La transformation de Power-Zienau-Woolley

A- Description des systèmes localisés de charges

① Densité de polarisation associée à un système de charges

② Induction électrique

③ Courant de polarisation et de magnétisation

B- Changement de lagrangien

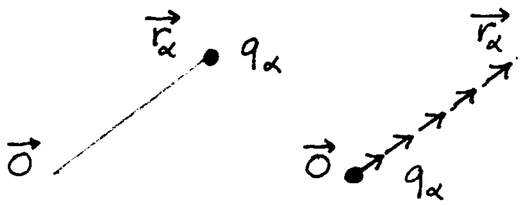
① Transformation de Power-Zienau-Woolley

② Ancien et nouveau lagrangiens

③ Développement multipolaire

④ Equivalence avec un changement de jauge - La jauge de Poincaré

Densité de polarisation associée à des charges q_α proches de $\vec{O}$

- 

Une charge q_α en $\vec{r}_\alpha$ est équivalente à une charge q_α en $\vec{O}$ + n dipoles $q_\alpha \vec{r}_\alpha / n$ alignés le long de $\overrightarrow{Or_\alpha}$

- Densité de polarisation associée aux n dipoles (limite $n \to \infty$)

$$\vec{P}(\vec{r}) = \sum_\alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{q_\alpha \vec{r}_\alpha}{n} \delta\left(\vec{r} - \frac{p+\frac{1}{2}}{n}\vec{r}_\alpha\right) = \sum_\alpha \int_0^1 du\, q_\alpha \vec{r}_\alpha \delta(\vec{r} - u\vec{r}_\alpha)$$

$\vec{P}(\vec{r}) = \sum_\alpha \int_0^1 du\, q_\alpha \vec{r}_\alpha \delta(\vec{r} - u\vec{r}_\alpha)$	$\vec{\mathcal{P}}(\vec{k}) = \sum_\alpha \int_0^1 du\, \frac{q_\alpha \vec{r}_\alpha}{(2\pi)^{3/2}} e^{-iu\vec{k}.\vec{r}_\alpha}$

(si $|\vec{k}.\vec{r}_\alpha| \ll 1$, $\vec{\mathcal{P}}(\vec{k}) \simeq \vec{d}/(2\pi)^{3/2}$ avec $\vec{d} = \sum_\alpha q_\alpha \vec{r}_\alpha$, $\vec{P}(\vec{r}) \simeq \vec{d}\,\delta(\vec{r})$)

- Calcul de $\vec{\nabla}.\vec{P}(\vec{r})$

$$i\vec{k}.\vec{\mathcal{P}} = \sum_\alpha \int_0^1 du\, \frac{q_\alpha}{(2\pi)^{3/2}} i\vec{k}.\vec{r}_\alpha e^{-iu\vec{k}.\vec{r}_\alpha} = \sum_\alpha \frac{-q_\alpha}{(2\pi)^{3/2}} e^{-iu\vec{k}.\vec{r}_\alpha}\Big|_0^1 = -\sum_\alpha \frac{q_\alpha}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha} + \sum_\alpha q_\alpha$$

$\hookrightarrow$ $\boxed{\vec{\nabla}.\vec{P}(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}) + \rho_0(\vec{r})}$ avec

$\rho(\vec{r}) = \sum_\alpha q_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha)$ Distrib. de charges

$\rho_0(\vec{r}) = \left(\sum_\alpha q_\alpha\right)\delta(\vec{r})$ Distrib. de référence (toutes les charges en O)

Induction électrique

- $\vec{\nabla}.\vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})/\varepsilon_0$ $\quad \vec{E}$: champ total $\quad$ + $\quad \vec{\nabla}.\vec{P}(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}) + \rho_0(\vec{r})$

$\hookrightarrow$ $\vec{\nabla}.\left[\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})\right] = \rho_0(\vec{r})$

- Induction électrique $\vec{D}(\vec{r})$

$$\boxed{\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla}.\vec{D}(\vec{r}) = \rho_0(\vec{r})}$$

La divergence de $\vec{D}$ est liée à la distribution de charges de référence qui est connue et statique

$$\hookrightarrow \quad \vec{D}_{/\!/}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}_0(\vec{r}) = \varepsilon_0 \frac{\left(\sum_\alpha q_\alpha\right)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$\vec{E}_0(\vec{r})$: champ coulombien créé par la distribution de charge de référence

- Cas d'un système globalement neutre

$$\sum_\alpha q_\alpha = 0 \longrightarrow \rho_0(\vec{r}) = 0 \longrightarrow \vec{\nabla}.\vec{D}(\vec{r}) = 0 \longrightarrow \vec{D} = \vec{D}_\perp \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \vec{D}_{/\!/} = \varepsilon_0 \vec{E}_{/\!/} + \vec{P}_{/\!/} = 0 \longrightarrow \vec{E}_{/\!/}(\vec{r}) = -\vec{P}_{/\!/}(\vec{r})/\varepsilon_0$$

Courant de polarisation et de magnétisation

- Comme ρ_0 est statique $\quad \vec{\nabla}.\dot{\vec{P}} + \dot{\rho} = \dot{\rho}_0 = 0$

  En comparant avec $\vec{\nabla}.\vec{J} + \dot{\rho} = 0$, on obtient $\vec{\nabla}.(\vec{J} - \dot{\vec{P}}) = 0$

  $\hookrightarrow \quad \vec{J} = \dot{\vec{P}}$ + courant de divergence nulle (c-à-d rotationnel d'un vecteur)

$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}_P(\vec{r}) + \vec{J}_M(\vec{r})$	$\vec{J}_P(\vec{r}) = \dot{\vec{P}}(\vec{r})$	$\vec{J}_M(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r})$

$\vec{J}_P(\vec{r})$: courant de polarisation

$\vec{J}_M(\vec{r})$: courant de magnétisation $\qquad \vec{M}(\vec{r})$: densité de magnétisation

- Calcul de $\vec{J}_M(\vec{r})$ et de $\vec{M}(\vec{r})$ (et de leurs T.F. $\vec{\mathcal{J}}_M(\vec{k})$ et $\vec{\mathcal{M}}(\vec{k})$)

$$\vec{\mathcal{J}}_M(\vec{k}) = \vec{\mathcal{J}}(\vec{k}) - \dot{\vec{\mathcal{P}}}(\vec{k})$$

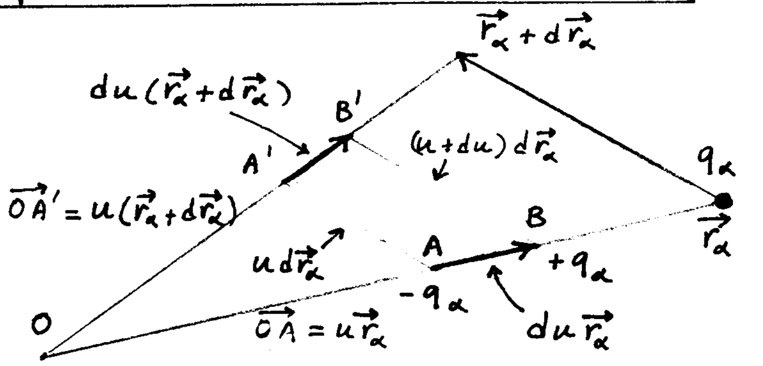
$$= \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{(2\pi)^{3/2}} \dot{\vec{r}}_\alpha e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha} - \sum_\alpha \int_0^1 du \frac{q_\alpha}{(2\pi)^{3/2}} \dot{\vec{r}}_\alpha e^{-iu\vec{k}.\vec{r}_\alpha} + \sum_\alpha \int_0^1 du \frac{q_\alpha}{(2\pi)^{3/2}} \vec{r}_\alpha (i\vec{k}.\dot{\vec{r}}_\alpha u) e^{-iu\vec{k}.\vec{r}_\alpha}$$

Intégration par parties du 2ème terme

$$\vec{\mathcal{J}}_M(\vec{k}) = i \sum_\alpha \int_0^1 u\, du \frac{q_\alpha}{(2\pi)^{3/2}} \left[(\vec{k}.\dot{\vec{r}}_\alpha)\vec{r}_\alpha - (\vec{k}.\vec{r}_\alpha)\dot{\vec{r}}_\alpha \right] e^{-iu\vec{k}.\vec{r}_\alpha} = i\vec{k} \times \vec{\mathcal{M}}(\vec{k})$$

$\vec{\mathcal{M}}(\vec{k}) = \sum_\alpha \int_0^1 u\, du \frac{q_\alpha}{(2\pi)^{3/2}} (\vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha) e^{-iu\vec{k}.\vec{r}_\alpha}$	$\vec{M}(\vec{r}) = \sum_\alpha \int_0^1 u\, du\, q_\alpha (\vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha) \delta(\vec{r} - u\vec{r}_\alpha)$

- Interprétation physique



- Quand q_α se déplace de $\vec{r}_\alpha$ à $\vec{r}_\alpha + d\vec{r}_\alpha$, le dipole élémentaire AB se déplace de AB à A'B' $\rightarrow$ Courants de signes opposés sur BB' et AA' égaux à q_α/dt. Fermons la boucle de courant BB'A'AB
  $\hookrightarrow$ moment magnétique élémentaire
  $$d\vec{M} = \frac{q_\alpha}{dt} \vec{AB} \times \vec{AA'} = q_\alpha \vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha\, u\, du$$

- Densités de courant à mettre en A'B' et AB pour compenser les courants introduits plus haut pour fermer la boucle BB'A'AB

$$d\vec{J} = q_\alpha \left[\frac{(\vec{r}_\alpha + d\vec{r}_\alpha) du}{dt} \delta[\vec{r} - u(\vec{r}_\alpha + d\vec{r}_\alpha)] - \frac{\vec{r}_\alpha\, du}{dt} \delta(\vec{r} - u\vec{r}_\alpha) \right]$$

$$= q_\alpha\, du \frac{d}{dt} \left[\vec{r}_\alpha \delta(\vec{r} - u\vec{r}_\alpha) \right] = d\vec{J}_P$$

Transformation de Power-Zienau-Woolley

- Dans le cours VII, on assimilait la distribution de charges à un dipôle $\vec{d}$ localisé en $\vec{r}=\vec{0}$ (ce qui revient à prendre $\vec{P}(\vec{r}) = \vec{d}\,\delta(\vec{r})$), et on ajoutait à L la dérivée totale dF_{GM}/dt où $F_{GM} = -\vec{d}.\vec{A}_\perp(\vec{0})$
- On va ajouter maintenant à L dF/dt où
$$F = -\int d^3r\, \vec{P}(\vec{r}).\vec{A}_\perp(\vec{r}) = -\int d^3k\, \vec{\mathcal{P}}^*(\vec{k}).\vec{\mathcal{A}}_\perp(\vec{k})$$
qui se réduit bien à $-\vec{d}.\vec{A}_\perp(\vec{0})$, si on assimile $\vec{P}(\vec{r})$ à $\vec{d}\,\delta(\vec{r})$ (calcul d'ordre le plus bas en a_0/λ)
- De plus, $\vec{A}_\perp$ est considéré maintenant, non plus comme un champ extérieur, mais comme un champ ayant sa dynamique propre.

Ancien lagrangien (en jauge de Coulomb)

$$L = L_P + L_R + L_I \qquad\qquad L_P = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2} - V_{coul}$$
$$L_R = \varepsilon_0 \int d^3k \left[\dot{\vec{\mathcal{A}}}_\perp^*(\vec{k}).\dot{\vec{\mathcal{A}}}_\perp(\vec{k}) - c^2k^2\, \vec{\mathcal{A}}_\perp^*(\vec{k}).\vec{\mathcal{A}}_\perp(\vec{k})\right]$$
$$L_I = \int d^3k \left[\vec{\mathcal{J}}^*(\vec{k}).\vec{\mathcal{A}}_\perp(\vec{k}) + \vec{\mathcal{J}}(\vec{k}).\vec{\mathcal{A}}_\perp^*(\vec{k})\right] = \int d^3r\, \vec{J}(\vec{r}).\vec{A}_\perp(\vec{r})$$

Nouveau lagrangien

$$L' = L + \frac{dF}{dt} = L_P + L_R + L'_I$$
$$L'_I = L_I + \frac{dF}{dt} = \int d^3r\, \vec{J}(\vec{r}).\vec{A}_\perp(\vec{r}) - \int d^3r \left[\dot{\vec{P}}(\vec{r}).\vec{A}_\perp(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}).\dot{\vec{A}}_\perp(\vec{r})\right]$$
$$= \int d^3r \left[\vec{J}(\vec{r}) - \dot{\vec{P}}(\vec{r})\right].\vec{A}_\perp(\vec{r}) + \int d^3r\, \vec{P}(\vec{r}).\left[-\dot{\vec{A}}_\perp(\vec{r})\right] = \int d^3r\, \vec{J}_M(\vec{r}).\vec{A}_\perp(\vec{r}) + \int d^3r\, \vec{P}(\vec{r}).\vec{E}_\perp(\vec{r})$$

Integration par parties $\quad \int d^3r \left[\vec{\nabla}\times\vec{M}(\vec{r})\right].\vec{A}_\perp(\vec{r}) = \int d^3r\, \vec{M}(\vec{r}).\vec{\nabla}\times\vec{A}_\perp(\vec{r}) = \int d^3r\, \vec{M}(\vec{r}).\vec{B}(\vec{r})$

$$\hookrightarrow \boxed{L'_I = \int d^3r \left[\vec{M}(\vec{r}).\vec{B}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}).\vec{E}_\perp(\vec{r})\right]}$$

Ne fait plus intervenir que les champs $\vec{E}_\perp$ et $\vec{B}$ et les densités $\vec{P}$ et $\vec{M}$

Développement multipolaire

- Développement en série de Taylor de $\vec{E}_\perp(\vec{r})$ et $\vec{B}(\vec{r})$ au voisinage de $\vec{r}=\vec{0}$
- Contribution de $\vec{E}_\perp$

Ordre 0
$$\int d^3r\, \vec{P}(\vec{r}).\vec{E}_\perp(\vec{0}) = \vec{d}.\vec{E}_\perp(\vec{0}) \quad \text{avec} \quad \vec{d} = \int d^3r\, \vec{P}(\vec{r}) = \sum_\alpha q_\alpha \vec{r}_\alpha$$

Ordre 1
$$\sum_{ij} \int d^3r\, P_j(\vec{r})\, x_i\, \partial_i E_{\perp j}(\vec{0}) = \sum_{ij} q_{ij}\, \partial_i E_{\perp j}(\vec{0})$$
$$q_{ij} = \int d^3r \sum_\alpha \int_0^1 du\, x_i\, r_{\alpha j}\, \delta(\vec{r}-u\vec{r}_\alpha) = \sum_\alpha \int_0^1 u\,du\, r_{\alpha i} r_{\alpha j} = \frac{1}{2}\sum_\alpha q_\alpha \left(r_{\alpha i} r_{\alpha j} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\vec{r}_\alpha^{\,2}\right)$$
(On a retiré au tenseur $r_{\alpha i} r_{\alpha j}$ sa trace qui ne contribue pas à L'_I car $E_\perp$ est de divergence nulle) $\qquad q_{ij}$: tenseur moment quadrupolaire

- Contribution de $\vec{B}$ à l'ordre 0
$$\int d^3r\, \vec{M}(\vec{r}).\vec{B}(\vec{0}) = \vec{m}.\vec{B}(\vec{0}) \qquad \vec{m} : \text{moment magnétique orbital}$$
$$\vec{m} = \int d^3r \sum_\alpha \int_0^1 u\,du\, q_\alpha\, \vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha\, \delta(\vec{r}-u\vec{r}_\alpha) = \sum_\alpha \frac{1}{2} q_\alpha (\vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha)$$

Changement de jauge (défini par $\chi(\vec{r},t)$) $\quad L' = L + \frac{d}{dt}\sum_\alpha q_\alpha \chi(\vec{r}_\alpha, t)$

Transformation de P.Z.W $\quad L' = L - \frac{d}{dt}\int d^3r\, \vec{P}(\vec{r}).\vec{A}_\perp(\vec{r}) = L - \frac{d}{dt}\left[\sum_\alpha q_\alpha \int_0^1 du\, \vec{r}_\alpha.\vec{A}_\perp(u\vec{r}_\alpha)\right]$

équivalente à un changement de jauge avec $\chi(\vec{r}) = -\int_0^1 du\, \vec{r}.\vec{A}_\perp(u\vec{r})$

Cette équivalence n'est valable que si les charges q_α sont repérées par rapport à un seul point de référence O (N'est plus valable pour 2 systèmes séparés, repérés par rapport à 2 points distincts $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$).

Potentiel vecteur dans la nouvelle jauge

$$\vec{A}'_{/\!/}(\vec{r}) = \vec{A}_{/\!/}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r}) = \vec{0} - \vec{\nabla}\int_0^1 du\, \vec{r}.\vec{A}_\perp(u\vec{r}) \qquad \vec{A}'_\perp(\vec{r}) = \vec{A}_\perp(\vec{r})$$

- Une identité utile : $u\frac{\partial}{\partial u} f(u\vec{r}) = (\vec{r}.\vec{\nabla})\, f(u\vec{r})$

- Calcul de $\vec{r}.\vec{A}'(\vec{r})$

$$\vec{r}.\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{r}.(\vec{A}'_\perp(\vec{r}) + \vec{A}'_{/\!/}(\vec{r})) = \vec{r}.\vec{A}_\perp(\vec{r}) - \int_0^1 du\, (\vec{r}.\vec{\nabla})(\vec{r}.\vec{A}_\perp(u\vec{r}))$$
$$= \vec{r}.\vec{A}_\perp(\vec{r}) - \int_0^1 du\, \frac{1}{u}\, u\frac{\partial}{\partial u}\left[u\vec{r}.\vec{A}_\perp(u\vec{r})\right] = 0$$

Alors que $\vec{\mathcal{A}}_\perp(\vec{k}) \perp \vec{k} \ \forall \vec{k}$ dans l'ancienne jauge, $\vec{A}'(\vec{r}) \perp \vec{r} \ \forall \vec{r}$ dans la nouvelle jauge

- Autre manière d'écrire $\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}_\perp(\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r})$

$$\vec{\nabla}\chi(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\int_0^1 du\, \vec{r}.\vec{A}_\perp(u\vec{r}) = -\int_0^1 du\, \vec{A}_\perp(u\vec{r}) - \sum_{i=x,y,z}\int_0^1 du\, r_i\, \vec{\nabla} A_{\perp i}(u\vec{r})$$

$$-\int_0^1 du\, \vec{A}_\perp(u\vec{r}) = -u\vec{A}_\perp(u\vec{r})\Big|_0^1 + \int_0^1 du\, u\frac{\partial}{\partial u}\vec{A}_\perp(u\vec{r}) = -\vec{A}_\perp(\vec{r}) + \int_0^1 du\, (\vec{r}.\vec{\nabla})\vec{A}_\perp(u\vec{r})$$

$$\hookrightarrow \vec{A}'(\vec{r}) = \int_0^1 du\left[(\vec{r}.\vec{\nabla})\vec{A}_\perp(u\vec{r}) - \sum_i r_i\vec{\nabla}A_{\perp i}(u\vec{r})\right] = -\int_0^1 du\, \vec{r}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_\perp(u\vec{r})\right]$$
$$= -\int_0^1 du\, u\vec{r}\times\left[\vec{\nabla}_{u\vec{r}}\times\vec{A}_\perp(u\vec{r})\right] = -\int_0^1 u\, du\, \vec{r}\times\vec{B}(u\vec{r})$$

Potentiel scalaire dans la nouvelle jauge

$$U'(\vec{r}) = U(\vec{r}) - \frac{\partial\chi}{\partial t} = U_{coul} + \int_0^1 du\, \vec{r}.\dot{\vec{A}}_\perp(u\vec{r})$$
$$= -\int_0^1 du\, \vec{r}.\vec{E}_{/\!/}(u\vec{r}) - \int_0^1 du\, \vec{r}.\vec{E}_\perp(u\vec{r}) = -\int_0^1 du\, \vec{r}.\vec{E}(u\vec{r})$$

La jauge de Poincaré

$$\boxed{U'(\vec{r}) = -\int_0^1 du\, \vec{r}.\vec{E}(u\vec{r}) \qquad \Bigg| \qquad \vec{A}'(\vec{r}) = -\int_0^1 u\, du\, \vec{r}\times\vec{B}(u\vec{r})}$$

U' et $\vec{A}'$ s'expriment en fonction des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Ces formules généralisent celles relatives à des champs $\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$ uniformes

$$U_0 = -\int_0^1 du\, \vec{r}.\vec{E}_0 = -\vec{r}.\vec{E}_0 \qquad \vec{A}_0 = -\int_0^1 u\, du\, \vec{r}\times\vec{B}_0 = -\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{B}_0$$