Le lagrangien standard de l'électrodynamique classique

① Expression du lagrangien standard

a) Lagrangien des particules, du rayonnement, d'interaction

b) Equations de Lagrange

c) Expression de L en fonction des potentiels dans l'espace réciproque.
Intérêt de cette forme de L

② Propriétés du lagrangien standard

a) Invariance dans des transformations simples
Constantes du mouvement

b) Invariance relativiste

c) Invariance de jauge - Lien avec la conservation de la charge.

③ Difficultés du lagrangien standard

a) Redondance des potentiels

b) $\dot{U}$ n'apparaît pas

④ Solutions possibles à ces difficultés

a) Elimination de la variable dont la dérivée n'apparaît pas dans le lagrangien
Illustration sur un exemple plus simple $L(x, \dot{x}, x_2)$

b) Changement de lagrangien

Electrodynamique quantique en jauge de Coulomb

① Elimination des variables dynamiques redondantes

a) Elimination de $\mathcal{U}$ au moyen de l'équation de Lagrange pour $\mathcal{U}$.

b) Arbitraire existant sur $\mathcal{A}_{//}$.
Choix de la jauge de Coulomb ($\mathcal{A}_{//} = 0$)

Expressions de L_P, L_R, L_I (1

$$L_P = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec r}_\alpha^{\,2}$$

$$L_R = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \left[\vec E^2(\vec r) - c^2 \vec B^2(\vec r)\right]$$

$$L_I = \sum_\alpha \left[q_\alpha \dot{\vec r}_\alpha \cdot \vec A(\vec r_\alpha) - q_\alpha U(\vec r_\alpha)\right]$$

$$= \int d^3r \left[\vec j(\vec r)\cdot \vec A(\vec r) - \rho(\vec r)\, U(\vec r)\right]$$

Densités de charge et de courant

$$\rho(\vec r) = \sum_\alpha q_\alpha\, \delta(\vec r - \vec r_\alpha)$$

$$\vec j(\vec r) = \sum_\alpha q_\alpha\, \dot{\vec r}_\alpha\, \delta(\vec r - \vec r_\alpha)$$

Autre écriture possible

$$L = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec r}_\alpha^{\,2} + \int d^3r\, \mathcal{L}(\vec r)$$

$$\mathcal{L}(\vec r) = \varepsilon_0\left[(-\dot{\vec A} - \vec\nabla U)^2 - c^2(\vec\nabla\times\vec A)\right]^2 + \vec j\cdot\vec A - \rho U$$

$$L(\vec r_\alpha, \dot{\vec r}_\alpha, A_j, \dot A_j, \partial_i A_j, U, \cancel{\dot U}, \partial_i U)$$

Equations de Lagrange (2

Pour $\vec r_\alpha$ $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}_\alpha} = \dfrac{\partial L}{\partial \vec r_\alpha}$

$$\hookrightarrow\ m_\alpha \ddot{\vec r}_\alpha = q_\alpha \vec E(\vec r_\alpha) + q_\alpha \dot{\vec r}_\alpha \times \vec B(\vec r_\alpha)$$

Equation de Newton-Lorentz

Pour U $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot U} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} - \sum_i \partial_i \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i U)}$

$$\hookrightarrow\ \vec\nabla\cdot(-\dot{\vec A} - \vec\nabla U) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Pour A_j $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot A_j} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_j} - \sum_i \partial_i \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i A_j)}$

$$\hookrightarrow\ \vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A) = \frac{1}{c^2}(-\ddot{\vec A} - \vec\nabla\dot U) + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec J$$

$$\vec\nabla\times\vec B = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec E}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec J$$

Equations de Maxwell

L dans l'espace réciproque (3

$$L = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec r}_\alpha^{\,2} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3k \left[\vec{\mathcal{E}}^*(\vec k)\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec k) - c^2 \vec{\mathcal{B}}^*(\vec k)\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec k)\right] + \int d^3k \left[\vec{\mathcal{J}}^*(\vec k)\cdot\vec{\mathcal{A}}(\vec k) - \rho^*(\vec k)\,\mathcal{U}(\vec k)\right]$$

Conditions de réalité

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec k) = \vec{\mathcal{A}}^*(-\vec k) \qquad \mathcal{U}(\vec k) = \mathcal{U}^*(-\vec k)$$

$$\vec{\mathcal{E}}^*(-\vec k)\cdot\vec{\mathcal{E}}(-\vec k) = \vec{\mathcal{E}}(\vec k)\cdot\vec{\mathcal{E}}^*(\vec k)$$

$$\hookrightarrow\ L = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec r}_\alpha^{\,2} + \fint d^3k\, \bar{\mathcal{L}}$$

$$\bar{\mathcal{L}} = \varepsilon_0\left[\left|\dot{\vec{\mathcal{A}}}(\vec k) + i\vec k\,\mathcal{U}(\vec k)\right|^2 - c^2\left|\vec k\times\vec{\mathcal{A}}(\vec k)\right|^2\right] + \left[\vec{\mathcal{J}}^*(\vec k)\cdot\vec{\mathcal{A}}(\vec k) + \vec{\mathcal{J}}(\vec k)\cdot\vec{\mathcal{A}}^*(\vec k) - \rho^*(\vec k)\,\mathcal{U}(\vec k) - \rho(\vec k)\,\mathcal{U}^*(\vec k)\right]$$

$\fint d^3k$ Intégrale sur un demi espace reciproque

Constantes du mouvement (4

$$\vec P = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec r}_\alpha + \varepsilon_0 \int d^3r\, \vec E(\vec r)\times\vec B(\vec r)$$

$$\vec J = \sum_\alpha \vec r_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec r}_\alpha + \varepsilon_0\int d^3r\, \vec r\times\left[\vec E(\vec r)\times\vec B(\vec r)\right]$$

$$\mathcal{H} = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec r}_\alpha^{\,2} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\left[\vec E^2(\vec r) + c^2\vec B^2(\vec r)\right]$$

Ecriture covariante

$$\mathcal{L}_R = -\varepsilon_0 \frac{c^2}{4}\sum_\mu\sum_\nu F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_I = -\sum_\mu j^\mu A_\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\partial_\mu = \left\{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec\nabla\right\} \qquad A^\mu = \left\{\frac{U}{c}, \vec A\right\} \qquad j^\mu = \{c\rho, \vec J\}$$

Changement de jauge $\quad \vec A, U \to \vec A', U'$

$$\mathcal{L}_R + \mathcal{L}_I \longrightarrow \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_1$$

$$\mathcal{L}_1 = \vec J\cdot\vec\nabla F + \rho\frac{\partial F}{\partial t}$$

$$= \underbrace{\vec\nabla\cdot(\vec J F) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho F)}_{\text{Quadridivergence}} - \underbrace{\left(\vec\nabla\cdot\vec J + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right)}_{=0} F$$

Cas simple $L(x_1, \dot{x}_1, x_2)$ (5

$$\frac{\partial L(x_1,\dot{x}_1,x_2)}{\partial x_2} = 0 \longleftrightarrow x_2 = g(x_1,\dot{x}_1)$$

$$\hat{L}(x_1,\dot{x}_1) = L(x_1,\dot{x}_1, g(x_1\dot{x}_1))$$

$$\frac{\partial \hat{L}(x_1\dot{x}_1)}{\partial x_1} = \frac{\partial L(x_1\dot{x}_1\, x_2)}{\partial x_1}\Big|_{x_2=g(x_1\dot{x}_1)} + \frac{\partial L(x_1\dot{x}_1 x_2)}{\partial x_2}\Big|_{x_2=g(x_1\dot{x}_1)} \times \frac{\partial g(x_1\dot{x}_1)}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial \hat{L}(x_1\dot{x}_1)}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial L(x_1\dot{x}_1 x_2)}{\partial \dot{x}_1}\Big|_{x_2=g(x_1\dot{x}_1)} + \frac{\partial L(x_1\dot{x}_1 x_2)}{\partial x_2}\Big|_{x_2=g(x_1\dot{x}_1)} \times \frac{\partial g(x_1\dot{x}_1)}{\partial \dot{x}_1}$$

Comme $\frac{\partial L(x_1\dot{x}_1 x_2)}{\partial x_2}\Big|_{x_2=g(x_1\dot{x}_1)} = 0$

l'équation de Lagrange pour $\hat{L}$ s'écrit

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(x_1\dot{x}_1 x_2)}{\partial \dot{x}_1}\Big|_{x_2=g(x_1\dot{x}_1)} = \frac{\partial L(x_1\dot{x}_1 x_2)}{\partial x_1}\Big|_{x_2=g(x_1\dot{x}_1)}$$

On peut enlever la restriction $x_2=g(x_1\dot{x}_1)$ en ajoutant $\frac{\partial L(x_1\dot{x}_1 x_2)}{\partial x_2} = 0$

Equation de Lagrange pour $\mathcal{U}$ (6

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \mathcal{U}^*} = -\varepsilon_0 i\vec{k}.[\dot{\vec{\mathcal{A}}} + i\vec{k}\,\mathcal{U}] - \rho = 0$$

$$\hookrightarrow \quad \mathcal{U} = \frac{1}{k^2}\left[ik\dot{\mathcal{A}}_{/\!/} + \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right]$$

$$\mathcal{A}_{/\!/} = \vec{\kappa}.\vec{\mathcal{A}} \qquad \vec{\kappa} = \vec{k}/k$$

Nouveau lagrangien

$$L(\vec{r}_\alpha, \dot{\vec{r}}_\alpha, \vec{\mathcal{A}}_\perp, \dot{\vec{\mathcal{A}}}_\perp, \mathcal{A}_{/\!/}, \dot{\mathcal{A}}_{/\!/}) =$$

$$\sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2} - \int d^3k\, \frac{\rho^*\rho}{\varepsilon_0}$$

$$+ \varepsilon_0 \int d^3k \left[\dot{\vec{\mathcal{A}}}_\perp^*.\dot{\vec{\mathcal{A}}}_\perp - c^2k^2\vec{\mathcal{A}}_\perp^*.\vec{\mathcal{A}}_\perp\right]$$

$$+ \int d^3k \left[\vec{j}^*.\vec{\mathcal{A}}_\perp + \vec{j}.\vec{\mathcal{A}}_\perp^*\right]$$

$$+ \int d^3k \underbrace{\left[j_{/\!/}^*\mathcal{A}_{/\!/} + j_{/\!/}\mathcal{A}_{/\!/}^* - \frac{i}{k}(\rho^*\dot{\mathcal{A}}_{/\!/} - \rho\dot{\mathcal{A}}_{/\!/}^*)\right]}_{\bar{\mathcal{L}}_{/\!/}}$$

$\mathcal{A}_{/\!/}$ et $\dot{\mathcal{A}}_{/\!/}$ n'apparaissent que dans $\bar{\mathcal{L}}_{/\!/}$

Conservation de l'electricité (7

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla}.\vec{j} = 0 \qquad \dot{\rho} + i\vec{k}.\vec{j} = 0$$

$$\hookrightarrow \quad \dot{\rho} = -ik\,j_{/\!/}$$

Equation de Lagrange pour $\mathcal{A}_{/\!/}$

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\mathcal{A}}_{/\!/}^*} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \mathcal{A}_{/\!/}} \longrightarrow \dot{\rho} = -ik\,j_{/\!/}$$

Ne donne rien de nouveau

Transformation de $\bar{\mathcal{L}}_{/\!/}$ (en utilisant $\dot{\rho} = -ik\,j_{/\!/}$)

$$\bar{\mathcal{L}}_{/\!/} = \frac{i}{k}\left[-\dot{\rho}^*\mathcal{A}_{/\!/} + \dot{\rho}\mathcal{A}_{/\!/}^* - \rho^*\dot{\mathcal{A}}_{/\!/} + \rho\dot{\mathcal{A}}_{/\!/}^*\right]$$

$$= \frac{i}{k}\frac{d}{dt}\left[\rho\mathcal{A}_{/\!/}^* - \rho^*\mathcal{A}_{/\!/}\right]$$

$\mathcal{A}_{/\!/}$ n'apparait que dans une dérivée totale et peut être choisi arbitrairement

Choix le plus simple $\mathcal{A}_{/\!/} = 0$

Jauge de Coulomb