll 1$, $1 - e^{-\gamma t} \sim \gamma t$, et on obtient

$$|\eta| \simeq \exp\left\{-\frac{\gamma}{2}|\beta_1 - \beta_2|^2 t\right\} \quad (10.43)$$

La cohérence entre les 2 états cohérents s'amortit donc avec un temps $|\beta_1 - \beta_2|^{-2}$ fois plus grand que chaque état cohérent pris séparément.

Là encore, on retrouve que la cohérence entre 2 états macroscopiquement différents s'amortit avec un temps plus grand par un facteur proportionnel au carré de la "distance" entre ces 2 états.

- Dans l'exemple concret du § 1 ci-dessus, $\beta_1 = -\beta_2 = \beta$. Le facteur d'augmentation $|\beta_1 - \beta_2|^2 = 4|\beta|^2$ est alors propor- à $|\beta|^2$, c'est à dire au nombre moyen de photons dans l'état initial du mode.

5) Interprétation physique (voir aussi (6)).

- Dans ce dernier paragraphe, l'oscillateur sous-amorti S sera une charge élastiquement liée et le réservoir R sera l'ensemble des modes du rayonnement dans l'état initial vide. Comme état initial de l'oscillateur S , nous prendrons une superposition linéaire de l'état $|N=0\rangle$, qui est un état cohérent $|\beta=0\rangle$ et d'un état cohérent $|\beta\rangle$

$$|\Psi_S(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\beta=0\rangle + |\beta\rangle] \quad (10.44)$$

D'après (10.2), l'état $|\beta\rangle$ est une superposition linéaire d'états $|N\rangle$ avec des valeurs de N distribuées sur un intervalle de largeur $|\beta|$ autour de $\langle N \rangle = |\beta|^2$. Nous supposons ici $|\beta| = 1$. Dans l'état initial, l'état du réservoir est le vide de photons $|\Psi_R\rangle = |0\rangle$, et l'état du système global $S+R$ est

$$|\Psi(t=0)\rangle = |\Psi_S\rangle \otimes |\Psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\beta=0\rangle \otimes |0\rangle + |\beta\rangle \otimes |0\rangle] \quad (10.45)$$

- Comment vont évoluer les 2 composantes de l'état initial (10.45)?

La première, $|\beta=0\rangle \otimes |0\rangle$, va rester inchangée. En effet, l'oscillateur S est dans son état fondamental et ne peut émettre spontanément aucun photon.

Par contre, le 2^{ème} terme de (10.45) va évoluer, car l'oscillateur, dans l'un des états $|N\rangle$ figurant dans le développement (10.2), de $|\beta\rangle$ va se désexciter par émission spontanée d'un photon vers l'état $|N-1\rangle$ avec un taux $N\gamma$ (voir (10.8)).

Au bout d'un temps de l'ordre de $(\langle N \rangle \gamma)^{-1} = 1/|\beta|^2 \gamma$, va donc apparaître ^(état à 1) un photon $|\vec{k}\vec{E}\rangle$ dans l'état qui évolue à partir du 2^{ème} terme de (10.45). Comme le 1^{er} terme de (10.45) reste toujours dans l'état vide du rayonnement, les 2 composantes de (10.45) vont très vite devenir orthogonales en ce qui concerne le rayonnement. La trace sur le rayonnement, qu'il faut prendre si l'on veut suivre l'évolution de la cohérence entre les 2 états cohérents, va alors donner 0.

— Dès qu'un photon est émis par l'oscillateur, la cohérence entre les 2 états cohérents est donc détruite. Comme le taux d'émission d'un photon à partir de $|\beta\rangle$ est de l'ordre de $|\beta|^2 \gamma$, on comprend donc pourquoi la cohérence entre les 2 états cohérents est détruite avec un temps $|\beta|^2 \gamma$, $|\beta|^2$ fois plus grand que γ .

Par contre, pour l'état cohérent $|\beta\rangle$ tout seul, les cohérences sont détruites beaucoup plus lentement, avec un temps de l'ordre de γ (voir (10.10)). En effet, si le système $S+R$ est à $t=0$ dans une superposition linéaire de $|N\rangle \otimes |0\rangle$ et $|N-1\rangle \otimes |0\rangle$, il peut se retrouver ensuite, après émission d'un photon $|\vec{k}\vec{E}\rangle$ dans une superposition de $|N-1\rangle \otimes |\vec{k}\vec{E}\rangle$ et $|N-2\rangle \otimes |\vec{k}\vec{E}\rangle$. La cohérence entre les 2 états $|N\rangle$ et $|N-1\rangle$ de S n'est donc pas détruite après l'émission spontanée d'un photon. Elle est en grande partie transformée en une cohérence entre $|N-1\rangle$ et $|N-2\rangle$ (voir (10.9)).

Références

- (1) B. Yurke, D. Stoler, Phys. Rev. Lett. 57, 13 (1986)
- (2) C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, "Photons et Atomes. Introduction à l'Electrodynamique Quantique", Exercice 6 du Complément D_{III} (Interéditions et Editions du CNRS, Paris 1987)
- (3) Mêmes auteurs et mêmes éditeurs que (2), "Processus d'Interaction entre Photons et Atomes, Complément B_{IV}
- (4) C. Savage, D. Walls, Phys. Rev. A32, 2316 (1985)
- (5) D. Walls, G. Milburn, Phys. Rev. A31, 2403 (1985)
- (6) A. Caldeira, A. Leggett, Phys. Rev. A31, 1059 (1985)