Formulation covariante
(Champ libre ou couplé à des sources extérieures)

$L = L_R + L_I$. On n'a pas besoin de L_P. Les sources sont décrites par des fonctions données de $\vec{r}$ et t : $j^\mu(\vec{r},t)$ avec $\partial_\mu j^\mu = 0$
Plus tard, on précisera L_P (Lagrangien du champ de Dirac ψ) et l'expression de j^μ ($j^\mu = qc\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$).

A - Electrodynamique classique en jauge de Lorentz

① Formulation lagrangienne.

a) Choix d'un nouveau lagrangien.
b) Equations de Lagrange associées.
c) Condition supplémentaire pour retrouver les équations de Maxwell.
d) Arbitraire de jauge

② Formulation hamiltonienne.

a) Moments conjugués des potentiels.
b) Hamiltonien.
c) Equations de Hamilton-Jacobi.

③ Variables normales.

a) Définition et équations d'évolution.
b) Développement des potentiels en variables normales.
c) Expression de l'énergie totale et de l'impulsion totale en fonction des variables normales.
d) Forme de la condition supplémentaire.
e) Arbitraire de jauge.

B - Difficultés posées par la quantification du champ libre

① Quantification canonique

a) Relations de commutation canoniques.
b) Opérateurs de création et d'annihilation.
c) Relations de commutation covariantes pour les potentiels libres dans le point de vue de Heisenberg.

② Problèmes d'interprétation physique

a) Forme de la condition supplémentaire pour le champ quantique libre
b) Problèmes posés par la construction de l'espace des états.

Notations pour le potentiel

$$A_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} A^\nu \qquad g_{00} = +1 \qquad g_{ii} = -1 \qquad i = x, y, z$$

$$A_S = \frac{U}{c} \qquad A^0 = A_0 = A_S = U/c$$

$$A^1 = -A_1 = A_x \qquad A^2 = -A_2 = A_y \qquad A^3 = -A_3 = A_z$$

- Rappel de l'expression du lagrangien standard

$$L^{st} = \int d^3r \left(\mathcal{L}_R^{st} + \mathcal{L}_I^{st}\right) = \int d^3r \left[-\frac{\varepsilon_0 c^2}{4} \sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \sum_\mu j_\mu A^\mu\right]$$

- Choix d'un nouveau lagrangien (où $\dot{U}$ apparaît)

On garde $\mathcal{L}_I = -\sum j_\mu A^\mu$. On change $\mathcal{L}_R^{st}$

$$\mathcal{L}_R^{st} \longrightarrow \mathcal{L}_R = -\varepsilon_0 c^2 \left[\frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \lambda \left(\sum_\mu \partial_\mu A^\mu\right)^2\right]$$

λ peut être quelconque. Calculs + simples avec $\lambda = 1/2$

↳ Lagrangien de Fermi $\mathcal{L}_R^F = -\varepsilon_0 c^2 \left[\sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\sum_\mu \partial_\mu A^\mu\right)^2\right]$

$\mathcal{L}_R^F$ et $\mathcal{L}_R^{st}$ ne sont pas équivalents (ne diffèrent pas d'une quadridivergence)

- Autre lagrangien L_R équivalent à L_R^F

$$\mathcal{L}_R = \mathcal{L}_R^F + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \sum_{\mu\nu} \partial_\mu \left[A^\mu \partial_\nu A^\nu - A^\nu \partial_\nu A^\mu\right]$$

$$= -\frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \sum_{\mu\nu} (\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\dot{\vec{A}}^2 - \frac{\dot{U}^2}{c^2} - c^2 \sum_{ij} (\partial_i A_j)^2 + (\vec{\nabla} U)^2\right]$$

- Expression du nouveau lagrangien $L_R + L_I$ dans l'espace réciproque

$$L_R = \int d^3k \, \bar{\mathcal{L}}_R \qquad L_I = \int d^3k \, \mathcal{L}_I$$

$$\bar{\mathcal{L}}_R = \varepsilon_0 \left[\dot{\vec{\mathcal{A}}}^* \cdot \dot{\vec{\mathcal{A}}} - \omega^2 \vec{\mathcal{A}}^* \cdot \vec{\mathcal{A}} - \dot{\mathcal{A}}_s^* \dot{\mathcal{A}}_s + \omega^2 \mathcal{A}_s^* \mathcal{A}_s\right] \qquad \mathcal{L}_I = -\sum_\mu \left[\mathcal{J}_\mu^* \mathcal{A}^\mu + \mathcal{J}_\mu \mathcal{A}^{\mu *}\right]$$

- Equations de Lagrange

• Pour le lagrangien standard, ce sont les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \Box \vec{A} = \dfrac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{J} - \vec{\nabla} \Lambda \\ \Box U = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \rho + \dfrac{\partial}{\partial t} \Lambda \end{cases} \qquad \begin{aligned} \Box &= \sum_\mu \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \\ \Lambda &= \sum_\mu \partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \end{aligned}$$

• Pour le nouveau lagrangien, on trouve

$$\begin{cases} \Box \vec{A} = \dfrac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{J} \\ \Box U = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \rho \end{cases}$$

Diffèrent des équations de Maxwell sauf si $\Lambda = 0$ (jauge de Lorentz)

- Condition supplémentaire $\Lambda = 0$: compatible avec les équations du mouvement qui entraînent

$$\Box \Lambda = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = 0$$

A $t = 0$, on peut choisir $\Lambda = 0$ et $\dot{\Lambda} = 0$ car

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{c^2} \ddot{U} + \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} = \left[\frac{\rho}{\varepsilon_0} + \Delta U\right] + \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} = \vec{\nabla} \cdot \left[\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla} U\right] + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\dot{\Lambda} = 0$ si à $t = 0$ on choisit $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$

- Arbitraire de jauge $\quad A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu f$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu A'^\mu = 0 \qquad \text{si} \quad \partial_\mu \partial^\mu f = \Box f = 0$$

- Moments conjugués des potentiels

$$\Pi_j = \partial \bar{\mathcal{L}} / \partial \dot{\mathcal{A}}_j^* = \partial \bar{\mathcal{L}}_R / \partial \dot{\mathcal{A}}_j^* = \varepsilon_0 \dot{\mathcal{A}}_j \qquad \Pi_s = \partial \bar{\mathcal{L}} / \partial \dot{\mathcal{A}}_s^* = \partial \bar{\mathcal{L}}_R / \partial \dot{\mathcal{A}}_s^* = -\varepsilon_0 \dot{\mathcal{A}}_s$$

- Hamiltonien

$$H = \int d^3k \left[\vec{\Pi} \cdot \dot{\vec{\mathcal{A}}}^* + \vec{\Pi}^* \cdot \dot{\vec{\mathcal{A}}} - \Pi_s \dot{\mathcal{A}}_s^* - \Pi_s^* \dot{\mathcal{A}}_s \right] - L_R - L_I = H_R + H_I$$

$$H_R = \int d^3k \, \bar{\mathcal{H}}_R = \varepsilon_0 \int d^3k \left[\frac{\vec{\Pi}^* \cdot \vec{\Pi}}{\varepsilon_0^2} + \omega^2 \vec{\mathcal{A}}^* \cdot \vec{\mathcal{A}} - \frac{\Pi_s^* \Pi_s}{\varepsilon_0^2} - \omega^2 \mathcal{A}_s^* \mathcal{A}_s \right]$$

$$H_I = -L_I = \int d^3k \left[j^{\mu *} \mathcal{A}_\mu + j^\mu \mathcal{A}_\mu^* \right] = \int d^3r \, j^\mu(\vec{r}) A_\mu(\vec{r})$$

- Equation de Hamilton - Jacobi

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{A}}_j = \partial \bar{\mathcal{H}} / \partial \Pi_j^* = \partial \bar{\mathcal{H}}_R / \partial \Pi_j^* = \Pi_j / \varepsilon_0 \\ \dot{\mathcal{A}}_s = \partial \bar{\mathcal{H}} / \partial \Pi_s^* = \partial \bar{\mathcal{H}}_R / \partial \Pi_s^* = -\Pi_s / \varepsilon_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\Pi}_j = -\partial \bar{\mathcal{H}} / \partial \mathcal{A}_j^* = -\varepsilon_0 \omega^2 \mathcal{A}_j + j_j \\ \dot{\Pi}_s = -\partial \bar{\mathcal{H}} / \partial \mathcal{A}_s^* = \varepsilon_0 \omega^2 \mathcal{A}_s - c\rho \end{cases}$$

- Variables normales - Définitions et équations d'évolution

$$\alpha_j = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega}} \left(\omega \mathcal{A}_j + \frac{i}{\varepsilon_0} \Pi_j \right) \quad \longrightarrow \quad \dot{\alpha}_j + i\omega \alpha_j = \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_0 \hbar \omega}} \, j_j$$

$$\alpha_s = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega}} \left(\omega \mathcal{A}_s - \frac{i}{\varepsilon_0} \Pi_s \right) \quad \longrightarrow \quad \dot{\alpha}_s + i\omega \alpha_s = \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_0 \hbar \omega}} \, c\rho$$

En l'absence de sources, α_j et α_s varient en $e^{-i\omega t}$.

- Développement des potentiels en variables normales

$$\mathcal{A}_j(\vec{k},t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega}} \left[\alpha_j(\vec{k},t) + \alpha_j^*(-\vec{k},t) \right] \qquad \mathcal{A}_s(\vec{k},t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega}} \left[\alpha_s(\vec{k},t) + \alpha_s^*(-\vec{k},t) \right]$$

$$\begin{cases} A_j(\vec{r},t) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega (2\pi)^3}} \left[\alpha_j(\vec{k},t) \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \alpha_j^*(\vec{k},t) \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \\ A_s(\vec{r},t) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega (2\pi)^3}} \left[\alpha_s(\vec{k},t) \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \alpha_s^*(\vec{k},t) \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \end{cases}$$

En l'absence de sources, développements en ondes planes progressives

Passage de $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \alpha_s$ à $\alpha_\varepsilon, \alpha_{\varepsilon'}, \alpha_\ell = \vec{\kappa}\cdot\vec{\alpha}$, α_s

- Expression de H_R et $\vec{P}_R$

$$H_R = \int d^3k \, \hbar\omega \left[\alpha_\varepsilon^* \alpha_\varepsilon + \alpha_{\varepsilon'}^* \alpha_{\varepsilon'} + \alpha_\ell^* \alpha_\ell - \alpha_s^* \alpha_s \right]$$

$$\vec{P}_R = \int d^3k \, \hbar\vec{k} \left[\alpha_\varepsilon^* \alpha_\varepsilon + \alpha_{\varepsilon'}^* \alpha_{\varepsilon'} + \alpha_\ell^* \alpha_\ell - \alpha_s^* \alpha_s \right]$$

- Forme de la condition supplémentaire

$$\Lambda = \sum_\mu \partial_\mu A^\mu = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega (2\pi)^3}} \left[ik\alpha_\ell + \frac{\dot{\alpha}_s}{c} \right] e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \text{c.c.}$$

Equation du mouvement de $\alpha_s \longrightarrow ik\alpha_\ell + \frac{\dot{\alpha}_s}{c} = ik\left[\alpha_\ell - \alpha_s + \frac{1}{k\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega}} \rho \right] = ik\beta$

Equations du mouvement de α_ℓ et α_s + équation $\dot{\rho} + i\vec{k}\cdot\vec{j} = 0 \longrightarrow \dot{\beta} + i\omega\beta = 0$

β varie en $e^{-i\omega t}$

$\sum_\mu \partial_\mu A^\mu = 0 \;\; \forall \vec{r},t \iff \beta(\vec{k}) = \alpha_\ell(\vec{k}) - \alpha_s(\vec{k}) + \frac{\rho(\vec{k})}{k\sqrt{2\varepsilon_0 \hbar\omega}} = 0 \quad \forall \vec{k}$

- Cas du champ libre $(j^\mu = 0) \rightarrow \alpha_\ell(\vec{k}) = \alpha_s(\vec{k}) \quad \forall \vec{k}$

$\begin{cases} \alpha_d = i(\alpha_\ell - \alpha_s)/\sqrt{2} \\ \alpha_g = (\alpha_\ell + \alpha_s)/\sqrt{2} \end{cases}$ Condition supplémentaire : $\alpha_d(\vec{k}) = 0 \quad \forall \vec{k}$

Arbitraire de jauge $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f \qquad A_s \rightarrow A'_s = A_s - \frac{\partial f}{c\,\partial t}$ avec $\Box f = 0$

$f = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega (2\pi)^3}}\, \mathcal{F}(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)} + c.c.$ avec $\omega = ck$, $\mathcal{F}$ quelconque

$\alpha'_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \qquad \alpha'_{\varepsilon'} = \alpha_{\varepsilon'} \qquad \alpha'_\ell = \alpha_\ell + ik\mathcal{F} \qquad \alpha'_s = \alpha_s + ik\mathcal{F}$

$\hookrightarrow \quad \alpha'_d = \alpha_d \qquad \alpha'_g = \alpha_g + i\sqrt{2}\,k\mathcal{F}$ Seul α_g change

---

- Quantification canonique Dans un 1/2 espace réciproque,

$[\mathcal{A}_i(\vec{k}), \Pi_j^+(\vec{k}')] = i\hbar\, \delta_{ij}\, \delta(\vec{k} - \vec{k}') \qquad [\mathcal{A}_s(\vec{k}), \Pi_s^+(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}')$

Dans l'autre 1/2 espace, $\mathcal{A}_j(\vec{k}) = \mathcal{A}_j^+(-\vec{k})$, $\mathcal{A}_s(\vec{k}) = \mathcal{A}_s^+(-\vec{k}) \dots$

- Opérateurs de création et d'annihilation

$a_j(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega}}\left[\omega \mathcal{A}_j(\vec{k}) + \frac{i}{\varepsilon_0}\Pi_j(\vec{k})\right] \qquad a_s(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega}}\left[\omega \mathcal{A}_s(\vec{k}) - \frac{i}{\varepsilon_0}\Pi_s(\vec{k})\right]$

$\hookrightarrow \begin{cases} [a_i(\vec{k}), a_j^+(\vec{k}')] = \delta_{ij}\, \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ [a_s(\vec{k}), a_s^+(\vec{k}')] = -\delta(\vec{k} - \vec{k}') \end{cases} \longrightarrow [a_\mu(\vec{k}), a_\nu^+(\vec{k}')] = -g_{\mu\nu}\, \delta(\vec{k} - \vec{k}')$

- Relations de commutation covariantes des potentiels libres (Heisenberg)

$A_\mu(x^\nu) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega (2\pi)^3}} \left[a_\mu(\vec{k})\, e^{-ik_\nu x^\nu} + a_\mu^+(\vec{k})\, e^{ik_\nu x^\nu}\right]$

$\hookrightarrow \quad [A_\mu(\vec{r},t), A_\nu(\vec{r}',t')] = \frac{i\hbar}{\varepsilon_0 c}\, g_{\mu\nu}\, D(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$

$D(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi r}\left[\delta(r - ct) - \delta(r + ct)\right]$

- Condition supplémentaire pour le champ quantique libre

Etat physique $|\psi\rangle$: $[a_\ell(\vec{k}) - a_s(\vec{k})]\,|\psi\rangle = 0 \quad \forall \vec{k}$

$\hookrightarrow \quad \langle\psi|\, \partial_\mu A^\mu(\vec{r},t)\, |\psi\rangle = 0 \quad \forall \vec{r}, t$

- Construction de l'espace des états

- Vide $|0\rangle \qquad a_\mu(\vec{k})|0\rangle \quad \forall \vec{k}, \mu$
- Photons transverses et longitudinaux

$|n_\varepsilon, n_{\varepsilon'}, n_\ell\rangle = \frac{(a_\varepsilon^+)^{n_\varepsilon}\,(a_{\varepsilon'}^+)^{n_{\varepsilon'}}\,(a_\ell^+)^{n_\ell}}{\sqrt{n_\varepsilon!\; n_{\varepsilon'}!\; n_\ell!}}\,|0\rangle$

- Etat à 1 photon scalaire $\qquad |\psi\rangle = \int d^3k\; g(\vec{k})\, a_s^+(\vec{k})\,|0\rangle$

$\hookrightarrow \langle\psi|\psi\rangle = \iint d^3k\, d^3k'\; g^*(\vec{k}')\, g(\vec{k})\, \langle 0|a_s(\vec{k}')\, a_s^+(\vec{k})|0\rangle = -\langle 0|0\rangle \int d^3k\, |g(\vec{k})|^2 < 0 \;!$