Electrodynamique quantique en jauge de Coulomb (suite)

② Lagrangien en jauge de Coulomb

a) Expression du nouveau lagrangien $L = L_P + L_R + L_I$

b) Discussion physique - Apparition de l'interaction de Coulomb dans le lagrangien des particules

③ Moments conjugués - Hamiltonien

a) Moment conjugué $\vec{p}_\alpha$ de $\vec{r}_\alpha$

b) Moment conjugué $\Pi_\varepsilon(\vec{k})$ de $\mathcal{A}_\varepsilon(\vec{k})$

c) Hamiltonien dans l'espace réel et dans l'espace réciproque

d) Expression des diverses grandeurs physiques en fonction des coordonnées et des moments conjugués.

④ Variables normales

a) Equations de Hamilton.

b) Définition des variables normales - Equations du mouvement des variables normales

c) Expression des diverses grandeurs physiques en fonction des variables normales

⑤ Quantification canonique

a) Relations de commutation canoniques dans l'espace réciproque

b) Opérateurs associés aux variables normales : opérateurs de création et d'annihilation

c) Relations de commutation dans l'espace réel

d) Equations quantiques du mouvement.

⑥ Récapitulation et conclusion

- Expression de L après élimination de $\mathcal{U}$ du lagrangien standard et choix de $\vec{\mathcal{A}}_{/\!/} = \vec{0}$ (jauge de Coulomb)

$$L = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2} - \int d^3k \, \frac{\rho^*(\vec{k})\rho(\vec{k})}{\varepsilon_0 k^2} \qquad \longleftarrow L_P$$

$$+ \varepsilon_0 \int d^3k \left[\dot{\vec{\mathcal{A}}}_\perp^*(\vec{k}) \cdot \dot{\vec{\mathcal{A}}}_\perp(\vec{k}) - c^2 k^2 \vec{\mathcal{A}}_\perp^*(\vec{k}) \cdot \vec{\mathcal{A}}_\perp(\vec{k}) \right] \qquad \longleftarrow L_R$$

$$+ \int d^3k \left[\vec{j}^*(\vec{k}) \cdot \vec{\mathcal{A}}_\perp(\vec{k}) + \vec{j}(\vec{k}) \cdot \vec{\mathcal{A}}_\perp^*(\vec{k}) \right] \qquad \longleftarrow L_I$$

- Transformation de $\int d^3k\, \rho^*\rho/\varepsilon_0 k^2$

$$\rho(\vec r)=\sum_\alpha q_\alpha\, \delta(\vec r-\vec r_\alpha) \longrightarrow \rho^*(\vec k)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_\alpha q_\alpha\, e^{-i\vec k\cdot\vec r_\alpha}$$

$$\int d^3k\, \frac{\rho^*\rho}{\varepsilon_0 k^2} = \sum_\alpha \frac{q_\alpha^2}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{k^2} + \sum_\alpha\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{q_\alpha q_\beta}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}\int d^3k\, \frac{e^{i\vec k\cdot(\vec r_\alpha-\vec r_\beta)}}{k^2}$$

$$= \sum_\alpha \varepsilon^\alpha_{Coul} + \sum_\alpha\sum_{\beta\neq\alpha} \frac{q_\alpha q_\beta}{8\pi\varepsilon_0|\vec r_\alpha-\vec r_\beta|} = V_{Coulomb}$$

$$\varepsilon^\alpha_{Coul} = \frac{q_\alpha^2}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{k^2} = \frac{q_\alpha^2 k_c}{4\pi^2\varepsilon_0}$$ = Energie de Coulomb propre de α (k_c : coupure)

↳ $L_P = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec r}_\alpha^{\,2} - V_{Coulomb}$ = Energie cinétique − Energie potentielle coulombienne

- Lagrangien du champ

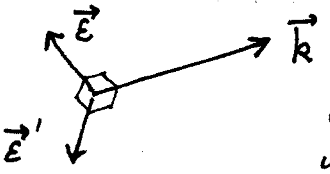
$$L_R = \varepsilon_0\int d^3k\,[\dot{\vec{\mathcal A}}_\perp^*\cdot\dot{\vec{\mathcal A}}_\perp - c^2k^2\vec{\mathcal A}_\perp^*\cdot\vec{\mathcal A}_\perp] = \varepsilon_0\int d^3r\,[\vec E_\perp^2 - c^2\vec B^2]$$

= Energie électrique transverse − Energie magnétique

- Lagrangien d'interaction

$$L_I = \int d^3k\,(\vec{\mathcal J}^*\cdot\vec{\mathcal A}_\perp + \vec{\mathcal J}\cdot\vec{\mathcal A}_\perp^*) = \int d^3r\,\vec j(\vec r)\cdot\vec A_\perp(\vec r) = \sum_\alpha q_\alpha\dot{\vec r}_\alpha\cdot\vec A_\perp(\vec r_\alpha)$$

- Moment conjugué de $\vec r_\alpha$: $\vec p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial\dot{\vec r}_\alpha} = m_\alpha\dot{\vec r}_\alpha + q_\alpha\vec A_\perp(\vec r_\alpha)$

- 

$\mathcal A_\varepsilon(\vec k)=\vec\varepsilon\cdot\vec{\mathcal A}_\perp(\vec k)$ $\qquad$ $\mathcal A_{\varepsilon'}(\vec k) = \vec\varepsilon\,'\cdot\vec{\mathcal A}_\perp(\vec k)$

$\mathcal A_\varepsilon$ et $\mathcal A_{\varepsilon'}$: composantes de $\vec{\mathcal A}_\perp$ sur 2 vecteurs unitaires $\perp$ dans le plan $\perp$ à $\vec k$

- Moment conjugué de $\mathcal A_\varepsilon$: $\Pi_\varepsilon = \frac{\delta L}{\delta\dot{\mathcal A}_\varepsilon^*} = \frac{\partial\mathcal L}{\partial\dot{\mathcal A}^*_\varepsilon} = \varepsilon_0\dot{\mathcal A}_\varepsilon = -\varepsilon_0\mathcal E_{\perp\varepsilon}$

$$\vec\Pi(\vec k)=\vec\varepsilon\,\Pi_\varepsilon(\vec k)+\vec\varepsilon\,'\,\Pi_{\varepsilon'}(\vec k) = \varepsilon_0\dot{\vec{\mathcal A}}_\perp(\vec k) = -\varepsilon_0\vec{\mathcal E}_\perp(\vec k)$$

Par T.F. $\rightarrow$ $\vec\Pi(\vec r) = \varepsilon_0\dot{\vec A}_\perp(\vec r) = -\varepsilon_0\vec E_\perp(\vec r)$

- Hamiltonien $H=\sum_\alpha\vec p_\alpha\cdot\dot{\vec r}_\alpha + \int d^3k\,(\vec\Pi\cdot\dot{\vec{\mathcal A}}_\perp^* + \vec\Pi^*\cdot\dot{\vec{\mathcal A}}_\perp) - L$

$$H = \sum_\alpha\frac{1}{2m_\alpha}[\vec p_\alpha - q_\alpha\vec A_\perp(\vec r_\alpha)]^2 + V_{Coul} + \varepsilon_0\int d^3k\left[\frac{\vec\Pi^*\cdot\vec\Pi}{\varepsilon_0^2} + c^2k^2\vec{\mathcal A}_\perp^*\cdot\vec{\mathcal A}_\perp\right]$$

$$= \sum_\alpha\frac{1}{2m_\alpha}[\vec p_\alpha - q_\alpha\vec A_\perp(\vec r_\alpha)]^2 + V_{Coul} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\left[\frac{\vec\Pi^2}{\varepsilon_0^2}+c^2(\vec\nabla\times\vec A_\perp)^2\right]$$

= Energie cinétique + $V_{Coulomb}$ + Energie des champs transverses

- Vitesse $\vec v_\alpha = \dot{\vec r}_\alpha = \frac{1}{m_\alpha}[\vec p_\alpha - q_\alpha\vec A_\perp(\vec r_\alpha)]$

- Champ électrique total $\vec{\mathcal E} = \vec{\mathcal E}_\parallel + \vec{\mathcal E}_\perp = -\frac{i}{\varepsilon_0}\rho\frac{\vec k}{k^2} - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec\Pi$

↳ $\vec E_\perp(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_\alpha q_\alpha\frac{\vec r-\vec r_\alpha}{|\vec r-\vec r_\alpha|^3} - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec\Pi(\vec r)$

- champ magnétique $\vec{\mathcal B} = i\vec k\times\vec{\mathcal A}_\perp$ $\qquad$ $\vec B = \vec\nabla\times\vec A_\perp$

- <u>Impulsion totale</u> $\vec{P} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha + \vec{P}_{long} + \vec{P}_{transv}$

$$\vec{P}_{long} = \varepsilon_0 \int d^3r\, \vec{E}_{/\!/}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \int d^3k\, \vec{\mathcal{E}}_{/\!/}^*(\vec{k}) \times \vec{\mathcal{B}}(\vec{k}) = i \int d^3k\, \rho^* \frac{\vec{k}}{k^2} \times (i\vec{k} \times \vec{\mathcal{A}}_\perp)$$

$$= \int d^3k\, \rho^*(\vec{k})\, \vec{\mathcal{A}}_\perp(\vec{k}) = \int d^3r\, \rho(\vec{r})\, \vec{A}_\perp(\vec{r}) = \sum_\alpha q_\alpha \vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha)$$

En jauge de Coulomb, $\sum_\alpha (\vec{p}_\alpha - m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha) = \sum_\alpha q_\alpha \vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha) = \vec{P}_{long}$

$$\vec{P}_{trans} = \varepsilon_0 \int d^3r\, \vec{E}_\perp(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) = -\int d^3r\, \vec{\Pi}(\vec{r}) \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}_\perp(\vec{r}))$$

$$= -\int d^3k\, \vec{\Pi}^*(\vec{k}) \times (i\vec{k} \times \vec{\mathcal{A}}_\perp(\vec{k})) = -i \int d^3k\, \vec{k}\, (\vec{\Pi}^*(\vec{k}) \cdot \vec{\mathcal{A}}_\perp(\vec{k}))$$

$\hookrightarrow$ $\vec{P} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha + \vec{P}_{transv}$

- <u>Equations de Hamilton</u>

H_R = somme d'hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques (1 par mode $\vec{k}\vec{\varepsilon}$)

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{A}}_\varepsilon = \dfrac{\partial H}{\partial \Pi_\varepsilon^*} = \varepsilon_0 \Pi_\varepsilon \\ \dot{\Pi}_\varepsilon = -\dfrac{\partial H}{\partial \mathcal{A}_\varepsilon^*} = -\varepsilon_0 \omega^2 \mathcal{A}_\varepsilon + \mathcal{J}_\varepsilon \end{cases} \qquad \mathcal{J}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\mathcal{J}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} q_\alpha\, \vec{\varepsilon} \cdot \dot{\vec{r}}_\alpha\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}$$

- <u>Variables normales</u> $\alpha_\varepsilon(\vec{k})$: Combinaison linéaire de $\mathcal{A}_\varepsilon$ et Π_ε évoluant en $e^{-i\omega t}$ en l'absence de source ($\mathcal{J}_\varepsilon = 0$)

$\alpha_\varepsilon(\vec{k}) = \mathcal{N}(k) \left[\omega \mathcal{A}_\varepsilon(\vec{k}) + \frac{i}{\varepsilon_0} \Pi_\varepsilon(\vec{k}) \right]$ $\mathcal{N}$: coef^t de normalisation

Equations de Hamilton $\longrightarrow$ $\dot{\alpha}_\varepsilon + i\omega \alpha_\varepsilon = \frac{i\mathcal{N}}{\varepsilon_0} \mathcal{J}_\varepsilon$

Choix de $\mathcal{N}$: $\mathcal{N} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega}}$ pour avoir ensuite un commutateur le plus simple possible entre les opérateurs a_ε et a_ε^+ associés à α_ε et α_ε^*

- <u>Equation d'évolution de α_ε</u> $\dot{\alpha}_\varepsilon + i\omega \alpha_\varepsilon = \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_0 \hbar\omega}} \mathcal{J}_\varepsilon$

- <u>Expression de $\mathcal{A}_\varepsilon$ et Π_ε en fonction de α_ε et α_ε^*</u>

$$\alpha_\varepsilon(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega}} \left[\omega \mathcal{A}_\varepsilon(\vec{k}) + \frac{i}{\varepsilon_0} \Pi_\varepsilon(\vec{k}) \right] \qquad \alpha_\varepsilon^*(-\vec{k}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega}} \left[\omega \mathcal{A}_\varepsilon(\vec{k}) - \frac{i}{\varepsilon_0} \Pi_\varepsilon(\vec{k}) \right]$$

Pas de relation entre $\alpha_\varepsilon(\vec{k})$ et $\alpha_\varepsilon^*(-\vec{k})$

$$\hookrightarrow \mathcal{A}_\varepsilon(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega}} \left[\alpha_\varepsilon(\vec{k}) + \alpha_\varepsilon^*(-\vec{k}) \right] \qquad \Pi_\varepsilon(\vec{k}) = -i \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \hbar\omega}{2}} \left[\alpha_\varepsilon(\vec{k}) - \alpha_\varepsilon^*(-\vec{k}) \right]$$

- <u>Expression de H_R et $\vec{P}_{transv}$ en fonction de α_ε et α_ε^*</u>

$$H_R = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \left[\frac{\Pi_\varepsilon^* \Pi_\varepsilon}{\varepsilon_0^2} + \omega^2 \mathcal{A}_\varepsilon^* \mathcal{A}_\varepsilon \right] = \int d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \hbar\omega\, \alpha_\varepsilon^*(\vec{k}) \alpha_\varepsilon(\vec{k})$$

$$\vec{P}_{transv} = -i \int d^3k\, \vec{k} \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \Pi_\varepsilon^* \mathcal{A}_\varepsilon = \int d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \hbar\vec{k}\, \alpha_\varepsilon^*(\vec{k}) \alpha_\varepsilon(\vec{k})$$

- Expression des champs $\vec{A}_\perp(\vec{r})$, $\vec{\Pi}(\vec{r}) = -\varepsilon_0 \vec{E}_\perp(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$

$$\vec{A}_\perp(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \vec{\varepsilon}\, \mathcal{A}_\varepsilon(\vec{k})\, e^{i\vec{k}.\vec{r}}$$

$$= \int d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \mathcal{A}_\omega\, \vec{\varepsilon}\, e^{i\vec{k}.\vec{r}} \left[\alpha_\varepsilon(\vec{k}) + \alpha^*_\varepsilon(-\vec{k})\right] \qquad \mathcal{A}_\omega = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}$$

$$= \int d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \mathcal{A}_\omega \left[\vec{\varepsilon}\,\alpha_\varepsilon(\vec{k})\, e^{i\vec{k}.\vec{r}} + \vec{\varepsilon}\,\alpha^*_\varepsilon(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right]$$

$$\vec{\Pi}(\vec{r}) = -i\varepsilon_0 \int d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \mathcal{E}_\omega \left[\vec{\varepsilon}\,\alpha_\varepsilon(\vec{k})\, e^{i\vec{k}.\vec{r}} - \vec{\varepsilon}\,\alpha^*_\varepsilon(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right]$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = i \int d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \mathcal{B}_\omega \left[(\vec{\kappa}\times\vec{\varepsilon})\,\alpha_\varepsilon(\vec{k})\, e^{i\vec{k}.\vec{r}} - (\vec{\kappa}\times\vec{\varepsilon})\,\alpha^*_\varepsilon(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right]$$

$$\mathcal{A}_\omega = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}} \qquad \mathcal{E}_\omega = \omega\mathcal{A}_\omega \qquad \mathcal{B}_\omega = \frac{\mathcal{E}_\omega}{c} \qquad \vec{\kappa} = \frac{\vec{k}}{k}$$

Pour un champ libre, α_ε varie en $e^{-i\omega t}$, α^*_ε en $e^{i\omega t}$ et des développements précédents sont des développements en ondes planes progressives $\vec{k}$, $\vec{\varepsilon}$, $\omega = ck$

- Relations de commutation canoniques du champ

Dans un demi-espace réciproque, les $\mathcal{A}_\varepsilon(\vec{k})$ et $\Pi_\varepsilon(\vec{k})$ sont des variables indépendantes

↳ $\left[\mathcal{A}_\varepsilon(\vec{k}), \Pi^+_{\varepsilon'}(\vec{k}')\right] = i\hbar\, \delta_{\varepsilon\varepsilon'}\, \delta(\vec{k}-\vec{k}')$

tous les autres commutateurs étant nuls. Pour avoir les commutateurs dans tout l'espace réciproque, on utilise

$$\mathcal{A}^+_\varepsilon(\vec{k}) = \mathcal{A}_\varepsilon(-\vec{k}) \qquad \Pi^+_\varepsilon(\vec{k}) = \Pi_\varepsilon(-\vec{k})$$

- Opérateurs de création et d'annihilation a_ε et a^+_ε

$$\alpha_\varepsilon(\vec{k}) \longrightarrow a_\varepsilon(\vec{k}) \qquad \alpha^*_\varepsilon(k) \longrightarrow a^+_\varepsilon(\vec{k})$$

Les relations de commutation canonique entraînent

$$\left[a_\varepsilon(\vec{k}), a^+_{\varepsilon'}(\vec{k}')\right] = \delta_{\varepsilon\varepsilon'}\, \delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

Tous les opérateurs champ s'expriment en fonction des a_ε et a^+_ε

- Evolution temporelle

Point de vue de Schrödinger $\quad i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$

" " " Heisenberg $\quad i\hbar \frac{d}{dt} G(t) = [G(t), H]$

Les équations de Maxwell-Lorentz demeurent valables entre opérateurs.