

Thème choisi pour le cours 1988-89

## Cohérences quantiques et dissipation

Objectifs

- Comprendre comment une superposition linéaire de 2 états  $|\psi_1\rangle$  et  $|\psi_2\rangle$  d'un système quantique est transformée en mélange statistique par couplage dissipatif avec un environnement, et ce d'autant plus rapidement que  $|\psi_1\rangle$  et  $|\psi_2\rangle$  sont macroscopiquement différents.
- Analyser quelques exemples physiques simples : atome couplé au rayonnement, mouvement brownien...
- Discuter les implications de ces résultats pour la théorie quantique de la mesure.

Quelques rappels de mécanique quantiquePrincipe de superposition

- Les états sont linéairement superposables

$$|\psi\rangle = c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle \quad (1.1)$$

Propriétés physiques du système dans l'état  $|\psi\rangle$  qui dépendent de la phase relative de  $c_1$  et  $c_2$  et le rendent différent d'un mélange statistique des états  $|\psi_1\rangle$  et  $|\psi_2\rangle$  avec des poids  $|c_1|^2$  et  $|c_2|^2$ .

"Interférences quantiques" entre les amplitudes associées à  $|\psi_1\rangle$  et  $|\psi_2\rangle$

- Exemple d'un spin 1/2

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |\uparrow\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |\downarrow\rangle \quad (1.2)$$

Etat propre de la composante  $\vec{u} \cdot \vec{S}$  du spin sur la direction  $\vec{u}$  d'angles polaires  $\theta$  et  $\varphi$ , de valeur propre  $+\hbar/2$ . La phase relative  $\varphi$  a un sens physique précis.

Description de l'état du système par un opérateur densité  $\rho$ 

- Description plus générale que celle utilisant un vecteur d'état  $|\psi\rangle$ , car elle s'applique aussi bien au cas où la connaissance de l'état du système est complète (cas pur), qu'à celui où cette connaissance est incomplète (mélange statistique d'états).

- Propriétés générales de  $\rho$

- $\rho = \rho^\dagger$  (1.3)
- $\text{Tr} \rho = 1$  (1.4)
- $\langle u | \rho | u \rangle \geq 0 \quad \forall |u\rangle$  (1.5)
- $\langle A \rangle = \text{Tr} \rho A$  (1.6)
- $\dot{\rho}(t) = \frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] \rightarrow \rho(t) = e^{-iHt/\hbar} \rho(0) e^{iHt/\hbar}$  (1.7)

- Diagonalisation de  $\rho$ . D'après les propriétés précédentes, on peut écrire

- $\rho = \sum_i \pi_i |X_i\rangle \langle X_i|$  (1.8)
  - $\pi_i$  réel,  $\geq 0$        $\sum_i \pi_i = 1$  (1.9)
  - $\langle X_i | X_j \rangle = 0$  si  $\pi_i \neq \pi_j$        $\langle X_i | X_i \rangle = 1$  (1.10)
  - $\rho(t) = \sum_i \pi_i |X_i(t)\rangle \langle X_i(t)|$  avec  $|X_i(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |X_i\rangle$  (1.11)
- les  $\pi_i$  ne changent pas au cours d'une évolution hamiltonienne (unitaire) de  $\rho$

D'après (1.8),  $\rho$  peut être considéré comme un mélange statistique des états (orthonormés)  $|X_i\rangle$  avec des poids  $\pi_i$

- Propriété caractéristique du cas pur.

Tous les  $\pi_i$  sont nuls sauf un, qui vaut 1

$$\rho = |X_i\rangle \langle X_i| \quad \rightarrow \quad \rho^2 = \rho \quad (1.12)$$

$\rho$  est un projecteur

- Entropie statistique d'un état, caractérisant l'information manquante sur cet état

$$S = -k_B \text{Tr} \rho \text{Log} \rho = -k_B \sum_i \pi_i \text{Log} \pi_i \quad (1.13)$$

- Pour un cas pur,  $S = 0$  (aucune information manquante)
- Pour un mélange statistique, complètement indéterminé de  $N$  états, les  $\pi_i$  sont égaux à  $1/N$  et

$$S = -k_B \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \text{Log} \frac{1}{N} = k_B \text{Log} N \quad (1.14)$$

Valeur maximale de  $S$  dans un ~~sons~~ espace de dimension  $N$   
Aucune information sur l'état du système

- $S$  est invariant dans une évolution hamiltonienne (conséquence de l'invariance des  $\pi_i$  dans une telle évolution)

Matrice densité - Cohérence quantique entre 2 états

- Matrice représentant  $\rho$  dans une base orthonormée  $\{|u_n\rangle\}$

$$\rho_{nn'} = \langle u_n | \rho | u_{n'} \rangle \quad (1.15)$$

- Si  $\rho$  est un cas pur,  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$  avec  $|\psi\rangle = \sum_n c_n |u_n\rangle$ , et on a

$$P_{nn'} = \langle u_n | \Psi \rangle \langle \Psi | u_{n'} \rangle = c_n c_{n'}^* \quad (1.16) \quad \text{I-3}$$

- Si  $\rho$  est un mélange statistique,  $\rho = \sum_{\alpha} P_{\alpha} |\Psi_{\alpha}\rangle \langle \Psi_{\alpha}|$  des états  $|\Psi_{\alpha}\rangle = \sum_n c_n^{\alpha} |u_n\rangle$  avec des poids  $P_{\alpha}$ , on a

$$P_{nn'} = \sum_{\alpha} P_{\alpha} c_n^{\alpha} c_{n'}^{\alpha *} \quad (1.17)$$

- "Population" de l'état  $|u_n\rangle$  : probabilité de trouver le système dans l'état  $|u_n\rangle$

$$P_{nn} = \sum_{\alpha} P_{\alpha} |c_n^{\alpha}|^2$$

- Pour  $n \neq n'$ ,  $c_n^{\alpha} c_{n'}^{\alpha *}$  est un nombre complexe dont l'argument dépend en général de  $\alpha$

Si  $P_{nn'}$  est non nul, cela veut dire que les contributions des divers états du mélange ne se moyennent pas à zéro. Il y a une certaine cohérence entre ces contributions, d'où le nom de cohérence quantique entre  $|u_n\rangle$  et  $|u_{n'}\rangle$  parfois donné à  $P_{nn'}$ .

## Importance des cohérences quantiques en physique atomique et moléculaire

- De nombreuses expériences utilisent un champ électromagnétique oscillant avec une phase bien définie pour exciter un système atomique ou moléculaire : expériences de RMN, de spectroscopie laser.

L'oscillation forcée du dipôle magnétique ou électrique s'effectue alors avec une phase bien définie, et la cohérence quantique entre les 2 états de la transition est alors non nulle.

↳ Impossibilité de décrire le système uniquement en termes de populations (exemple de l'oscillation de Rabi).

- Même si le champ optique incident n'a pas une phase bien définie, des "cohérences Zeeman" relatives à une paire de sous-niveaux Zeeman de l'état inférieur ou supérieur, peuvent apparaître pour certaines polarisations de la lumière incidente : par exemple, excitation à partir d'un sous-niveau Zeeman de l'état inférieur d'une superposition linéaire bien définie de 2 sous-niveaux Zeeman de l'état supérieur.

Exemples d'effets physiques liés aux cohérences Zeeman : résonances de croisements de niveaux (effets Hanle, Francken), battements quantiques, diffusion multiple cohérente ...

- Relaxation, due au couplage avec l'environnement (collisions, émission spontanée ...)

Les équations de Bloch (pour la R.M.N.), les équations de Bloch optiques (pour la spectroscopie laser), décrivent l'évolution de la matrice densité atomique sous l'effet combiné du couplage avec le champ cohérent incident et des processus de relaxation.

2 types de temps de relaxation apparaissent clairement dans ces équations : temps  $T_1$  relatifs aux différences de population, temps  $T_2$  relatifs aux cohérences quantiques entre états (terminologie  $T_1$  et  $T_2$  introduite initialement en R.M.N.)

- Fragilité des cohérences

les temps  $T_2$  sont souvent beaucoup plus courts que les temps  $T_1$ .

Exemple des collisions déphasantes, qui déphasent l'oscillation du dipôle entre a et b, sans transferts entre a et b.

Autre exemple:  $T_2$  inhomogène dû à une dispersion des fréquences propres. L'amortissement des cohérences n'apparaît alors que sur ensemble de systèmes, et les cohérences peuvent éventuellement être remises en phase (méthode des échos de spins).

Cohérences quantiques et corrélations

Etude d'un exemple simple.

2 spins 1/2 A et B dans l'état singulet de spins

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |A\uparrow B\downarrow\rangle - |A\downarrow B\uparrow\rangle ] \tag{1.18}$$

$|\uparrow\rangle$  et  $|\downarrow\rangle$ : états propres de  $S_z$

Corrélations entre les 2 spins

- D'après (1.18), si l'un des 2 spins est dans l'état  $\uparrow$ , l'autre est certainement dans l'état  $\downarrow$  (corrélations parfaites)

- De plus, on peut vérifier que l'état (1.18) peut aussi s'écrire

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |A\rightarrow B\leftarrow\rangle - |A\leftarrow B\rightarrow\rangle ] \tag{1.19}$$

ou  $|\rightarrow\rangle$  et  $|\leftarrow\rangle$  sont les états propres de  $S_x$ , et plus généralement

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |A\nearrow B\searrow\rangle - |A\searrow B\nearrow\rangle ] \tag{1.20}$$

ou  $|\nearrow\rangle$  et  $|\searrow\rangle$  sont les états propres d'une composante quelconque  $\vec{u} \cdot \vec{S}$

↳ Si l'un des 2 spins pointe dans une direction quelconque, l'autre pointe dans la direction opposée.

Paradoxe E.P.R. (Einstein - Podolsky - Rosen)

- Si les 2 spins sont très éloignés l'un de l'autre et dans l'état (1.18), et qu'on mesure une composante quelconque  $\vec{u} \cdot \vec{S}_A$  de  $\vec{S}_A$ , on en déduit, grâce à la corrélation précédente, et sans aucune mesure sur  $\vec{S}_B$  qui est très loin, quelle est la valeur de  $\vec{u} \cdot \vec{S}_B$ .

Point de départ de l'argumentation de E.P.R. qui en déduisent, moyennant des hypothèses supplémentaires de séparabilité et de localité, que la mécanique quantique est une théorie incomplète.

- Tentation d'introduire des variables supplémentaires, non contenues dans la description (1.18) et qui pourraient expliquer les corrélations entre les 2 spins comme des corrélations classiques résultant d'une cause commune fluctuant dans le passé.

- Inégalités démontrées par Bell auxquelles doivent satisfaire les résultats de mesure si les variables

supplémentaires sont locales et décrites par une densité de probabilité définie positive. Contradiction entre ces inégalités et les prédictions de la mécanique quantique

- Violation expérimentale de ces inégalités de Bell. C'est la mécanique quantique qui a raison.

Les corrélations entre les 2 spins dans l'état (1.18) sont impossibles à comprendre en termes classiques. Il est impossible de considérer séparément chacun des 2 spins comme une entité ayant des propriétés propres

- La situation serait complètement différente et beaucoup plus proche d'une situation classique si, au lieu de la superposition linéaire (1.18), on considérait un mélange statistique des états  $|A\uparrow B\downarrow\rangle$  et  $|A\downarrow B\uparrow\rangle$  avec des poids égaux à  $1/2$ .

Les "corrélations quantiques non séparables" entre les 2 spins sont donc étroitement liées à l'existence d'une cohérence quantique entre les états  $|A\uparrow B\downarrow\rangle$  et  $|A\downarrow B\uparrow\rangle$ .

## Cohérences quantiques et théorie de la mesure

### Mesure idéale

- Appareil de mesure  $M$  mesurant sur un système  $S$  la grandeur  $A = \sum_n a_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$  de  $S$ .
- Si initialement  $S$  est dans un état propre  $|\varphi_n\rangle$  de  $A$  et  $M$  dans un état quelconque  $|\psi(0)\rangle$ , on s'attend à ce que le système global  $S+M$  évolue de la manière suivante

$$|\varphi_n\rangle \otimes |\psi(0)\rangle \longrightarrow |\varphi_n\rangle \otimes |M_n\rangle \quad (1.21)$$

$S$  ne change pas d'état (état propre de la mesure) et  $M$  évolue vers un état  $|M_n\rangle$  parfaitement corrélé avec  $|\varphi_n\rangle$

- Si  $M$  est dans  $|M_n\rangle$ , ceci entraîne que  $S$  est dans  $|\varphi_n\rangle$
- Les états  $|M_n\rangle$  et  $|M_p\rangle$  de  $M$  correspondant à des valeurs propres différentes  $a_p$  et  $a_n$  de  $A$  sont macroscopiquement différents (2 positions distinctes de l'aiguille de l'appareil de mesure)

### Conséquence du principe de superposition

- $S$  et  $M$  sont supposés obéir aux lois de la mécanique quantique. L'évolution associée à (1.21) est décrite par une équation de Schrödinger.

- Si initialement  $S$  est dans l'état  $\sum_n c_n |\varphi_n\rangle$  et  $M$  dans l'état  $|\psi(0)\rangle$ , la linéarité de l'équation de Schrödinger pour  $S+M$  entraîne, compte tenu de (1.21), que

$$\sum_n c_n |\varphi_n\rangle \otimes |\psi(0)\rangle \longrightarrow \sum_n c_n |\varphi_n\rangle \otimes |M_n\rangle \quad (1.22)$$

↳ Cohérences quantiques entre  $|\varphi_n\rangle \otimes |M_n\rangle$  et  $|\varphi_p\rangle \otimes |M_p\rangle$

- Les corrélations entre  $S$  et  $M$  décrites par (1.22) peuvent être du type de celles rencontrées dans l'étude du paradoxe E.P.R. Il peut arriver par exemple que (1.22) puisse être réécrit sous une forme équivalente

$$\sum_n c_n |\varphi_n\rangle \otimes |M_n\rangle = \sum_y d_y |\chi_y\rangle \otimes |M'_y\rangle \quad (1.23)$$

où les  $|\chi_y\rangle$  sont les états propres d'une autre observable  $B = \sum_y b_y |\chi_y\rangle \langle \chi_y|$  de  $S$ , ne commutant pas avec  $A$ , et où les  $|M'_y\rangle$  sont un ensemble d'états de  $M$  corrélés avec les  $|\chi_y\rangle$

- Ambiguïté :  $M$  mesure-t-il  $A$  ou  $B$  ?

Deuxième difficulté : peut-il exister des cohérences quantiques entre des états macroscopiquement différents comme  $|\varphi_n\rangle \otimes |M_n\rangle$  et  $|\varphi_p\rangle \otimes |M_p\rangle$  ?

Exemple du "chat de Schrödinger"

Le point de vue orthodoxe (Copenhague).

- Les appareils de mesure sont classiques et n'obéissent pas à la mécanique quantique
- 2 types d'évolution pour  $S$ 
  - (i) Evolution unitaire, réversible, entre 2 observations.
  - (ii) Evolution non unitaire, irréversible, lors d'une mesure.

- Evolution de  $S$ , partant de l'état  $\sum c_n |\varphi_n\rangle$ , lors d'une mesure de  $A$  (les valeurs propres  $a_n$  de  $A$  sont supposées pour simplifier non dégénérées).

- On peut trouver le résultat  $a_n$  avec la probabilité  $|c_n|^2$
- Si on trouve le résultat  $a_p$ , l'état du système  $S$  passe de  $\sum_n c_n |\varphi_n\rangle$  à  $|\varphi_p\rangle$ . Réduction du paquet d'ondes

$$\sum_n c_n |\varphi_n\rangle \longrightarrow |\varphi_p\rangle \quad (1.24)$$

- Si  $M$  effectue la mesure et qu'on n'observe pas le résultat, l'état final de  $S$  est un mélange statistique des états  $|\varphi_n\rangle$  avec des poids  $|c_n|^2$

$$\rho_{avant} = \sum_n \sum_{n'} c_n c_{n'}^* |\varphi_n\rangle \langle \varphi_{n'}| \longrightarrow \rho_{après} = \sum_n |c_n|^2 |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n| \quad (1.25)$$

Notons que dans la transformation (1.25) les cohérences quantiques entre  $|\varphi_n\rangle$  et  $|\varphi_{n'}\rangle$  ont été détruites. Notons également qu'une telle transformation s'accompagne d'une augmentation d'entropie, puisque  $S_{avant} = 0$  si  $\rho_{avant}$  est un cas pur, alors que  $S_{après}$  est positif.

Autre approche, développé notamment par Zurek, et qui sera discuté dans le cours de cette année

- Les appareils de mesure  $M$  obéissent à la mécanique quantique

- Le système  $S + M$  n'est pas isolé. Il est couplé à un environnement  $E$ . La prise en compte de ce couplage permet de résoudre, au moins partiellement, les difficultés mentionnées plus haut.

(i) L'interaction entre  $M$  et  $E$  privilégie une base particulière de  $M$ , la base des états propres de l'observable  $M$  de  $\mathcal{M}$  qui commute avec l'hamiltonien d'interaction  $H_{ME}$  entre  $M$  et  $E$ . (Dans la base des états propres de cette "observable P.N.D.", le  $T_1$  dû au couplage  $H_{ME}$  est beaucoup plus long que le  $T_2$ )

L'observable de  $S$  qui est mesurée par  $M$  est l'observable  $S$  qui est corrélée avec  $M$ . On peut montrer que les corrélations introduites entre  $S$  et  $M$  par l'interaction entre  $S$  et  $M$  ne sont pas détruites par l'interaction entre  $M$  et  $E$ , alors que les corrélations relatives à d'autres paires d'observables corrélées  $S'$  et  $M'$  de  $S$  et  $M$  sont très rapidement détruites. L'ambiguïté, mentionnée plus haut, sur ce que mesure  $M$  est donc levée.

(ii) Les cohérences quantiques entre les états macroscopiquement différents  $|\varphi_n\rangle \otimes |M_n\rangle$  et  $|\varphi_p\rangle \otimes |M_p\rangle$  (où les  $|M_n\rangle, |M_p\rangle, \dots$  sont les états propres de l'observable privilégiée  $M$  de  $\mathcal{M}$ ) sont très rapidement détruites par le couplage entre  $M$  et  $E$ .

L'évolution décrite <sup>(par)</sup> (1.22) et due au couplage entre  $S$  et  $M$  doit donc être complétée par l'évolution suivante due au couplage entre  $M$  et  $E$

$$\sum_n \sum_p c_n c_p^* |\varphi_n\rangle \langle \varphi_p| \otimes |M_n\rangle \langle M_p| \longrightarrow \sum_n |c_n|^2 |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n| \otimes |M_n\rangle \langle M_n| \quad (1.26)$$

L'interaction entre  $M$  et  $E$  brouille très vite les phases relatives entre  $c_n$  et  $c_p$ , mais ne perturbe que très lentement les modules  $|c_n|^2$ .

L'interaction entre  $M$  et  $E$  confère donc aux corrélations entre  $S$  et  $M$  un caractère beaucoup plus classique.

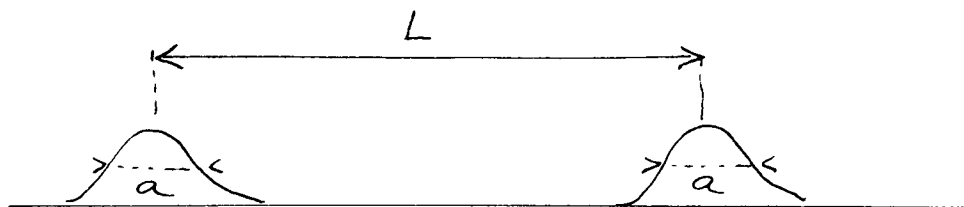
- Insistons sur le fait que l'approche précédente ne résout pas tous les problèmes relatifs à la mesure. Lors de la mesure, on observe en effet un état bien particulier du mélange statistique (1.26). Quel est le mécanisme qui fixe le choix d'un tel état ?

Plan général du cours

1<sup>ère</sup> Partie

- Etude, sur des modèles simples, du temps de relaxation

d'une cohérence quantique entre 2 états nettement distincts. Par exemple, étude de l'évolution d'une particule se trouvant initialement dans une superposition de 2 paquets d'ondes, la distance  $L$  entre les centres des 2 paquets d'ondes étant plus grande que la largeur  $a$  de chaque paquet d'ondes.



Montrer que la cohérence entre les 2 paquets d'ondes est détruite avec un temps  $L^2/l_0^2$  fois plus court que les temps caractérisant l'évolution de chaque paquet d'ondes. Interpréter physiquement un tel résultat et identifier les mécanismes ainsi que l'échelle caractéristique  $l_0$ .

### 2<sup>ème</sup> partie

Discuter quelques modèles simples de système  $S$ , d'appareil de mesure  $M$  et d'environnement  $E$

Introduire la notion de base privilégiée de  $M$  à partir de la forme de l'interaction  $H_{ME}$ .

Montrer l'existence de "règles de superselection" interdisant à  $M$  d'être dans une superposition linéaire d'états propres de l'observable privilégiée

### Bibliographie

- Mécanique Quantique, Opérateur Densité, Entropie
  - C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, Mécanique Quantique Hermann, Paris 1973, chapitre III E, Complément E<sub>III</sub>
  - R. Balian, Cours de Physique Statistique à l'École Polytechnique, Ellipses, Paris 1982, chapitres 2 et 3
- Paradoxe Einstein-Podolsky-Rosen
  - Colloque de la Fondation Hugot du Collège de France sur les Implications Conceptuelles de la Physique Quantique Journal de Physique, Colloque C2, Tome 42, Mars 1981
  - Articles de F. Laloe, J. Bell, A. Aspect, A. Shimony, B. d'Espagnat
- Articles de Zurek
  - W. H. Zurek Phys. Rev. D 24, 1516 (1981)
  - Phys. Rev. D 26, 1682 (1982)