Transformation unitaire associée à un changement de lagrangien

(1) Changement de lagrangien en théorie classique

Coordonnées et vitesses généralisées - Etat dynamique
Premier lagrangien
Nouveau lagrangien équivalent
Grandeurs physiques
Hamiltonien

(2) Les 2 descriptions quantiques associées aux 2 lagrangiens

Notations
2 opérateurs fondamentaux
Quantification à partir du premier lagrangien.
Quantification à partir du second lagrangien

(3) Correspondance entre les 2 descriptions quantiques

Operateurs associés à x, P_L, $P_{L'}$.
Transformation unitaire faisant passer d'un point de vue à l'autre.
Lien entre les 2 opérateurs associés à une même grandeur physique
Transformation du vecteur d'état
Relation entre les 2 hamiltoniens
Correspondance entre les 2 équations de Schrödinger
Equivalence des prédictions physiques.

Etude sur un cas simple, à une dimension, permettant des notations précises et non ambigues

Coordonnées et vitesses : x, $\dot{x}$

Premier lagrangien : $L(x,\dot{x})$

Moment conjugué de x par rapport à L : $P_L = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}$

Equation de Lagrange $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dfrac{\partial L}{\partial x}$

Hamiltonien associé à L : $H_L = \dot{x} P_L - L$

Nouveau lagrangien L' équivalent à L

$$L'(x,\dot{x}) = L(x,\dot{x}) + \frac{d}{dt}F(x,t) = L(x,\dot{x}) + \dot{x}\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,t)}{\partial t}$$

Moment conjugué de x par rapport à L'

$$P_{L'} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial F}{\partial x} = P_L + \frac{\partial F}{\partial x}$$

P_L et $P_{L'}$ représentent 2 grandeurs physiques différentes, c'est à dire 2 fonctions différentes de x et $\dot{x}$

Etat dynamique : $x, \dot{x}$

caractérisé par $\{x, p_L\}$ avec L, par $\{x, p_{L'}\}$ avec L'

p_L et $p_{L'}$ étant liés par $p_{L'} = p_L + \frac{\partial F}{\partial x}$

Grandeur physique : $\mathcal{G}(x, \dot{x})$; ne dépend que de l'état dynamique $x, \dot{x}$

Exemple : énergie cinétique $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$

Dans le formalisme hamiltonien, $\mathcal{G}(x, \dot{x})$ exprimé en fonction de x, p_L

$L \rightarrow \mathcal{G}$ décrit par $G_L(x, p_L)$

$L' \rightarrow \mathcal{G}$ décrit par $G_{L'}(x, p_{L'})$

$G_L(x, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = \mathcal{G}(x, \dot{x})$ $\qquad$ $G_{L'}(x, \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}}) = \mathcal{G}(x, \dot{x})$

Pour un même état dynamique, même valeur de la grandeur physique, prévisions physiques identiques.

$\hookrightarrow \quad G_L(x, p_L) = G_{L'}(x, p_L + \frac{\partial F}{\partial x})$

Hamiltonien

$L \rightarrow H_L(x, p_L) = \dot{x} p_L - L$

$L' \rightarrow H_{L'}(x, p_{L'}) = \dot{x} p_{L'} - L' = \dot{x}(p_L + \frac{\partial F}{\partial x}) - (L + \dot{x}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t})$

$= \dot{x} p_L - L - \frac{\partial F}{\partial t} = H_L(x, p_L) - \frac{\partial F}{\partial t}$

Si $\partial F/\partial t \neq 0$, $H_{L'}(x, p_{L'}) \neq H_L(x, p_L)$ quand $p_{L'} = p_L + \frac{\partial F}{\partial x}$

$\hookrightarrow$ H_L et $H_{L'}$ représentent 2 grandeurs physiques différentes

Si $\partial F/\partial t = 0$, H_L et $H_{L'}$ représentent tous deux l'énergie.

Notations

Indice (1) : description quantique construite sur L. Point de vue (1)

Indice (2) : " " " " L'. " " " (2)

Exemple : position représentée par l'opérateur $X^{(1)}$ dans le point de vue (1), $X^{(2)}$ dans le point de vue (2)

Etat quantique : $|\psi^{(1)}\rangle$, $|\psi^{(2)}\rangle$

2 opérateurs fondamentaux

X : opérateur multiplication par x

P : opérateur $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ $\qquad \longrightarrow \qquad [X, P] = i\hbar$

Quantification à partir de L

$x \rightarrow X^{(1)} = X$ $\qquad$ $p_L \rightarrow P_L^{(1)} = P$

$\mathcal{G}(x, \dot{x}) = G_L(x, p_L) \longrightarrow G^{(1)} = G_L(X, P)$

$H_L(x, p_L) \longrightarrow H_L^{(1)}(X, P)$

Quantification à partir de L'

$$x \longrightarrow X^{(2)} = X \qquad\qquad p_{L'} \longrightarrow P_{L'}^{(2)} = P$$

$$\mathcal{G}(x,\dot{x}) = G_{L'}(x, p_{L'}) \longrightarrow G^{(2)} = G_{L'}(X, P)$$

$$H_{L'}(x, p_{L'}) \longrightarrow H_{L'}^{(2)} = H_{L'}(X, P)$$

En général, $G_L(X,P)$ et $G_{L'}(X,P)$ sont 2 opérateurs différents : $G^{(1)} \neq G^{(2)}$. De même $|\psi^{(1)}\rangle \neq |\psi^{(2)}\rangle$

Une même grandeur physique, un même état physique sont en général représentés par des objets mathématiques différents dans le point de vue (1) et le point de vue (2)

Réciproquement, un même objet mathématique décrit des objets physiques différents suivant qu'il est considéré dans un point de vue ou dans l'autre

---

Opérateurs associés à x, p_L, $p_{L'}$

- Grandeur physique x $\qquad x \to X^{(1)} = X \qquad x \to X^{(2)} = X$

  Même opérateur X dans les 2 points de vue

- p_L et $p_{L'}$ sont 2 grandeurs physiques différentes reliées par $p_{L'} = p_L + \dfrac{\partial F}{\partial x}$

- Grandeur physique p_L

  $p_L \to P_L^{(1)} = P \qquad\qquad p_L \to P_L^{(2)} = \ ?$

  Pour trouver $P_L^{(2)}$, on écrit $p_L = p_{L'} - \dfrac{\partial F}{\partial x}$ qui donne dans le point de vue (2) :

$$P_L^{(2)} = P_{L'}^{(2)} - \frac{\partial F}{\partial X} = P - \frac{\partial F}{\partial X}$$

- Grandeur physique $p_{L'}$

  $p_{L'} \to P_{L'}^{(1)} = \ ? \qquad\qquad p_{L'} \to P_{L'}^{(2)} = P$

  Pour trouver $P_{L'}^{(1)}$, on écrit $p_{L'} = p_L + \dfrac{\partial F}{\partial x}$ qui donne dans le point de vue (1) :

$$P_{L'}^{(1)} = P_L^{(1)} + \frac{\partial F}{\partial X} = P + \frac{\partial F}{\partial X}$$

- Récapitulation

Point de vue (1)	Point de vue (2)
$X^{(1)} = X$	$X^{(2)} = X$
$P_L^{(1)} = P$	$P_L^{(2)} = P - \dfrac{\partial F}{\partial X}$
$P_{L'}^{(1)} = P + \dfrac{\partial F}{\partial X}$	$P_{L'}^{(2)} = P$

Transformation unitaire faisant passer d'un point de vue à l'autre

$$X^{(2)} = T X^{(1)} T^+ \qquad P_L^{(2)} = T P_L^{(1)} T^+ \qquad P_{L'}^{(2)} = T P_{L'}^{(1)} T^+$$

avec $T = \exp[i F(X)/\hbar]$

Liens entre les 2 opérateurs représentant une même grandeur physique

$$G_L(x, p_L) = G_{L'}(x, p_L + \frac{\partial F}{\partial x}) \implies G_L(X, P) = G_{L'}(X, P + \frac{\partial F}{\partial X}) \implies$$

$$\Rightarrow T G_L(X,P) T^+ = T G_{L'}(X, P + \frac{\partial F}{\partial X}) T^+ = G_{L'}(T X T^+, T(P + \frac{\partial F}{\partial X}) T^+) = G_{L'}(X,P)$$

Or $G_L(X,P) = G^{(1)}$, $G_{L'}(X,P) = G^{(2)}$

Donc $\quad T G^{(1)} T^+ = G^{(2)}$

Transformation des vecteurs d'état

Préservation des équations aux valeurs propres des observable représentant des grandeurs physiques
$|\psi^{(1)}\rangle$ état propre de $G^{(1)}$ $\longrightarrow$ $|\psi^{(2)}\rangle$ état propre de $G^{(2)} = T G^{(1)} T^+$ avec la même valeur propre

$$\hookrightarrow \quad |\psi^{(2)}\rangle = T |\psi^{(1)}\rangle$$

Relation entre les 2 hamiltoniens

$$H_{L'}(x, p_{L'}) = H_{L'}(x, p_L + \frac{\partial F}{\partial x}) = H_L(x, p_L) - \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow \quad H_{L'}(X, P + \frac{\partial F}{\partial X}) = H_L(X,P) - \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow \quad T H_{L'}(X, P + \frac{\partial F}{\partial X}) T^+ = T H_L(X,P) T^+ - T \frac{\partial F}{\partial t} T^+$$

$$\hookrightarrow \quad H_{L'}(X, T(P + \frac{\partial F}{\partial X}) T^+) = T H_L(X,P) T^+ - \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow \quad H^{(2)} = T H^{(1)} T^+ - \frac{\partial F}{\partial t}$$

Préservation de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi^{(2)}\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} T |\psi^{(1)}\rangle = i\hbar \left(\frac{dT}{dt}\right) |\psi^{(1)}\rangle + T i\hbar \frac{d}{dt} |\psi^{(1)}\rangle$$

$$= -\frac{\partial F}{\partial t} T |\psi^{(1)}\rangle + T H |\psi^{(1)}\rangle = \left(-\frac{\partial F}{\partial t} + T H T^+\right) T |\psi_1\rangle = H^{(2)} |\psi^{(2)}\rangle$$

Correspondance entre les opérateurs d'évolution

$$|\psi^{(2)}(t)\rangle = T(t) |\psi^{(1)}(t)\rangle = T(t)\, U^{(1)}(t,t_0) |\psi^{(1)}(t_0)\rangle =$$

$$= T(t)\, U^{(1)}(t,t_0)\, T^+(t_0) |\psi^{(2)}(t_0)\rangle = U^{(2)}(t,t_0) |\psi^{(2)}(t_0)\rangle$$

$$\hookrightarrow \quad U^{(2)}(t,t_0) = T(t)\, U^{(1)}(t,t_0)\, T^+(t_0)$$

Equivalence des prédictions physiques

Etat initial $\quad |\varphi^{(1)}(t_0)\rangle \qquad |\varphi^{(2)}(t_0)\rangle = T(t_0) |\varphi^{(1)}(t_0)\rangle$

Etat final $\quad |\chi^{(1)}(t)\rangle \qquad |\chi^{(2)}(t)\rangle = T(t) |\chi^{(1)}(t)\rangle$

$$\langle \chi^{(2)}(t) | U^{(2)}(t,t_0) | \varphi^{(2)}(t_0)\rangle = \langle \chi^{(1)}(t) | U^{(1)}(t,t_0) | \varphi^{(1)}(t_0)\rangle$$