14.02.89

Etude quantitative de la destruction des cohérences spatiales d'une particule brownienne.

(1) Equations cinétique pour l'opérateur densité de la particule.

a) Equation de Fokker - Planck pour la fonction de Wigner $w(x,p)$

Forme de l'équation

Nous démontrerons dans un chapitre ultérieur que la fonction de Wigner $w(x,p)$ (à 1 dimension) d'une particule $\mathcal{P}$, de masse M, subissant des collisions avec des particules beaucoup plus légères qu'elle, satisfait à l'équation aux dérivées partielles linéaire du 2ème ordre

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{M}\frac{\partial}{\partial x} - \gamma\frac{\partial}{\partial p}p\right] w(x,p,t) = D\frac{\partial^2}{\partial p^2} w(x,p,t) \qquad (6.1)$$

L'équation (6.1) est une équation de Fokker - Planck

Interprétation des coefficients γ et D

– Pour interpréter les coefficients γ et D apparaissant dans (6.1), il est utile de calculer à partir de (6.1) la vitesse de variation de quelques valeurs moyennes. Par exemple, multiplions les 2 membres de (6.1) par p et intégrons sur x et p. Le terme en $\partial/\partial t$ donne $\partial\langle p\rangle/dt$ où

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dp \; p\, w(x,p,t) \qquad (6.2)$$

est la valeur moyenne de p. Le terme en $\partial/\partial x$ donne une contribution nulle lors de l'intégrale sur x si l'on suppose que $w(x,p,t) \to 0$ si $|x| \to \infty$. Le terme en $\partial/\partial p$ donne $-\gamma\langle p\rangle$ après une intégration par parties sur p et compte tenu du fait que $p\,w(x,p,t) \to 0$ si $|p| \to \infty$. Enfin le terme en $\partial^2/\partial p^2$ donne 0 après une intégration par parties sur p et compte tenu du fait que $\partial w/\partial p \to 0$ si $|p| \to \infty$. Finalement, on obtient

$$\frac{d}{dt}\langle p\rangle = -\gamma\langle p\rangle \qquad (6.3)$$

ce qui montre que γ est un <u>coefficient de friction</u>, décrivant la vitesse d'amortissement de l'impulsion.

– Des calculs analogues faits après multiplication des 2 membres de (6.1) par p^2 et intégration sur x et p donnent

$$\frac{d}{dt}\langle p^2\rangle = -2\gamma\langle p^2\rangle + 2D \qquad (6.4)$$

où

$$\langle p^2\rangle = \iint dx\,dp\; p^2\, w(x,p,t) \qquad (6.5)$$

Le 1er terme de (6.4), $2\gamma\langle p^2\rangle$, décrit l'amortissement de $\langle p^2\rangle$ dû à la friction. Le second, $2D$, décrit un accroissement à vitesse constante de $\langle p^2\rangle$ et fait apparaître le coefficient D comme un <u>coefficient de diffusion de l'impulsion</u>.

Théorème fluctuation - dissipation.

L'équation (6.4) montre que $\langle p^2\rangle$ tend avec une constante de temps $(2\gamma)^{-1}$ vers la valeur d'équilibre :

$$\langle p^2 \rangle_{eq} = \frac{D}{\gamma} \tag{6.6}$$

Si le "réservoir" de particules légères avec lesquelles la particule étudiée $\mathcal{P}$ subit des collisions est en équilibre thermodynamique à la température T, on s'attend à ce que la particule $\mathcal{P}$ atteigne elle même un équilibre à la même température, de sorte que

$$\frac{\langle p^2 \rangle_{eq}}{2M} = \frac{1}{2} k_B T \tag{6.7}$$

En éliminant $\langle p^2 \rangle_{eq}$ entre (6.6) et (6.7), on obtient une relation entre D et γ

$$D = M \gamma k_B T \tag{6.8}$$

(Une telle relation a été établie directement sur un modèle simple à 3 dimensions dans le cours IV - voir (4.42)).

Equation de Fokker-Planck pour la distribution de probabilité $\mathcal{P}(p)$ de l'impulsion.

Intégrons sur x les 2 membres de (6.1). Le terme en $\partial/\partial x$ disparait. On obtient alors pour la distribution de probabilité de l'impulsion

$$\mathcal{P}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; w(x,p,t) \tag{6.9}$$

l'équation d'évolution

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \gamma \frac{\partial}{\partial p} p\right) \mathcal{P}(p,t) = D \frac{\partial^2}{\partial p^2} \mathcal{P}(p,t) \tag{6.10}$$

qui est également une équation de Fokker-Planck.

Notons qu'il n'est pas possible d'obtenir de la même manière une équation du mouvement pour la distribution de probabilité $\mathcal{R}(x)$ de la position.

b) Equation du mouvement de la fonction caractéristique $C(u,v)$

- En utilisant les formules (5.44) du cours V, on déduit immédiatement de (6.1) l'équation du mouvement suivante pour la fonction caractéristique $C(u,v)$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{M} v \frac{\partial}{\partial u} + \gamma u \frac{\partial}{\partial u}\right] C(u,v;t) = -\frac{D}{\hbar^2} u^2 C(u,v;t) \tag{6.11}$$

On obtient ici une équation aux dérivées partielles linéaire, du 1er ordre, et non pas du 2ème ordre comme (6.1) (Il n'apparait pas de termes en $\partial^2/\partial u^2$, $\partial^2/\partial v^2$, $\partial^2/\partial u \partial v$)

Il est facile de vérifier que toutes les autres représentations de l'opérateur densité $F(x,u)$, $G(p,v)$ introduites dans le cours V obéissent, comme $w(x,p)$, à des équations aux dérivées partielles du 2ème ordre. La représentation $C(u,v)$ est donc la plus commode si l'on veut résoudre l'équation du mouvement

- Faisons $v=0$ dans (6.11). On obtient l'équation du mouvement de la cohérence spatiale globale à une distance u, $\mathcal{F}(u) = C(u, v=0)$ (voir formule (5.55) du cours V)

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma u \frac{\partial}{\partial u}\right] \mathcal{F}(u,t) = -\frac{D}{\hbar^2} u^2 \mathcal{F}(u,t) \qquad (6.12)$$

L'équation (6.12) n'est autre que la transformée de Fourier par rapport à p de l'équation (6.10).

Notons enfin que la présence de la dérivée $\partial/\partial u$ dans (6.11) interdit d'obtenir de manière aussi simple une équation du mouvement pour $\mathcal{G}(v) = C(u=0, v)$.

② Résolution d'une équation aux dérivées partielles linéaire du 1^er ordre par la méthode des caractéristiques

a) Equation homogène

Problème : Trouver la fonction $C(u,t)$ de 2 variables réelles t et u, solution de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} C(u,t) + a(u,t) \frac{\partial}{\partial u} C(u,t) = 0 \qquad (6.13)$$

où $a(u,t)$ est une fonction donnée de u et t

Courbes caractéristiques

- En chaque point (t,u), considérons le vecteur $\vec{V}$ de composantes 1 sur l'axe t, $a(u,t)$ sur l'axe u. Si l'on introduit $\vec{\nabla} = (\partial/\partial t, \partial/\partial u)$, l'équation (6.13) s'écrit

$$\vec{V}.\vec{\nabla} C(u,t) = 0 \qquad (6.14)$$

et exprime que $C(u,t)$ ne varie pas quand on se déplace dans la direction $\vec{V}$ autour du point (t,u)

- Considérons alors le réseau de courbes tangentes en chaque point $\begin{cases} t \\ u \end{cases}$ au vecteur $\vec{V} \begin{cases} 1 \\ a(u,t) \end{cases}$ défini en ce point. Ces courbes sont appelées "courbes caractéristiques".
Les fonctions $C(u,t)$, solutions de (6.13), gardent la même valeur sur tous les points d'une même courbe caractéristique

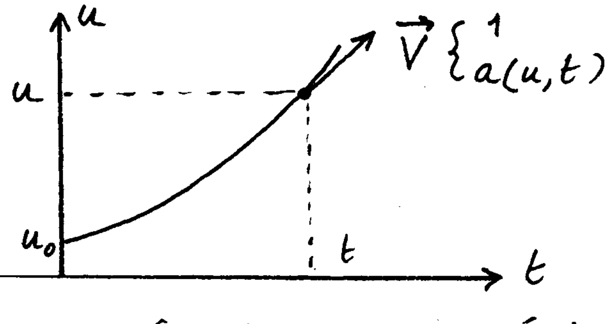

Fig. 1

- Les courbes caractéristiques sont décrites par des fonctions $u(t)$ de t, solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} u(t) = a(t, u(t)) \qquad (6.15)$$

Elles forment une famille de courbes à 1 paramètre u_0

$$u(t) = f(t, u_0) \tag{6.16}$$

Ce paramètre u_0 peut être par exemple l'ordonnée du point d'intersection de la courbe caractéristique considérée avec l'axe des u $(t=0)$ – voir la figure 1 – La fonction $f(t,u_0)$ introduite en (6.16) est donc la solution de l'équation différentielle (6.15) correspondant à la condition initiale $u(0) = u_0$.

L'équation (6.16) peut d'ailleurs être inversée et u_0 exprimé en fonction de u et t

$$u_0 = g(u,t) \tag{6.17}$$

L'équation (6.17) donne l'ordonnée de l'intersection avec l'axe des u $(t=0)$, de la courbe caractéristique qui passe par le point t,u du plan.

Solution de l'équation aux dérivées partielles

– L'équation (6.14), équivalente à (6.13), exprime que $C(u,t)$ ne varie pas quand on se déplace le long d'une courbe caractéristique et garde donc la même valeur que celle prise au point u_0 où la courbe caractéristique coupe l'axe $t=0$.

– Soit alors $C_0(u_0)$ la fonction de u_0 donnant la valeur initiale de $C(u,t)$ en $t=0$. La solution de (6.13) correspondant à cette condition initiale s'écrit

$$C(u,t) = C_0(g(u,t)) \tag{6.18}$$

Considérons en effet un point quelconque de coordonnées t,u. Ce point est sur une courbe caractéristique coupant l'axe des t en un point d'ordonnée u_0 donnée par (6.17). Comme $C(u,t)$ a la même valeur en tous les points d'une courbe caractéristique, on doit avoir $C(u,t) = C_0(u_0)$ où u_0 est relié à u et t par (6.17), d'où l'équation (6.18)

Généralisation à des fonctions de plus de 2 variable

– Considérons par exemple l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} C(u,v,t) + a_1(u,v,t)\frac{\partial}{\partial u} C(u,v,t) + a_2(u,v,t)\frac{\partial}{\partial v} C(u,v,t) = 0 \tag{6.19}$$

– Les courbes caractéristiques sont les courbes tangentes en chaque point $\{t,u,v\}$ au vecteur de coordonnées $\{1, a_1(u,v,t), a_2(u,v,t)\}$. Elles sont définies par des fonctions $u(t), v(t)$, solutions d'équations différentielles couplées

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} u(t) = a_1(t, u(t), v(t)) & (6.20.a) \\ \dfrac{d}{dt} v(t) = a_2(t, u(t), v(t)) & (6.20.b) \end{cases}$$

Elles forment une famille de courbes à 2 paramètres u_0, v_0

$$\begin{cases} u(t) = f_1(t, u_0, v_0) & (6.21.a) \\ v(t) = f_2(t, u_0, v_0) & (6.21.b) \end{cases}$$

u_0 et v_0 étant par exemple les valeurs de $u(t)$ et $v(t)$ en $t=0$.
L'inversion de (6.21) fournit les équations

$$\begin{cases} u_0 = g_1(t,u,v) & (6.22.a) \\ v_0 = g_2(t,u,v) & (6.22.b) \end{cases}$$

donnant les coordonnées u_0, v_0 de l'intersection avec le plan $t=0$ de la courbe caractéristique passant par le point de coordonnées $\{t,u,v\}$.

– L'équation (6.19) exprime que $C(u,v,t)$ garde la même valeur en tous les points d'une courbe caractéristique. Soit $C_0(u_0,v_0)$ la valeur initiale de $C(u,v,t)$ pour $t=0$. Le même raisonnement que celui fait après (6.18) montre que la solution de (6.19) correspondant à cette condition initiale s'écrit

$$C(u,v,t) = C_0(g_1(u,v,t), g_2(u,v,t)) \qquad (6.23)$$

b) Equation inhomogène

– On ajoute maintenant à (6.13) un second membre, linéaire en $C(u,t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} C(u,t) + a(u,t)\frac{\partial}{\partial u} C(u,t) = b(u,t)\, C(u,t) \qquad (6.24)$$

où $b(u,t)$ est, comme $a(u,t)$, une fonction donnée de u et t

– Considérons l'une des courbes caractéristiques $u(t)=f(t,u_0)$ introduites dans le paragraphe précédent pour l'équation homogène, et déplaçons nous le long de cette courbe.

Le membre de gauche de (6.24) donne la vitesse de variation de $C(f(t,u_0),t)$ quand on passe de t à $t+dt$. A cause du membre de droite de (6.24), cette vitesse de variation n'est plus nulle, comme dans le paragraphe précédent, mais égale à $b(f(t,u_0),t)\, C(f(t,u_0),t)$:

$$\frac{d}{dt} C(f(t,u_0),t) = b(f(t,u_0),t)\, C(f(t,u_0),t) \qquad (6.25)$$

C varie donc maintenant le long d'une courbe caractéristique, d'une manière décrite par l'<u>équation différentielle</u> (6.25). Cette équation s'intègre sans difficulté

$$C(f(t,u_0),t) = C_0(u_0)\exp\left\{\int_0^t dt'\, b(f(t',u_0),t')\right\} \qquad (6.26)$$

où $C_0(u_0)$ est la valeur de C au point d'ordonnée u_0 où la courbe caractéristique coupe l'axe $t=0$. Nous poserons

$$E(t,u_0) = \exp\left\{\int_0^t dt'\, b(f(t',u_0),t')\right\} \qquad (6.27)$$

Connaissant la fonction $b(u,t)$ et la solution (6.16) de l'équation différentielle (6.15) donnant les courbes caractéristiques, $E(t,u_0)$ s'obtient par une simple intégration

Ainsi, la présence d'un second membre dans (6.24) entraîne que sur la courbe caractéristique passant en u_0 pour $t=0$, la fonction C au point $\{t,u\}$ n'est plus égale à $C_0(u_0)$, mais à $C_0(u_0)$ que multiplie un nombre $E(t,u_0)$ dépendant de t et u_0

– On en déduit la solution de l'équation (6.24) correspondant à la condition initiale $C_0(u_0)$ en $t=0$

Plaçons nous en un point $\{t,u\}$. La caractéristique passant par ce point coupe l'axe $t=0$ en $u_0 = g(u,t)$ (voir (6.17)). D'après (6.26) et (6.27), la valeur de C en $\{t,u\}$ est égale à $C_0(u_0)\,E(t,u_0)$ où $u_0 = g(u,t)$. On a donc

$$C(u,t) = C_0(g(u,t))\,E(t,g(u,t)) \qquad (6.28)$$

– La généralisation à plus de 2 variables ne présente pas de difficulté.

Il faut remplacer, au 2ème membre de (6.19), 0 par $b(u,v,t)C(u,v,t)$. L'équation différentielle (6.25) devient

$$\frac{d}{dt}C(f_1(t,u_0,v_0),f_2(t,u_0,v_0),t) = \qquad (6.29)$$

$$= b(f_1(t,u_0,v_0),f_2(t,u_0,v_0),t)\,C(f_1(t,u_0,v_0),f_2(t,u_0,v_0),t)$$

et sa solution s'écrit

$$C(f_1(t,u_0,v_0),f_2(t,u_0,v_0),t) = C_0(u_0,v_0)\;E(t,u_0,v_0) \qquad (6.30)$$

où $C_0(u_0,v_0)$ est la valeur initiale de C en $t=0$ et où

$$E(t,u_0,v_0) = \exp\left\{\int_0^t dt'\,b(f_1(t',u_0,v_0),f_2(t',u_0,v_0),t')\right\} \qquad (6.31)$$

Finalement, la solution de l'équation aux dérivées partielles avec 2ème membre, correspondant à la condition initiale $C_0(u_0,v_0)$ en $t=0$, s'écrit

$$C(u,v,t) = C_0(g_1(u,v,t),g_2(u,v,t))\,E(t,g_1(u,v,t),g_2(u,v,t)) \qquad (6.32)$$

3) Première application : évolution temporelle de la cohérence spatiale globale à une distance u, $\mathcal{F}(u,t)$

a) Solution de l'équation du mouvement de $\mathcal{F}(u,t)$

– L'équation (6.12) est une équation aux dérivées partielles linéaire, inhomogène, à 2 variables u et t, du 1er ordre.

– L'équation différentielle (6.15) définissant les courbes caractéristiques s'écrit ici

$$\frac{d}{dt}u(t) = \gamma\,u(t) \qquad (6.33)$$

et a pour solution

$$u(t) = u_0\,e^{\gamma t} \qquad (6.34)$$

u_0 étant la valeur de $u(t)$ en $t=0$. L'inversion de (6.34) donne

$$u_0 = u\,e^{-\gamma t} \qquad (6.35)$$

c'est à dire la valeur de u_0 pour la courbe caractéristique passant par le point $\{t,u\}$

– La fonction multipliant $\mathcal{F}(u,t)$ au 2ème membre de (6.12) est

$$b(u,t) = -\frac{D}{\hbar^2}u^2 \qquad (6.36)$$

On a donc le long d'une courbe caractéristique (6.34)

$$b(u(t),t) = -\frac{D}{\hbar^2}u^2(t) = -\frac{Du_0^2}{\hbar^2}e^{2\gamma t} \qquad (6.37)$$

On en déduit pour la fonction $E(t,u_0)$ définie en (6.27)

$$E(t,u_0) = \exp\left\{-\frac{Du_0^2}{\hbar^2}\int_0^t dt'\, e^{2\gamma t'}\right\} = \exp\left\{-\frac{Du_0^2}{\hbar^2}\left(\frac{e^{2\gamma t}-1}{2\gamma}\right)\right\} \qquad (6.38)$$

– D'après (6.28), la solution de l'équation (6.12) correspondant à la valeur initiale $\mathcal{F}_0(u_0)$ s'écrit, compte tenu de (6.35) et (6.38)

$$\mathcal{F}(u,t) = \mathcal{F}_0(u e^{-\gamma t}) \exp\left\{-\frac{Du^2}{\hbar^2}\left(\frac{1-e^{-2\gamma t}}{2\gamma}\right)\right\} \qquad (6.39)$$

b) Discussion physique

Comportement aux temps courts. ($\gamma t \ll 1$)

– Pour $\gamma t \ll 1$, on peut remplacer $\mathcal{F}_0(u e^{-2\gamma t})$ par $\mathcal{F}_0(u)$ et $(1-e^{-2\gamma t})/2\gamma$ par $(1-1+2\gamma t)/2\gamma = t$, de sorte que

$$\mathcal{F}(u,t) = \mathcal{F}_0(u)\exp\left(-\frac{Du^2}{\hbar^2}t\right) \qquad (6.40)$$

On retrouve exactement le résultat du cours IV. Comme la friction n'a pas eu encore le temps d'agir ($\gamma t \ll 1$), l'effet de l'interaction avec l'environnement est simplement d'amortir la cohérence spatiale globale à une distance u avec un taux d'amortissement $Du^2/\hbar^2$, proportionnel à u^2 et à D.

– Supposons par exemple que la particule soit initialement dans une superposition linéaire de 2 paquets d'ondes identiques de largeur σ centrés en $x=-a$ et $x=+a$ (formule (5.20)). L'allure de $\mathcal{F}(u)$ est alors donnée par la figure 3a du cours V.

Supposons que a soit suffisamment grand pour que

$$\frac{Da^2}{\hbar^2}t \gg 1 \qquad (6.41)$$

t étant par ailleurs suffisamment petit pour que

$$\gamma t \ll 1 \qquad \frac{D\sigma^2}{\hbar^2}t \ll 1 \qquad (6.42)$$

Pour de tels temps, on a le droit d'utiliser (6.40) puisque $\gamma t \ll 1$. Les 2 structures latérales de la figure 3.a de V sont complètement amorties par l'exponentielle de (6.40) à cause de (6.41). Par contre la structure centrale est très peu affectée à cause de (6.42). Finalement l'effet de l'interaction avec l'environnement est de faire passer $\mathcal{F}(u)$ de la forme représentée sur la figure 3.a de V à celle représentée sur la figure 3.b : la superposition linéaire des 2 paquets d'ondes a été transformée en un mélange statistique.

Comportement aux temps longs ($\gamma t \gg 1$)

– On peut alors remplacer $\mathcal{F}_0(u e^{-\gamma t})$ par $\mathcal{F}_0(0) = 1$ et $1-e^{-2\gamma t}$ par 1, ce qui donne

$$\mathcal{F}(u) = \exp\left(-\frac{Du^2}{2\hbar^2\gamma}\right) \qquad (6.43)$$

$\mathcal{F}(u)$ tend, pour $t \gg 1/\gamma$, vers une distribution d'équilibre gaussienne.

– La transformée de Fourier de $\mathcal{F}(u)$, qui n'est autre que la fonction de distribution $\mathcal{P}(p)$ de l'impulsion, est donc également une gaussienne. Compte tenu de la formule

$$\int dx\, e^{-ipx/\hbar}\, e^{-x^2/a^2} = a\sqrt{\pi}\, e^{-p^2a^2/4\hbar^2} \tag{6.44}$$

on a

$$\mathcal{P}(p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int du\, e^{-ipu/\hbar}\, e^{-Du^2/2\hbar^2\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi D/\gamma}}\, e^{-p^2\gamma/2D} \tag{6.45}$$

– Si l'environnement est en équilibre thermodynamique à la température, on a d'après (6.8), $D = M\gamma k_BT$ et par suite

$$\mathcal{F}(u) = e^{-\frac{u^2}{2\lambda_T^2}} \qquad \mathcal{P}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi M k_BT}}\, e^{-\frac{p^2}{2Mk_BT}} \tag{6.46}$$

où

$$\lambda_T = \frac{\hbar}{\sqrt{Mk_BT}} \tag{6.47}$$

est la longueur d'onde de de Broglie thermique à la température T.

On en déduit que la particule lourde est elle aussi en équilibre à la temperature T et que la longueur de cohérence spatiale de cette particule est la longueur d'onde de de Broglie λ_T.

<u>Cas général</u>

– Revenons à la formule générale (6.39) et montrons comment on peut construire graphiquement $\mathcal{F}(u,t)$ à partir de $\mathcal{F}_0(u)$

– Ne tenons pas compte tout d'abord du dernier terme de (6.40), $\exp\{\ \}$. $\mathcal{F}(u,t) = \mathcal{F}_0(ue^{-\gamma t})$ s'obtient alors à partir de $\mathcal{F}_0(u)$ par une <u>dilatation</u> le long de l'axe u de facteur $e^{\gamma t}$ (puisque la valeur de $\mathcal{F}$ en u est égale à la valeur de $\mathcal{F}_0$ au point $ue^{-\gamma t}$ qui se transforme en u après une telle dilatation).

– Sur la fonction ainsi dilatée, l'effet de l'exponentielle de (6.39) est de réduire $\mathcal{F}$ par un facteur de réduction qui croît exponentiellement avec u^2

– La 1ère transformation (dilatation) correspond à un allongement des cohérences spatiales dû à la friction qui diminue la dispersion sur p. La seconde transformation (reduction de $\mathcal{F}$ en $\exp\{-[\ ]u^2\}$) correspond à la destruction des cohérences spatiales par la diffusion d'impulsion.

4) 2ème Application : solution de l'équation du mouvement de $C(u,v,t)$

– Pour étudier d'autres problèmes, comme l'évolution de la distribution de probabilité de la position, il faut au préalable résoudre l'équation aux dérivées partielles (6.11) qui est du 1er ordre, linéaire, inhomogène, à 3 variables u, v, t

– Courbes caractéristiques : solutions des 2 équations differentielles :

$$\frac{d}{dt}v(t) = 0 \qquad \frac{d}{dt}u(t) = \gamma u(t) - \frac{v(t)}{M} \tag{6.48}$$

$$\hookrightarrow\ v(t) = v_0 \qquad u(t) = \left(u_0 - \frac{v_0}{M\gamma}\right)e^{\gamma t} + \frac{v_0}{M\gamma} \tag{6.49}$$

où u_0 et v_0 sont les valeurs de $u(t)$ et $v(t)$ en $t=0$

– Inversion de (6.49)

$$v_0 = v \qquad u_0 = \frac{v}{M\gamma} + \left(u - \frac{v}{M\gamma}\right)e^{-\gamma t} = ue^{-\gamma t} + \frac{v}{M\gamma}(1-e^{-\gamma t}) \tag{6.50}$$

On en deduit

$$u_0 - \frac{v_0}{M\gamma} = \left(u - \frac{v}{M\gamma}\right) e^{-\gamma t} \qquad (6.51)$$

– Fonction $b(u,v,t)$ multipliant $C(u,v,t)$ au second membre de (6.11)

$$b(u,v,t) = -\frac{D}{\hbar^2} u^2 \qquad (6.52)$$

Le long d'une courbe caractéristique, on a d'après (6.52) et (6.49)

$$b(u(t),v(t),t) = -\frac{D}{\hbar^2}\left[\left(u_0 - \frac{v_0}{M\gamma}\right)e^{\gamma t} + \frac{v_0}{M\gamma}\right]^2$$

$$= -\frac{D}{\hbar^2}\left[\left(u_0 - \frac{v_0}{M\gamma}\right)^2 e^{2\gamma t} + 2\frac{v_0}{M\gamma}\left(u_0 - \frac{v_0}{M\gamma}\right)e^{\gamma t} + \frac{v_0^2}{M^2\gamma^2}\right] \qquad (6.53)$$

On en déduit pour la fonction $E(t,u_0,v_0)$ définie en (6.31)

$$E(t,u_0,v_0) = \exp\left\{\int_0^t dt'\, b(u(t'),v(t'),t')\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{D}{\hbar^2}\left[\left(u_0 - \frac{v_0}{M\gamma}\right)^2\left(\frac{e^{2\gamma t}-1}{2\gamma}\right) + 2\frac{v_0}{M\gamma}\left(u_0 - \frac{v_0}{M\gamma}\right)\left(\frac{e^{\gamma t}-1}{\gamma}\right) + \frac{v_0^2}{M^2\gamma^2}t\right]\right\} \qquad (6.54)$$

– Finalement, d'après (6.32), la solution de (6.11) correspondant à la condition initiale $C_0(u_0,v_0)$ en $t=0$, s'écrit

$$C(u,v,t) = C_0(u_0,v_0)\; E(t,u_0,v_0) \qquad (6.55)$$

où, au 2ème membre de (6.55), u_0 et v_0 sont remplacés par leur expression (6.50) et (6.51) en fonction de u, v, t. On obtient ainsi

$$C(u,v,t) = C_0\left(u e^{-\gamma t} + \frac{v}{M\gamma}(1-e^{-\gamma t}),\, v\right) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{D}{\hbar^2}\left[\left(u - \frac{v}{M\gamma}\right)^2\left(\frac{1-e^{-2\gamma t}}{2\gamma}\right) + \frac{2v}{M\gamma}\left(u - \frac{v}{M\gamma}\right)\left(\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}\right) + \frac{v^2}{M^2\gamma^2}t\right]\right\} \qquad (6.56)$$

c'est à dire encore

$$C(u,v,t) = C_0\left(u e^{-\gamma t} + \frac{v}{M\gamma}(1-e^{-\gamma t}),\, v\right)\exp\left\{-\lambda(t)u^2 - 2\mu(t)uv - \nu(t)v^2\right\} \qquad (6.57)$$

avec

$$\lambda(t) = \frac{D}{\hbar^2}\;\frac{1-e^{-2\gamma t}}{2\gamma} \qquad (6.58.a)$$

$$\mu(t) = \frac{D}{\hbar^2}\;\frac{1}{M\gamma}\left[\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma} - \frac{1-e^{-2\gamma t}}{2\gamma}\right] \qquad (6.58.b)$$

$$\nu(t) = \frac{D}{\hbar^2}\;\frac{1}{M^2\gamma^2}\left[\frac{1-e^{-2\gamma t}}{2\gamma} - 2\,\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma} + t\right] \qquad (6.58.c)$$

Le contenu physique de ces résultats sera analysé dans un paragraphe ultérieur

<u>Référence</u>

La présentation de la méthode des caractéristiques a été mise au point en collaboration avec Jean-Michel Courty à partir du livre :

V. Arnold, chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires, chapitre 2
Editions Mir, Moscou (1980) – Réimpression 1984.