

17.1.89

Etude d'un exemple simple
 Effet de l'émission spontanée d'un photon
 sur les cohérences quantiques de l'atome émetteur

Introduction

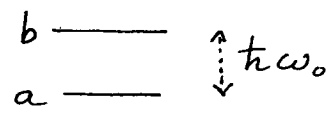
- Atome à 2 niveaux
 - Degrés de liberté internes
 - $\Gamma =$ Largeur naturelle de $b =$ Temps d'émission spontanée à partir de $b = 1/\tau$ (τ : Durée de vie radiative de b)
 - Degrés de liberté externes (ou de translation)
 - Position \vec{r} , Impulsion \vec{p} du centre de masse
 - Mass totale de l'atome: M
- A l'instant $t=0$, atome dans l'état excité b ; état du centre de masse décrit par l'opérateur densité ρ_0

Après un temps de l'ordre de quelques Γ^{-1} , atome dans l'état inférieur a après avoir émis un photon. Quel est son nouvel état externe ρ ?

Si initialement il y a des "cohérences spatiales" $\langle \vec{r}' | \rho_0 | \vec{r}'' \rangle \neq 0$ qu'advient-t-il de ces cohérences ? Même question pour les cohérences en impulsion $\langle \vec{p}' | \rho_0 | \vec{p}'' \rangle$.
- Dans les questions précédentes, on ne précise rien sur le photon émis. On ne l'observe pas. On s'intéresse seulement à l'atome.

Les réponses à ces questions sont-elles les mêmes si on détecte le photon émis, dans une direction bien définie mais sans sélection en énergie, dans une direction bien définie et avec une résolution en énergie meilleure que Γ ?
- Exemples d'état initial pour les degrés de liberté externes
 - Onde plane correspondant à un atome d'impulsion bien définie \vec{p}_0 .
 - Superposition linéaire de 2 paquets d'ondes bien séparés spatialement (distance entre les 2 paquets d'ondes supérieure à la largeur de chaque paquet)
 - Superposition linéaire de 2 ondes planes de vecteurs d'onde \vec{p}_1/\hbar et \vec{p}_2/\hbar
- Intérêt d'un tel problème
 - Simple mathématiquement: on peut résoudre exactement l'équation de Schrödinger et écrire explicitement le vecteur d'état final du système global atome + photon.

Possibilité notamment d'étudier les corrélations entre l'état final de l'atome et celui du champ, ce qui serait impossible dans un traitement du type équation pilote où la trace est prise sur le réservoir



- Importance de l'émission spontanée comme prototype de processus dissipatif en optique quantique.
L'émission spontanée introduit-elle une borne supérieure pour les longueurs de cohérence spatiales que le refroidissement laser permet d'obtenir ?

- Limites d'un tel problème

On considère un seul processus d'émission.

Il faudra ensuite étudier ce qui se passe quand l'atome est réexcité en permanence au moyen de photons incidents. Des généralisations de ce type seront étudiées ultérieurement.

① Rappels de mécanique quantique (sur l'évolution d'un état discret couplé à un continuum)

a) Hamiltoniens - Etats de base

$$H = H_0 + V \tag{2.1}$$

$$H_0 |\varphi_i\rangle = E_i |\varphi_i\rangle \quad \text{Etat discret} \tag{2.2.a}$$

$$H_0 |\varphi_f\rangle = E_f |\varphi_f\rangle \quad \text{Continuum} \tag{2.2.b}$$

$$\langle \varphi_f | V | \varphi_i \rangle = V_{fi} \tag{2.3.a}$$

$$\langle \varphi_i | V | \varphi_i \rangle = \langle \varphi_f | V | \varphi_f \rangle = 0 \tag{2.3.b}$$

b) Equation de Schrödinger - Equation integrodifferentielle équivalente

$$|\Psi(t)\rangle = c_i(t) e^{-iE_i t/\hbar} |\varphi_i\rangle + \sum_f c_f(t) e^{-iE_f t/\hbar} |\varphi_f\rangle \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} i\hbar \dot{c}_i(t) = \sum_f V_{if} e^{-i(E_f - E_i)t/\hbar} c_f(t) \end{cases} \tag{2.5.a}$$

$$\begin{cases} i\hbar \dot{c}_f(t) = \sum_i V_{fi} e^{-i(E_i - E_f)t/\hbar} c_i(t) \end{cases} \tag{2.5.b}$$

A $t=0$, $c_i(0) = 1$, $c_f(0) = 0$

$$c_f(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V_{fi} e^{-i(E_i - E_f)t'/\hbar} c_i(t') \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_i(t) &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \sum_f |V_{fi}|^2 e^{i(E_i - E_f)(t-t')/\hbar} c_i(t') \\ &= -\int_0^t dt' K(t-t') c_i(t') \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$K(\tau) = \frac{1}{\hbar^2} \sum_f |V_{fi}|^2 e^{i(E_i - E_f)\tau/\hbar} \tag{2.8}$$

c) Approximation de mémoire courte - Evolution de l'état discret

En général $|V_{fi}|^2$ varie très lentement avec l'énergie E_f de $|\varphi_f\rangle$ et $K(\tau)$ est une fonction de largeur τ_c beaucoup plus petite que le temps caractéristique d'évolution de l'état discret $|\varphi_i\rangle$.

Dans ce cas, on peut remplacer dans (2.7) $c_i(t')$ par $c_i(t)$ et le sortir de l'intégrale, ce qui donne l'équation différentielle

$$\dot{c}_i(t) \approx -c_i(t) \int_0^t d\tau K(\tau) \approx -c_i(t) \int_0^\infty d\tau K(\tau) \tag{2.9}$$

(On a supposé $t \gg \tau_c$). Pour calculer $\int_0^\infty K(\tau) d\tau$, on utilise

$$\int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega+i\epsilon)\tau} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{i}{\omega+i\epsilon} = i\mathcal{P}\frac{1}{\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (2.10)$$

ce qui donne

$$\int_0^\infty d\tau k(\tau) = \frac{\Gamma}{2} + i\Delta \quad (2.11)$$

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f |V_{fi}|^2 \delta(E_i - E_f) = \text{Probabilité de transition par unité de temps de l'état discret vers le continuum} \quad (2.12)$$

$$\hbar\Delta = \mathcal{P} \sum_f \frac{|V_{fi}|^2}{E_i - E_f} = \text{Déplacement au 2ème ordre en V de l'état } |\varphi_i\rangle \text{ dû au couplage avec le continuum} \quad (2.13)$$

En supposant $\hbar\Delta$ réintégré dans E_i , on obtient finalement

$$\dot{c}_i(t) = -\frac{\Gamma}{2} c_i(t) \quad \rightarrow \quad c_i(t) = e^{-\Gamma t/2} \quad (2.14)$$

d) Etat final du système pour $t \gg \Gamma^{-1}$

En utilisant (2.6) et (2.14), on obtient pour $t \gg \Gamma^{-1}$

$$c_f(t) = -\frac{i}{\hbar} V_{fi} \int_0^t dt' e^{-i(E_i - i\hbar\frac{\Gamma}{2} - E_f)t'/\hbar} = \frac{V_{fi}}{E_f - E_i + i\hbar\frac{\Gamma}{2}} \quad (2.15)$$

En reportant (2.14) et (2.15) dans (2.4), on obtient pour $t \gg \Gamma^{-1}$

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_f \frac{V_{fi}}{E_f - E_i + i\hbar\frac{\Gamma}{2}} e^{-iE_f t/\hbar} |\varphi_f\rangle \quad (2.16)$$

Superposition d'états propres du continuum de H_0 , évoluant librement, avec une distribution d'énergie lorentzienne autour de E_i

② - Application à l'émission spontanée

a) Etats de base - Energies non perturbées

$$|\varphi_i\rangle = |b, \vec{k}; 0\rangle \quad \begin{array}{l} \text{Atome dans l'état supérieur } b \\ \text{Centre de masse d'impulsion } \hbar\vec{k} \\ \text{Vide de photons } |0\rangle \end{array} \quad (2.17)$$

$$E_i = E_b + \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2M} \quad (2.18)$$

$$|\varphi_f\rangle = |a, \vec{k}-\vec{k}; \vec{k}\vec{\epsilon}\rangle \quad \begin{array}{l} \text{Atome dans l'état inférieur } a \\ \text{Photon } \vec{k}\vec{\epsilon} \text{ émis (impulsion } \hbar\vec{k}, \text{ polarisation } \vec{\epsilon}) \\ \text{Centre de masse d'impulsion } \hbar(\vec{k}-\vec{k}) \end{array} \quad (2.19)$$

$$E_f = E_a + \frac{\hbar^2 (\vec{k}-\vec{k})^2}{2M} + \hbar\omega \quad (2.20)$$

Les éléments de matrice V_{if} de V ne sont différents de zéro que si les états reliés par V ont même impulsion globale, d'où le $\vec{k}-\vec{k}$ du centre de masse pour un photon \vec{k} émis

b) Etat final après l'émission d'un photon

- Si le système global atome + champ part à $t=0$ de l'état (2.17), l'application de (2.16) donne pour l'état du système à $t \gg \Gamma^{-1}$

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{\vec{k}\vec{\epsilon}} |a, \vec{k}-\vec{k}; \vec{k}\vec{\epsilon}\rangle \frac{\langle a, \vec{k}-\vec{k}; \vec{k}\vec{\epsilon} | V | b, \vec{k}; 0 \rangle}{\hbar(\omega - \omega_0 + i\frac{\Gamma}{2}) + \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2M} - \frac{\hbar^2 \vec{k}\cdot\vec{k}}{M}} e^{-iE_f t/\hbar} \quad (2.21)$$

On reconnaît au dénominateur de (2.21) l'énergie de recul $\hbar^2 k^2 / 2M$ et le déplacement Doppler proportionnel au produit scalaire de \vec{k} par la vitesse initiale de l'atome $\hbar \vec{k} / M$

- Au lieu de partir d'un état d'impulsion bien définie pour le centre de masse, on aurait pu partir d'une superposition linéaire de tels états

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{\vec{k}} c(\vec{k}) |b, \vec{k}; 0\rangle \tag{2.22}$$

La linéarité de l'équation de Schrödinger donne alors, compte tenu de (2.21) et (2.20)

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}\vec{E}} \gamma(\vec{k}, \vec{k}\vec{E}) e^{-i[E_a + \hbar\omega + \frac{\hbar^2(\vec{k}-\vec{k})^2}{2M}]t/\hbar} |a, \vec{k}-\vec{k}; \vec{k}\vec{E}\rangle \tag{2.23}$$

$$\gamma(\vec{k}, \vec{k}\vec{E}) = c(\vec{k}) \frac{\langle a, \vec{k}-\vec{k}; \vec{k}\vec{E} | V | b, \vec{k}; 0 \rangle}{\hbar(\omega - \omega_0 + i\frac{\Gamma}{2}) + \frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\hbar^2 \vec{k} \cdot \vec{k}}{M}} \tag{2.24}$$

c) Simplifications

- A cause du dénominateur de (2.24), $\gamma(\vec{k}, \vec{k}\vec{E})$ varie rapidement avec $|\vec{k}|$ (échelle de variation caractéristique de l'ordre de Γ/c) L'élément de matrice du numérateur varie beaucoup plus lentement avec $|\vec{k}|$. Nous le remplacerons par une constante égale à sa valeur en $|\vec{k}| = k_0 = \omega_0/c$
- De plus, nous négligerons pour simplifier la dépendance angulaire et la dépendance en \vec{E} de cet élément de matrice, ce qui revient à supposer un diagramme de rayonnement isotrope. Nous poserons donc

$$\langle a, \vec{k}-\vec{k}; \vec{k}\vec{E} | V | b, \vec{k}; 0 \rangle = v \tag{2.25}$$

où v est une constante. Compte tenu de ces simplifications, nous ne tiendrons plus compte dans ce qui suit du vecteur polarisation \vec{E} .

- Enfin, nous négligerons la variation de l'énergie de recul $\hbar^2 k^2 / 2M$ quand k varie autour de $k_0 = \omega_0/c$ sur un intervalle de largeur $\Gamma/c \ll k_0$ et la remplacerons par $\hbar^2 k_0^2 / 2M$. En posant

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0 - \frac{\hbar k_0^2}{2M} = \omega_0 \left[1 - \frac{\hbar \omega_0}{2Mc^2} \right] \approx \omega_0 \tag{2.26}$$

on obtient finalement, compte tenu de (2.25)

$$\gamma(\vec{k}, \vec{k}) = c(\vec{k}) \frac{v/\hbar}{\omega - \tilde{\omega}_0 - \frac{\hbar \vec{k} \cdot \vec{k}}{M} + i\frac{\Gamma}{2}} \tag{2.27}$$

d) Opérateur densité décrivant l'état de l'atome après l'émission

- Dans (2.23), l'état interne atomique peut être factorisé. Pour $t \gg \Gamma^{-1}$, l'atome est certainement dans l'état inférieur a .

Par contre, l'état externe et l'état du rayonnement ne se factorisent pas, ce qui traduit l'existence de corrélations entre l'état du photon émis et l'état du centre de masse

- Si l'on ne s'intéresse qu'à l'état du centre de masse, il faut prendre la trace sur le rayonnement de l'opérateur densité associé à (2.23), ce qui donne

$$\begin{aligned} \rho_{at}(t) &= \text{Tr}_{\text{Ray}} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| = \sum_{\vec{k}} \langle \vec{k} | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \vec{k} \rangle \\ &= |a\rangle \langle a| \otimes \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \sum_{\vec{k}} \gamma(\vec{k}, \vec{k}') \gamma^*(\vec{k}', \vec{k}) e^{-i \left[\frac{\hbar^2 (\vec{k} - \vec{k}')^2}{2M} - \frac{\hbar^2 (\vec{k}' - \vec{k})^2}{2M} \right] \frac{t}{\hbar}} |\vec{k} - \vec{k}\rangle \langle \vec{k}' - \vec{k}| \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\gamma(\vec{k}, \vec{k}') \gamma^*(\vec{k}', \vec{k}) = \frac{c(\vec{k}) c^*(\vec{k}') |v|^2 / \hbar^2}{\left[\omega - \tilde{\omega}_0 - \frac{\hbar \vec{k} \cdot \vec{k}}{M} + i \frac{\Gamma}{2} \right] \left[\omega - \tilde{\omega}_0 - \frac{\hbar \vec{k}' \cdot \vec{k}}{M} - i \frac{\Gamma}{2} \right]} \quad (2.29)$$

Il apparaît ainsi que, si avant l'émission il y a des cohérences entre les états $|\vec{k}\rangle$ et $|\vec{k}'\rangle$ ($c(\vec{k}) c^*(\vec{k}') \neq 0$), il apparaît après l'émission des cohérences entre les états $|\vec{k} - \vec{k}\rangle$ et $|\vec{k}' - \vec{k}\rangle$ où \vec{k} est le vecteur d'onde du photon émis

\vec{k} et \vec{k}' subissent la même translation $-\vec{k}$. Le transfert de cohérence par émission spontanée ne change pas la différence des vecteurs d'ondes $\vec{k} - \vec{k}'$

- Nous allons appliquer maintenant les résultats généraux précédents à un certain nombre d'états initiaux simples

③ Etat initial d'impulsion bien définie

$$c(\vec{k}) = \delta_{\vec{k}, \vec{k}_0} \quad |\psi(0)\rangle = |b, \vec{k}_0; 0\rangle \quad (2.30)$$

a) Cohérences initiales

- Etat externe initial : $\rho_0 = |\vec{k}_0\rangle \langle \vec{k}_0| \quad (2.31)$

- Cohérences en position $\langle \vec{r}' | \rho_0 | \vec{r}'' \rangle = \langle \vec{r}' | \vec{k}_0 \rangle \langle \vec{k}_0 | \vec{r}'' \rangle \sim e^{i \vec{k}_0 \cdot (\vec{r}' - \vec{r}'')} \quad (2.32)$

Portée infinie : aussi éloignés que soient \vec{r}' et \vec{r}'' , il y a une cohérence quantique entre $|\vec{r}'\rangle$ et $|\vec{r}''\rangle$

- Cohérences en impulsion $\langle \vec{p}' | \rho_0 | \vec{p}'' \rangle = \langle \vec{p}' | \vec{k}_0 \rangle \langle \vec{k}_0 | \vec{p}'' \rangle \sim \delta_{\vec{p}', \vec{p}_0} \delta_{\vec{p}'', \vec{p}_0} = \delta_{\vec{p}', \vec{p}''} \delta_{\vec{p}', \vec{p}_0} \quad (2.33)$
Pas de cohérences avec $\vec{p}_0 = \hbar \vec{k}_0$

b) Etat final après émission d'un photon

- On peut toujours se placer dans le référentiel où l'atome est au repos initialement $\vec{k}_0 = \vec{0} \quad (2.34)$

- L'équation (2.28) donne alors pour état atomique final, compte

tenue de (2.29) et (2.34)

II-6

$$\rho_{\text{at}} = |a\rangle\langle a| \otimes \rho_{\text{ext}} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ext}} &= \sum_{\vec{k}} |\chi(\vec{0}, \vec{k})|^2 |\vec{k}\rangle\langle -\vec{k}| \\ &= \sum_{\vec{k}} \frac{|\nu|^2 / \hbar^2}{(\omega - \tilde{\omega}_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} |\vec{k}\rangle\langle -\vec{k}| \end{aligned} \quad (2.36)$$

- D'après (2.36), l'état externe final est un mélange statistique d'états d'impulsion bien définie $-\hbar\vec{k}$ avec des poids $|\chi(\vec{0}, \vec{k})|^2$. Il n'y a donc pas, dans l'état final, de cohérences entre états d'impulsions différentes.

La distribution de probabilité de l'impulsion finale est donnée par $P(\vec{p} = \hbar\vec{k}) = |\chi(\vec{0}, \vec{k})|^2$. D'après les hypothèses faites sur le diagramme d'émission, elle est isotrope. Le long d'une direction donnée, la distribution de $|\vec{p}| = \hbar|\vec{k}| = \hbar\omega/c$ est une lorentzienne de largeur $\hbar\Gamma/c$ centrée en $\hbar\tilde{\omega}_0/c$.

c) Densité de probabilité et cohérences finales en positions

- Dans l'état final, la densité de présence en \vec{r} de l'atome est donnée par $\langle \vec{r} | \rho_{\text{ext}} | \vec{r} \rangle$. Comme, d'après (2.36), ρ_{ext} ne contient que des projecteurs $|\vec{k}\rangle\langle -\vec{k}|$ et que $\langle \vec{r} | \vec{k}\rangle\langle -\vec{k} | \vec{r} \rangle \sim |e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}|^2 = 1$ ne dépend pas de \vec{r} , la densité de présence de l'atome est, comme dans l'état initial, uniforme dans l'espace.

- Cohérences finales

$$\langle \vec{r}' | \rho_{\text{ext}} | \vec{r}'' \rangle = \sum_{\vec{k}} |\chi(\vec{0}, \vec{k})|^2 e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}' - \vec{r}'')} \quad (2.37)$$

Elles ne dépendent que de $\vec{r}' - \vec{r}''$ et sont données par la transformée de Fourier de $|\chi(\vec{0}, \vec{k})|^2$, c'est à dire par la transformée de Fourier de la distribution finale d'impulsion.

- Calcul de $\langle \vec{r}' | \rho_{\text{ext}} | \vec{r}'' \rangle$

• Comme $|\chi(\vec{0}, \vec{k})|^2$ ne dépend pas, d'après (2.36), des angles polaires de \vec{k} , l'intégrale angulaire de (2.37) ne porte que sur l'exponentielle. En prenant l'axe Oz dans l'espace des \vec{k} le long de $\vec{r}' - \vec{r}''$ et en posant

$$|\vec{r}' - \vec{r}''| = \rho \quad (2.38)$$

on obtient, en désignant par θ l'angle entre \vec{k} et $\vec{r}' - \vec{r}''$

$$\begin{aligned} \int d\Omega_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} &= 2\pi \int_0^\pi \sin\theta d\theta e^{-ik\rho \cos\theta} \\ &= 2\pi \int_{-1}^{+1} du e^{-ik\rho u} = 4\pi \frac{\sin k\rho}{k\rho} \end{aligned} \quad (2.39)$$

• Il reste à calculer l'intégrale radiale, proportionnelle à

$$\int_0^\infty k^2 dk \frac{\sin kp}{kp} \frac{1}{(k-k_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4c^2}} \quad (2.40)$$

Comme la dernière fonction est très piquée autour de $k = k_0$ et que $k_0 \gg \Gamma/c$, on peut étendre la borne inférieure de l'intégrale à $-\infty$. L'intégration par les résidus donne alors

$$\langle \vec{r}' | P_{ext} | \vec{r}'' \rangle \sim \frac{\sin k_0 p}{k_0 p} e^{-\Gamma p/2c} \quad (2.41)$$

- Discussion physique

Alors que la portée des cohérences est infinie dans l'état initial, elles ne s'étendent plus, dans l'état final, que sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde $\lambda_0 = 1/k_0$. La décroissance est encore plus rapide (exponentielle) à l'échelle c/Γ (distance parcourue par la lumière pendant une durée de vie Γ^{-1} , beaucoup plus grande que λ_0)

Le 1^{er} facteur $(\sin k_0 p / k_0 p)$ de (2.41) est lié au caractère aléatoire de la direction d'émission du photon, qui entraîne que la composante de l'impulsion de recul de l'atome le long d'une direction donnée varie aléatoirement entre $-tk_0$ et $+tk_0$. Le 2^{ème} facteur $(e^{-\Gamma p/2c})$ est dû au fait que, même si le photon était toujours émis dans la même direction, son impulsion, et donc l'impulsion de recul de l'atome, n'est pas définie à mieux que Γ/c .

Il apparaît ainsi que l'émission spontanée d'un seul photon détruit toute cohérence spatiale de portée supérieure à λ_0 .

d) Corrélations entre atome et rayonnement

- Au lieu de tracer sur le rayonnement, revenons à l'expression du vecteur d'état du système global atome + rayonnement après émission d'un photon. En faisant $\vec{k} = \vec{k}_0 = \vec{0}$ dans (2.21) et en utilisant (2.25), on obtient

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{\vec{k}} |a\rangle \otimes |-\vec{k}\rangle \otimes |\vec{k}\rangle \frac{v}{\hbar[\omega - \tilde{\omega}_0 + i\frac{\Gamma}{2}]} e^{-i(E_a + \hbar\omega + \frac{\hbar^2 k^2}{2M})\frac{t}{\hbar}} \quad (2.42)$$

↑ Etat interne ↑ Etat externe ↑ Photon

L'expression (2.42) montre l'existence d'une corrélation parfaite entre l'état externe de l'atome et l'état du photon émis. Si le photon émis a l'impulsion $\hbar\vec{k}$, le centre de masse de l'atome a l'impulsion $-\hbar\vec{k}$.

- Montrons également qu'il existe des corrélations entre la position de l'atome et l'état du photon émis

Introduisons pour cela la relation de fermeture sur \vec{r} ,

$\sum_{\vec{r}} |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| = \mathbb{1}$ et utilisons $\langle \vec{r} | -\vec{k} \rangle \sim e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$. On peut réécrire (2.42) sous la forme II-8

$$|\Psi(t)\rangle = |a\rangle \otimes \sum_{\vec{r}} |\vec{r}\rangle \otimes |\chi_{\vec{r}}\rangle \quad (2.43)$$

où $|\chi_{\vec{r}}\rangle$ est l'état du rayonnement défini par

$$|\chi_{\vec{r}}\rangle = \sum_{\vec{k}} \frac{v e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\hbar [\omega - \tilde{\omega}_0 + i\frac{\Gamma}{2}]} |\vec{k}\rangle e^{-i(E_a + \hbar\omega + \frac{\hbar^2 k^2}{2m})t/\hbar} \quad (2.44)$$

Suivant le point \vec{r} où se trouve l'atome, l'état du rayonnement n'est pas le même. Là encore, on peut dire en quelque sorte que le rayonnement mesure la position de l'atome puisque de l'état du rayonnement on peut déduire la position de l'atome (voir cours 1 et la discussion sur les corrélations quantiques de type E.P.R.)

- Montrons enfin que la résolution de la mesure en \vec{r} est moins bonne que celle de la mesure en \vec{p} . Pour le voir, étudions le produit scalaire $\langle \chi_{\vec{r}'} | \chi_{\vec{r}''} \rangle$ des 2 états du rayonnement associés aux 2 états orthogonaux de l'atome $|\vec{r}'\rangle$ et $|\vec{r}''\rangle$. D'après (2.44)

$$\langle \chi_{\vec{r}'} | \chi_{\vec{r}''} \rangle \sim \sum_{\vec{k}} \frac{|v|^2}{\hbar^2 [(\omega - \tilde{\omega}_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}]} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}'')} \quad (2.45)$$

On retrouve la même intégrale qu'en (2.37) et donc le même résultat (2.41). La mesure de la position de l'atome par le photon émis a donc une résolution finie, de l'ordre de λ_0 , alors que la mesure de l'impulsion est, d'après (2.42), parfaite (les 2 états du rayonnement associés à \vec{p}' et $\vec{p}'' \neq \vec{p}'$ sont orthogonaux).

Références

- Etat discret couplé à un continu
C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Mécanique Quantique*
Hermann Paris 1973, Complément D XIII
- Pour un autre exemple d'étude des corrélations entre une particule et un réservoir et du lien avec la théorie de la mesure, voir
V. Hakim and V. Ambegaokar, *Phys. Rev. A* 32, 423, 1982