Formulation covariante (suite)
(Champ libre ou couplé à des sources extérieures)

C - Quantification covariante avec une métrique indéfinie

① Introduction d'un $2^{ème}$ produit scalaire et d'une $2^{ème}$ norme

② Pourquoi introduire une $2^{ème}$ métrique non définie positive ?

a - Nouvelle condition d'hermiticité imposée aux potentiels
b - Opérateurs a_μ et $\bar{a}_\mu$ - Développement des potentiels en a_μ et $\bar{a}_\mu$
c - Relations de commutation.
d - Comment choisir la nouvelle métrique pour résoudre les difficultés posées par la construction de l'espace des états.

③ Détermination de la nouvelle métrique

④ Construction des kets physiques

D - Champ quantique couplé à 2 charges fixes

① Hamiltonien.

② Déplacement énergétique de l'état fondamental - Réinterprétation de la loi de Coulomb.

a - Calcul perturbatif.
b - Discussion physique - Echange de photons scalaires.
c - Calcul exact.

③ Nouvel état fondamental du champ.

Définition du $2^{ème}$ produit scalaire $(\phi|\psi)$

- Produit scalaire et norme habituels dans l'espace des états
  $\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^*$ $\qquad \langle\psi|\psi\rangle > 0$ nul si et seulement si $|\psi\rangle = 0$
- Operateur linéaire M hermitique unitaire
  $M = M^+ = M^{-1} \qquad M^2 = \mathbb{1}$ $\qquad$ valeurs propres $m_i = +1, -1$
- Nouveau produit scalaire (notations de Dirac "rondes")
  $(\phi|\psi) = \langle\phi|M|\psi\rangle \qquad (\phi|\psi) = (\psi|\phi)^*$ car $M = M^+$
- Nouveau "bra" associé au nouveau produit scalaire
  $(\psi| = \langle\psi|M$ $\qquad$ (par contre $|\psi) = |\psi\rangle$)

Nouvelle norme $\quad (\psi|\psi) = \langle\psi|M|\psi\rangle$ réelle

$M|m_i\rangle = m_i|m_i\rangle \quad \rightarrow \quad (\psi|\psi) = \sum_i m_i |\langle m_i|\psi\rangle|^2$

Comme $m_i = +1$ ou -1, $(\psi|\psi)$ peut être négatif
Métrique non définie positive (indéfinie).

<u>Nouvel adjoint $\bar{A}$ d'un opérateur linéaire A</u>

- $(\phi|A|\psi) = \langle\phi|MA|\psi\rangle$ d'après $(\phi| = \langle\phi|M$
- Nouvel adjoint $\bar{A}$ défini par : $(\phi|A|\psi) = (\psi|\bar{A}|\phi)^* \quad \forall\ \phi, \psi$

  ↳ $|\psi') = A|\psi) \iff (\psi'| = (\psi|\bar{A}$
- Relation entre le nouvel adjoint $\bar{A}$ et l'adjoint habituel A^+ de A

$$(\phi|\bar{A}|\psi) = \langle\phi|M\bar{A}|\psi\rangle$$
$$= (\psi|A|\phi)^* = \langle\psi|MA|\phi\rangle^* = \langle\phi|A^+M^+|\psi\rangle$$

↳ $M\bar{A} = A^+M^+ \rightarrow \bar{A} = MA^+M$ car $M = M^+$ et $M^2 = \mathbb{1}$

- Hermiticité dans la nouvelle métrique : $A = \bar{A}$

<u>Valeurs et vecteurs propres</u> : Notion indépendante de la métrique

$$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \longrightarrow A|\psi) = \lambda|\psi)$$

<u>Nouvelle valeur moyenne</u> $\quad (A)_\psi = \dfrac{(\psi|A|\psi)}{(\psi|\psi)} \quad$ (si $(\psi|\psi) \neq 0$)

- Réelle si $A = \bar{A}$
- Attention : pas d'interprétation probabiliste attachée à $(A)_\psi$

  $A = \bar{A}$ n'entraine pas $A = A^+$ et les valeurs propres de $A = \bar{A}$ ne sont pas forcément réelles.

<u>Nouvelle condition imposée aux potentiels</u> : $A_\mu = \bar{A}_\mu$ (au lieu de $A_\mu = A_\mu^+$)

- Pour des grandeurs non véritablement physiques comme A_S, il n'est pas grave d'avoir $A_S \neq A_S^+$ et des valeurs propres non réelles (A_S n'est pas mesurable). Par contre, on doit avoir $\vec{E} = \vec{E}^+$, $\vec{B} = \vec{B}^+$, $\vec{A}_\perp = \vec{A}_\perp^+$
- $A_\mu = \bar{A}_\mu$ entraine que (A_μ) est réel. Possibilité d'associer aux équations quantiques du mouvement des équations classiques entre grandeurs réelles

<u>Définition de a_μ et $\bar{a}_\mu$</u> : idem que pour a_μ et a_μ^+ en remplaçant $\mathcal{A}_\mu^+$ et Π_μ^+ par $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ et $\bar{\Pi}_\mu$

$$↳ \quad A_\mu(\vec{r}) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}} \left[a_\mu(\vec{k})e^{i\vec{k}.\vec{r}} + \bar{a}_\mu(\vec{k})e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right]$$

$$H_R = \int d^3k\ \hbar\omega\left[(\bar{a}_\varepsilon a_\varepsilon + \tfrac{1}{2}) + (\bar{a}_{\varepsilon'}a_{\varepsilon'} + \tfrac{1}{2}) + (\bar{a}_\ell a_\ell + \tfrac{1}{2}) - (\bar{a}_s a_s + \tfrac{1}{2})\right]$$

<u>Relations de commutation</u> (idem qu'avant en prenant les nouveaux adjoints)

$$[\mathcal{A}_i(\vec{k}), \bar{\Pi}_j(\vec{k}')] = i\hbar\,\delta_{ij}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}') \qquad [\mathcal{A}_S(\vec{k}), \bar{\Pi}_S(\vec{k}')] = \delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$↳ \begin{cases} [a_i(\vec{k}), \bar{a}_j(\vec{k}')] = \delta_{ij}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}') \\ [a_s(\vec{k}), \bar{a}_s(\vec{k}')] = -\delta(\vec{k}-\vec{k}') \end{cases} \longrightarrow [a_\mu(\vec{k}), \bar{a}_\nu(\vec{k}')] = -g_{\mu\nu}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

↳ Mêmes relations de commutation covariantes entre $A_\mu(\vec{r},t)$ et $A_\nu(\vec{r}',t')$

<u>Comment choisir M ?</u>

- Si l'on trouve M tel que $\bar{a}_j = Ma_j^+M = a_j^+ \qquad \bar{a}_s = Ma_s^+M = -a_s^+$

$$[a_s(\vec{k}), \bar{a}_s(\vec{k}')] = -\delta(\vec{k}-\vec{k}') \longrightarrow [a_s(\vec{k}), a_s^+(\vec{k}')] = +\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

Bon signe rétabli pour $[a_s, a_s^+]$ sans toucher à $[a_i, a_j^+]$

- Construction habituelle possible pour l'espace des états des photons scalaires

$$|n_s\rangle = \frac{(a_s^+)^{n_s}}{\sqrt{n_s!}}|0_s\rangle \qquad \langle n_s|n'_s\rangle = \delta_{n_s n'_s}$$

$$a_s^+|n_s\rangle = \sqrt{n_s+1}\,|n_s+1\rangle \qquad a_s|n_s\rangle = \sqrt{n_s}\,|n_s-1\rangle \qquad a_s|0_s\rangle = 0$$

- H_R devient défini positif

$$H_R = \int d^3k\ \hbar\omega\left[\left(a_\varepsilon^+ a_\varepsilon + \tfrac{1}{2}\right) + \left(a_{\varepsilon'}^+ a_{\varepsilon'} + \tfrac{1}{2}\right) + \left(a_\ell^+ a_\ell + \tfrac{1}{2}\right) + \left(a_s^+ a_s + \tfrac{1}{2}\right)\right]$$

- Possibilité d'avoir des états à nouvelle norme négative
$[a_s, \bar{a}_s] = -\delta(\vec{k}-\vec{k}')$ entraîne que les états à 1 photon scalaire sont dans ce cas
- Prix à payer : $A_s = \bar{A}_s$ et $\bar{a}_s = -a_s^+ \longrightarrow A_s = -A_s^+$
Les valeurs propres de A_s sont imaginaires pures ! Pas grave car A_s n'est pas mesurable (par contre on a toujours $\vec{A}_\perp = \vec{A}_\perp^+$)

<u>Détermination de M</u> pour que $\bar{a}_\ell = a_\ell^+$ et $\bar{a}_s = -a_s^+$

- M défini par $M|n_s\rangle = (-1)^{n_s}|n_s\rangle$
- $M a_s^+|n_s\rangle = (-1)^{n_s+1}\sqrt{n_s+1}\,|n_s+1\rangle = -a_s^+ M|n_s\rangle \quad \forall\, n_s$
$\hookrightarrow\ M a_s^+ = -a_s^+ M \longrightarrow \bar{a}_s = M a_s^+ M = -a_s^+$
- $(n'_s|n_s) = \langle n_s|M|n_s\rangle = (-1)^{n_s}\,\delta_{n_s n'_s}$

<u>Opérateurs a_d et a_g</u> : $a_d = i(a_\ell - a_s)/\sqrt{2} \qquad a_g = (a_\ell + a_s)/\sqrt{2}$

- $[a_d(\vec{k}), a_d^+(\vec{k}')] = \delta(\vec{k}-\vec{k}') = [a_g(\vec{k}), a_g^+(\vec{k}')] \qquad [a_d, a_g^+] = [a_d^+, a_g] = 0$
$\bar{a}_d = -i(\bar{a}_\ell - \bar{a}_s)/\sqrt{2} = -i(a_\ell^+ + a_s^+)/\sqrt{2} = -i\,a_g^+ \longrightarrow [a_d, \bar{a}_d] = 0$
- Condition supplémentaire (champ libre) $a_d|\psi\rangle = 0$

<u>Etats physiques</u> <u>(champ libre)</u>

$$|n_\varepsilon, n_{\varepsilon'}, 0_d, n_g\rangle = \frac{(a_\varepsilon^+)^{n_\varepsilon}(a_{\varepsilon'}^+)^{n_{\varepsilon'}}(a_g^+)^{n_g}}{\sqrt{n_\varepsilon!\, n_{\varepsilon'}!\, n_g!}}|0\rangle$$

- Dans un état physique, les anciennes et nouvelles valeurs moyenne des grandeurs véritablement physiques coïncident.
- Rôle des "photons g" : arbitraire de jauge.

<u>Hamiltonien</u>

- Densité de charge $\rho_e(\vec{r}) = q_1\delta(\vec{r}-\vec{r}_1) + q_2\delta(\vec{r}-\vec{r}_2) \quad \rho_e(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[q_1 e^{-i\vec{k}.\vec{r}_1} + q_2 e^{-i\vec{k}.\vec{r}_2}\right]$
- $H = H_R + V$

$$V = \int d^3r\, c\,\rho_e(\vec{r})\,A_s(\vec{r}) = c\,q_1 A_s(r_1) + c\,q_2 A_s(\vec{r}_2)$$
$$= \int d^3k\ c\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega}}\left[a_s(\vec{k})\rho_e^*(\vec{k}) + \bar{a}_s(\vec{k})\rho_e(\vec{k})\right]$$

<u>Calcul perturbatif</u> du déplacement ΔE de l'état fondamental $|0\rangle$ du champ

$$\Delta E = \langle 0|V|0\rangle + \langle 0|V\frac{\mathcal{P}}{E_0 - H_R}V|0\rangle + \cdots \qquad \mathcal{P} = \mathbb{1} - |0\rangle\langle 0|$$

Expression valable même si est non hermitique ($V = \bar{V} \quad V = -V^+$)

$$\Delta E = 0 + \int d^3k\ \frac{\langle 0|V|\vec{k}s\rangle\langle\vec{k}s|V|0\rangle}{-\hbar\omega} \qquad |\vec{k}s\rangle = a_s^+(\vec{k})|0\rangle$$

$$\begin{cases} \langle 0|V|\vec{k}s\rangle = c\int d^3k' \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega'}}\ \langle 0|a_s(\vec{k}')a_s^+(\vec{k})|0\rangle \rho_e^*(\vec{k}') = c\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega}}\ \rho_e^*(\vec{k}) \\ \langle \vec{k}s|V|0\rangle = c\int d^3k' \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega'}}\ \langle 0|a_s(\vec{k})\bar{a}_s(\vec{k}')|0\rangle \rho_e(\vec{k}') = -c\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega}}\ \rho_e(\vec{k}) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \quad \Delta E = \int d^3k \frac{\rho_e^*(\vec{k})\rho_e(\vec{k})}{2\varepsilon_0 k^2} = V_{coul} = \varepsilon^1_{coul} + \varepsilon^2_{coul} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$$

Emission virtuelle d'un photon scalaire par une charge et réabsorption de ce photon par la même charge ou par l'autre

Autre manière d'écrire $\quad H = H_R + V \qquad H = \int d^3k\ H_s(\vec{k})$

$$H_s(\vec{k}) = \hbar\omega\left[-\bar{a}_s(\vec{k})a_s(\vec{k}) + \lambda^*(\vec{k})\,a_s(\vec{k}) + \lambda(\vec{k})\bar{a}_s(\vec{k}) + \tfrac{1}{2}\right] \qquad \lambda(\vec{k}) = \frac{c}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega}}\ \rho_e(\vec{k})$$

Translation sur a_s et $\bar{a}_s$ $\quad b_s(\vec{k}) = a_s(\vec{k}) - \lambda(\vec{k}) \qquad \bar{b}_s(\vec{k}) = \bar{a}_s(\vec{k}) - \lambda^*(\vec{k})$

$$[b_s(\vec{k}), \bar{b}_s(\vec{k}')] = [a_s(\vec{k}), \bar{a}_s(\vec{k}')] = -\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

Opérateur de translation $\quad T = \exp\left\{\int d^3k\left[\lambda(\vec{k})\bar{a}_s(\vec{k}) - \lambda^*(\vec{k})\,a_s(\vec{k})\right]\right\}$

$T\bar{T} = \bar{T}T = \mathbb{1}$ $\quad$ Unitaire dans le nouveau sens

$$\bar{T}a_s(\vec{k})T = a_s(\vec{k}) - \lambda(\vec{k}) \qquad \bar{T}\bar{a}_s(\vec{k})T = \bar{a}_s(\vec{k}) - \lambda^*(\vec{k})$$

Démonstration à partir de $e^A e^B = e^{A+B}e^{\frac{1}{2}[A,B]}$, identité valable si $[[A,B],A] = [[A,B],B] = 0$

Diagonalisation exacte de H

$$\hbar\omega\,\bar{T}\left[-\bar{a}_s(\vec{k})a_s(\vec{k}) + \tfrac{1}{2}\right]T = \hbar\omega\left[-(\bar{a}_s-\lambda^*)(a_s-\lambda) + \tfrac{1}{2}\right] =$$

$$\hbar\omega\left[-\bar{a}_s a_s + \lambda^* a_s + \lambda\bar{a}_s - \lambda^*\lambda + \tfrac{1}{2}\right] = H_s(\vec{k}) - \hbar\omega\lambda^*(\vec{k})\lambda(\vec{k})$$

$H = H_R + V = \int d^3k\ H_s(\vec{k})$ a le même spectre que H_R décalé de

$$\int d^3k\ \hbar\omega\,\lambda^*(\vec{k})\lambda(\vec{k}) = \int d^3k\ \frac{\rho_e^*(\vec{k})\rho_e(\vec{k})}{2\varepsilon_0 k^2} = V_{coul}$$

Nouvel état fondamental du champ $\quad |\tilde{0}\rangle = |0_\varepsilon\, 0_{\varepsilon'}\, 0_\ell\, \tilde{0}_s\rangle$

$$|\tilde{0}_s\rangle = \bar{T}|0_s\rangle \qquad a_s|0_s\rangle = 0 \ \longrightarrow\ [a_s(\vec{k}) - \lambda(\vec{k})]\,|\tilde{0}_s\rangle = 0$$

$|\tilde{0}_s\rangle$: état cohérent

Condition supplémentaire $\quad \left[a_\ell(\vec{k}) - a_s(\vec{k}) + \dfrac{\rho(\vec{k})}{k\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega}}\right]|\psi\rangle = 0 \quad$ (Cours précédent)

$$\hookrightarrow\ [a_\ell(\vec{k}) - a_s(\vec{k}) + \lambda(\vec{k})]\,|\psi\rangle = 0$$

Le nouveau vide est physique car $a_\ell|0_\ell\rangle = 0 \quad (a_s-\lambda)|\tilde{0}_s\rangle$

Nouvelle valeur moyenne de $U(\vec{r}) = c\,A_s(\vec{r})$ dans $|\tilde{0}_s\rangle$

$$\frac{\langle\tilde{0}_s|U(\vec{r})|\tilde{0}_s\rangle}{\langle\tilde{0}_s|\tilde{0}_s\rangle} = c\int d^3k\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\ e^{i\vec{k}.\vec{r}}\ \frac{\langle\tilde{0}_s|a_s(\vec{k})|\tilde{0}_s\rangle}{\langle\tilde{0}_s|\tilde{0}_s\rangle} + c.c.$$

$$= c\int d^3k\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\ \lambda(\vec{k})\,e^{i\vec{k}.\vec{r}} + c.c. = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\ \frac{\rho_e(\vec{k})}{\varepsilon_0 k^2}\,e^{i\vec{k}.\vec{r}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\ \frac{\rho_e(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = U_{coul}(\vec{r})$$

Addendum au cours V

Relations indépendantes de toute métrique

- Relation de commutations canoniques entre $A_s(\vec{r})$ et $\Pi_s(\vec{r}\,')$ et leurs transformées de Fourier $\mathcal{A}_s(\vec{k})$ et $\pi_s(\vec{k}')$.

$$[A_s(\vec{r}), \Pi_s(\vec{r}\,')] = i\hbar\, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$$\xrightarrow{T.F.} \quad [\mathcal{A}_s(\vec{k}), \pi_s(\vec{k}')] = \frac{1}{(2\pi)^3}\iint d^3r\, d^3r'\, [A_s(\vec{r}), \Pi_s(\vec{r}\,')]\, e^{-i(\vec{k}.\vec{r}+\vec{k}'.\vec{r}\,')} = i\hbar\, \delta(\vec{k}+\vec{k}')$$

$$[\mathcal{A}_s(\vec{k}), \pi_s(-\vec{k}')] = i\hbar\, \delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

- Définition de l'opérateur a_s associé à α_s (varie en $e^{-i\omega t}$)

$$a_s(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega}}\left[\omega\, \mathcal{A}_s(\vec{k}) - \frac{i}{\varepsilon_0}\, \pi_s(\vec{k})\right]$$

Espace des états

- Les opérateurs précédents agissent dans l'espace des états quantiques du rayonnement qui doit être, d'après les postulats de la M.Q. un espace de Hilbert, donc muni d'une norme définie positive

- Chaque opérateur G possède un adjoint G^+.
Les opérateurs hermitiques ($G = G^+$) ont des valeurs propres réelles et les postulats habituels de la mesure peuvent leur être appliqués.

Quelle condition imposer à l'opérateur potentiel scalaire $A_s(\vec{r})$?

Choix habituel
$$\begin{cases} A_s(\vec{r}) = A_s^+(\vec{r}) \\ \mathcal{A}_s(-\vec{k}) = \mathcal{A}_s^+(\vec{k}) \end{cases}$$

Conséquences de ce choix

$$[\mathcal{A}_s(\vec{k}), \pi_s^+(\vec{k}')] = i\hbar\, \delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$a_s^+(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega}}\left[\omega\, \mathcal{A}_s^+(\vec{k}) + \frac{i}{\varepsilon_0}\, \pi_s^+(\vec{k})\right]$$

$$[a_s(\vec{k}), a_s^+(\vec{k}')] = -\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$A_s(\vec{r}) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\left[a_s(\vec{k})\, e^{i\vec{k}.\vec{r}} + a_s^+(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right]$$

$$[A_\mu(\vec{r},t), A_\nu(\vec{r}\,',t')] = \frac{i\hbar}{\varepsilon_0 c}\, g_{\mu\nu}\, D(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t')$$

$$H_R^S = -\int d^3k\, \hbar\omega\, a_s^+(\vec{k})\, a_s(\vec{k})$$

Conclusions

- A_s est hermitique et on peut lui appliquer les postulats de la mesure
- Le signe − de $[a_s, a_s^+]$ interdit de considérer a_s comme un opérateur d'annihilation, a_s^+ comme un opérateur de création. Difficultés sérieuses pour construire l'espace des états de photons scalaires

Autre choix
$$\begin{cases} A_s(\vec{r}) = -\,A_s^+(\vec{r}) \\ \mathcal{A}_s(-\vec{k}) = -\,\mathcal{A}_s^+(\vec{k}) \end{cases}$$

Conséquences de ce choix

$$[\mathcal{A}_s(\vec{k}), \pi_s^+(\vec{k}')] = -i\hbar\, \delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$a_s^+(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega}}\left[\omega\, \mathcal{A}_s^+(\vec{k}) + \frac{i}{\varepsilon_0}\, \pi_s^+(\vec{k})\right]$$

$$[a_s(\vec{k}), a_s^+(\vec{k}')] = +\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$A_s(\vec{r}) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\left[a_s(\vec{k})\, e^{i\vec{k}.\vec{r}} - a_s^+(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right]$$

$$[A_\mu(\vec{r},t), A_\nu(\vec{r}\,',t')] = \frac{i\hbar}{\varepsilon_0 c}\, g_{\mu\nu}\, D(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t')$$

$$H_R^S = +\int d^3k\, \hbar\omega\, a_s^+(\vec{k})\, a_s(\vec{k})$$

Conclusions

- Le signe + est rétabli pour $[a_s, a_s^+]$ et la construction de l'espace des états des photons scalaires redevient possible
- A_s est antihermitique et a donc des valeurs propres imaginaires pures. Les postulats de la mesure ne peuvent pas être appliqués à A_s.

Autre manière de présenter le choix $A_S = -A_S^+$

Introduction d'une 2ème métrique dans l'espace de Hilbert

Rien n'empêche d'introduire dans l'espace de Hilbert précédent une deuxième métrique, éventuellement indéfinie (non définie positive)

Chaque opérateur G possède un 2ème adjoint $\overline{G} = M G^+ M$

Condition imposée sur A_S $\qquad A_S(\vec{r}) = \overline{A}_S(\vec{r}) \qquad \mathcal{A}_S(-\vec{k}) = \overline{\mathcal{A}}_S(\vec{k})$

A_S est hermitique pour la nouvelle métrique (équivalent quantique de $A_S = A_S^*$)

Conséquences de cette condition.

$\downarrow$ $\quad [\mathcal{A}_S(\vec{k}), \overline{\Pi}_S(\vec{k}')] = i\hbar\, \delta(\vec{k}-\vec{k}')$

$\downarrow$ $\quad \overline{a}_S(\vec{k}) = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega}} \left[\omega\, \overline{\mathcal{A}}_S(\vec{k}) + \dfrac{i}{\varepsilon_0} \overline{\Pi}_S(\vec{k})\right]$

$\downarrow$ $\quad [a_S(\vec{k}), \overline{a}_S(\vec{k}')] = -\delta(\vec{k}-\vec{k}')$

$\downarrow$ $\quad A_S(\vec{r}) = \displaystyle\int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}} \left[a_S(\vec{k}) e^{i\vec{k}.\vec{r}} + \overline{a}_S(\vec{k}) e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right]$

$\downarrow$ $\quad [A_\mu(\vec{r},t), A_\nu(\vec{r}',t')] = \dfrac{i\hbar}{\varepsilon_0 c} g_{\mu\nu} D(\vec{r}-\vec{r}', t-t')$

$\downarrow$ $\quad H_R^S = -\displaystyle\int d^3k\, \hbar\omega\, \overline{a}_S(\vec{k})\, a_S(\vec{k})$

Choix de M $\qquad \overline{a}_S(\vec{k}) = M a_S^+(\vec{k}) M = -a_S^+(\vec{k})$

$$A_S = -A_S^+ \iff A_S = \overline{A}_S$$

$$M\,|n_S\rangle = (-1)^{n_S} |n_S\rangle$$

Avantages de cette présentation ($A_S = \overline{A}_S$, plutot que $A_S = -A_S^+$)

- Comme $A_S = \overline{A}_S$, la nouvelle valeur moyenne de A_S

$$\langle A_S \rangle = \frac{\langle \psi | A | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

est réelle.

Possibilité d'associer à l'opérateur A_S un nombre réel $\langle A_S \rangle$

Possibilité d'associer aux équations quantiques du mouvement des équations entre nombres réels auxquelles on impose d'avoir la même forme que les équations classiques

Attention : $\langle A_S \rangle$ n'a pas la signification physique d'une vraie valeur moyenne puisque A_S a des valeurs propres imaginaires pures

- Autre avantage de la présentation $A_S = \overline{A}_S$ (plutot que $A_S = -A_S^+$)

$$[a_\mu(\vec{k}), \overline{a}_\nu(\vec{k}')] = -g_{\mu\nu}\, \delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

Forme covariante des commutateurs $[a_\mu, \overline{a}_\nu]$ alors que

$$[a_\mu(\vec{k}), a_\nu^+(\vec{k}')] = \delta_{\mu\nu}\, \delta(\vec{k}-\vec{k}')$$