Equivalence des points de vue $\vec{A}.\vec{p}$ et $\vec{E}.\vec{r}$
Illustration sur des processus à un ou deux photons

1 - Amplitude de transition

- Hypothèses sur le système atomique et sur le champ incident
- Etat initial et état final
- Matrice S

2 - Vérification directe de l'égalité entre les amplitudes de transition calculées dans un point de vue et dans l'autre

- Processus à 1 photon
- Processus à 2 photons
- Application à la transition 1s - 2s de l'hydrogène

3 - Résolution de quelques paradoxes

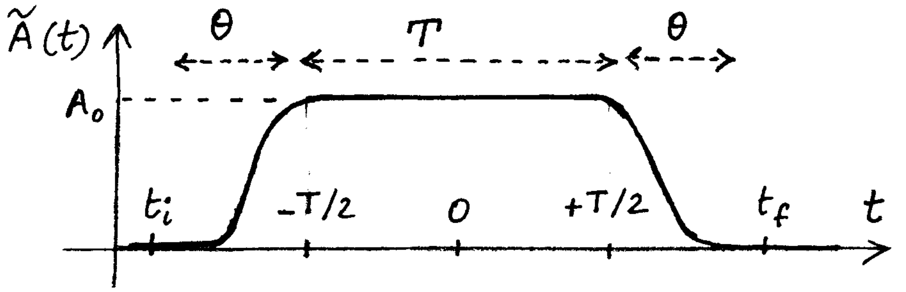
- Processus non résonnants à 1 photon
- quelques autres pièges à éviter

Atome en $\vec{O}$ $\quad H_P = \dfrac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{r})$

Etats d'énergie $|a\rangle, |b\rangle, |r\rangle \dots$ d'énergies $E_a, E_b, E_r \dots$

Champ extérieur incident en $\vec{O}$ (On suppose $U_e = 0$)

$$\vec{A}_e(\vec{O},t) = \vec{e}_z\, A(t) = \vec{e}_z\, \tilde{A}(t) \cos\omega t \qquad \tilde{A}(t) : \text{enveloppe}$$



$T \gg 1/\omega$

$T \gg \theta$

$\theta \gg 1/\omega$

$$\vec{E}_e(\vec{O},t) = -\dot{\vec{A}}_e(\vec{O},t) = \vec{e}_z \left[\omega \tilde{A}(t) \sin\omega t - \dot{\tilde{A}}(t) \cos\omega t\right]$$

Le 2ème terme, en $\dot{\tilde{A}}$, est négligeable puisque $\theta \gg 1/\omega$

Etat initial à t_i et état final à t_f

Comme $\tilde{A}(t_i) = \tilde{A}(t_f) = 0$, $\vec{p}$ et H_P ont le même sens physique (quantité de mouvement et énergie totale) dans les 2 points de vue $\vec{A}.\vec{p}$ et $\vec{E}.\vec{r}$ à $t = t_i$ et $t = t_f$

$|\psi(t_i)\rangle = |a\rangle$ $\quad$ Energie totale E_a

$|\psi(t_f)\rangle = |b\rangle$ $\quad$ Energie totale E_b

Transition $a - b$ $\quad E_b - E_a = \hbar\omega_0$

Matrice S (Elément de matrice de U en représentation interaction)

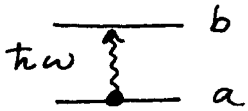
$$S_{ba} = \lim_{\substack{t_2 \to +\infty \\ t_1 \to -\infty}} \langle b | e^{iH_0 t_2/\hbar} \, U(t_2, t_1) \, e^{-iH_0 t_1/\hbar} | a \rangle$$

$$H = H_0 + V \qquad H_0 = H_P = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

- Dans le point de vue $\vec{A}.\vec{p}$, $V = -\frac{q}{m}\vec{p}.\vec{A}_e(\vec{0},t) + \frac{q^2}{2m}\vec{A}_e^{\,2}(\vec{0},t)$

  (Le $2^{\text{ème}}$ terme en q^2 est un nombre n'agissant pas sur les particules)
- Dans le point de vue $\vec{E}.\vec{r}$, $V = -q\,\vec{r}.\vec{E}_e(\vec{0},t)$

Processus à 1 photon



ω voisin de ω_{ba}

Point de vue $\vec{A}.\vec{p}$

$$S_{ba} = \frac{2\pi}{i\hbar} M_{ba} \frac{A_0}{2} \delta^{(T)}(\omega - \omega_{ba}) \qquad M_{ba} = -\frac{q}{m}\langle b|\vec{e}_z.\vec{p}|a\rangle = -\frac{q}{m}(P_z)_{ba}$$

$\delta^{(T)}$: Fonction delta de largeur $\sim 1/T$

Point de vue $\vec{E}.\vec{r}$

$$S'_{ba} = \frac{2\pi}{i\hbar} M'_{ba} \frac{A_0}{2} \delta^{(T)}(\omega - \omega_{ba}) \qquad M'_{ba} = -i\omega q \langle b|\vec{e}_z.\vec{r}|a\rangle = -i\omega q (z)_{ba}$$

Vérification directe de l'équivalence entre les 2 points de vue

- Basée sur l'identité $\quad (P_z)_{ba} = i\,\omega_{ba}\, m\,(z)_{ba}$

  elle même déduite de

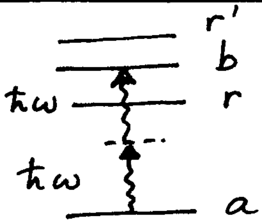
$$[z, H_P] = i\hbar \frac{\partial H_P}{\partial P_z} = i\hbar \frac{P_z}{m}$$

- On en déduit $\quad M_{ba} = \frac{\omega_{ba}}{\omega} M'_{ba}$
- A résonance $(\omega_{ba} = \omega)$, $M_{ba} = M'_{ba} \longrightarrow S_{ba} = S'_{ba}$

  Hors résonance $(\omega_{ba} \neq \omega)$, $\delta^{(T)}(\omega - \omega_{ba}) = 0 \longrightarrow S_{ba} = 0 = S'_{ba}$

  ↳ Dans tous les cas , $S_{ba} = S'_{ba}$

Processus à 2 photons



ω voisin de $\omega_{ba}/2$

Pas de niveau intermédiaire résonnant à 1 photon

Point de vue $\vec{A}.\vec{p}$

$$S_{ba} = \frac{2\pi}{i\hbar} \mathcal{Q}_{ba} \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 \delta^{(T)}(2\omega - \omega_{ba}) \qquad \mathcal{Q}_{ba} = \left(\frac{q}{m}\right)^2 \sum_r \frac{(P_z)_{br}(P_z)_{ra}}{\hbar(\omega - \omega_{ra})}$$

r : niveaux atomiques "relais"

Point de vue $\vec{E}\cdot\vec{r}$

$$S'_{ba} = \frac{2\pi}{i\hbar}\, \mathcal{P}'_{ba} \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 \delta^{(T)}(2\omega-\omega_{ba}) \qquad \mathcal{P}'_{ba} = -\omega^2 q^2 \sum_r \frac{(z)_{br}(z)_{ra}}{\hbar(\omega-\omega_{ra})}$$

Vérification directe de l'identité entre les 2 points de vue

- Basée sur les identités $[z,p_z]=i\hbar$, $(p_z)_{br} = i\omega_{br}\, m\, (z)_{br}$ ... qui permettent de démontrer que

$$\mathcal{P}_{ba} = \mathcal{P}'_{ba} \quad \text{si} \quad \omega_{ba} = 2\omega$$

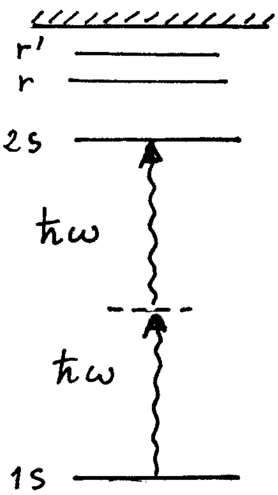
- A résonance ($\omega_{ba}=2\omega$), $\mathcal{P}_{ba} = \mathcal{P}'_{ba} \longrightarrow S_{ba} = S'_{ba}$

  Hors résonance ($\omega_{ba}\neq 2\omega$), $\delta^{(T)}(2\omega-\omega_{ba}) = 0 \rightarrow S_{ba} = 0 = S'_{ba}$

  ↳ Dans tous les cas , $S_{ba} = S'_{ba}$

Application à la transition 1s − 2s de H (F. Bassani, J.J. Forney, A. Quattropani, Phys. Rev. Lett. 39, 1070 (1977))

Contribution des divers niveaux relais à $\mathcal{P}_{2S-1S} = \mathcal{P}'_{2S-1S}$ (en unités de $-q^2\omega^2 a_0^2/3E_I$)



	Point de vue $\vec{A}\cdot\vec{p}$	Point de vue $\vec{E}\cdot\vec{r}$
Tous les niveaux relais (y compris le continuum)	11,8	11,8
1 niveau r : 2p	0	17,9
2 niveaux r : 2p, 3p	2,7	14,8
3 niveaux r : 2p, 3p, 4p	3,6	14,1
10 niveaux r : 2p, 3p ... 11p	4,5	13,5

- Chaque niveau relais ne contribue pas de la même façon dans chaque point de vue. Entre t_i et t_f, $\vec{A}_e \neq \vec{0}$, et un même état mathématique $|r\rangle$ ne décrit pas le même état physique dans les 2 points de vue. Par contre, la somme des contributions de tous les niveaux r est la même.

- $(\text{Contribution de } r)_{\vec{A}\cdot\vec{p}} / (\text{Contribution de } r)_{\vec{E}\cdot\vec{r}} = (\omega_{br}\,\omega_{ra})/\omega^2$

  D'autant plus grande en module que r est plus haut

  ↳ Convergence plus lente de la série dans le point de vue $\vec{A}\cdot\vec{p}$
  Calculs plus rapides et plus précis dans le point de vue $\vec{E}\cdot\vec{r}$

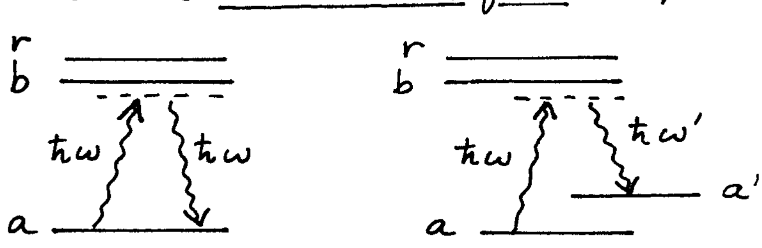
Processus non résonnants à 1 photon

- Si $|a\rangle$ est l'état fondamental, $|b\rangle$ un niveau excité de largeur naturelle Γ, et si ω diffère de ω_{ba} tout en étant voisin de ω_{ba}, on est tenté de remplacer $\delta^{(T)}(\omega-\omega_{ba})$ dans S_{ba} et S'_{ba} par une lorentzienne de largeur Γ

  ↳ Résultats différents dans les 2 points de vue ($M_{ba} \neq M'_{ba}$ si $\omega \neq \omega_{ba}$)

– Erreur du raisonnement précédent : Pour avoir une résolution meilleure que Γ, il faut attendre un temps $T \gg \Gamma^{-1}$. L'état $|b\rangle$ s'est certainement desexcité et ne peut être le véritable état final du processus.

Le processus réel est un processus de diffusion à 2 photons (Rayleigh ou Raman), l'énergie globale étant conservée à l'issue du processus



Le processus non résonnant à 1 photon est englobé dans un processus résonnant à 2 photons pour lequel les prédictions des 2 points de vue sont identiques

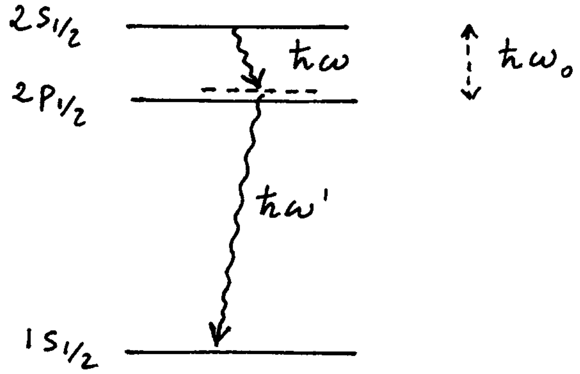
– Même si b est très proche de résonance, nécessité de sommer sur tous les autres niveaux relais possibles pour retrouver le même résultat dans les 2 points de vue.

Exemple célèbre de la transition de Lamb $2S_{1/2} \rightarrow 2P_{1/2}$

Forme de raie pour $\omega \neq \omega_0$

Résultats différents dans les 2 points de vue si on affecte une largeur Γ à $2P_{1/2}$

En réalité, le processus est à 2 photons : émission stimulée d'un photon $\hbar\omega$, émission spontanée d'un photon $\hbar\omega'$



L'état $2P_{1/2}$ est un état intermédiaire particulier parmi tous les états nP possibles. Il faut sommer sur tous ces états pour retrouver le même résultat dans les 2 points de vue

Série convergeant beaucoup plus vite dans le point de vue $\vec{E}\cdot\vec{r}$

Quelques autres pièges à éviter

– Nécessité d'utiliser des fonctions d'ondes exacte pour retrouver le même résultat dans les 2 points de vue

– Dans les processus d'absorption de 2 photons de fréquences différentes ω, ω', il faut ajouter les amplitudes associées aux 2 ordres temporels possibles : ω puis ω', ω' puis ω

Idem pour un processus de diffusion $a, \vec{k}\vec{\varepsilon} \rightarrow a', \vec{k}'\vec{\varepsilon}'$ (absorption $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ puis émission $\vec{k}'\vec{\varepsilon}'$, émission $\vec{k}'\vec{\varepsilon}'$ puis absorption $\vec{k}\vec{\varepsilon}$, processus simultanés associés à $H_{I2} = -q^2A^2/2m$)

– Cas où $\vec{A}_e(\vec{0},t)$ n'est pas branché lentement et débranché lentement sur un intervalle de temps $\Theta \gg 1/\omega$

Une impulsion "carrée" de $\vec{A}_e$ n'est pas équivalente à une impulsion "carrée" de $\vec{E}_e$.

$$\vec{E}_e(\vec{0},t) = -\dot{\vec{A}}_e(\vec{0},t)$$

Un branchement soudain de $\vec{A}_e$ donne naissance à une impulsion de champ $\vec{E}_e$ (Ne pas oublier le terme en $\dot{A}$)