C - Nouveaux moments conjugués. Nouvel hamiltonien

1. Nouveau moment conjugué de $\vec{r}_\alpha$
2. Nouveau moment conjugué de $\vec{A}_\perp$
3. Nouvel hamiltonien - Discussion physique.

D - Electrodynamique quantique dans le nouveau point de vue

1. Quantification canonique
2. Expression de quelques grandeurs physiques

E - Cas de 2 systèmes séparés de charges globalement neutres

1. Nouvel hamiltonien.
2. Disparition des interactions coulombiennes entre les 2 systèmes

---

Nouveau moment conjugué de $\vec{r}_\alpha$

$$\int d^3r\, \vec{M}(\vec{r}).\vec{B}(\vec{r}) = \int d^3r \left[\sum_\alpha \int_0^1 u\,du\, q_\alpha (\vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha)\,\delta(\vec{r}-u\vec{r}_\alpha)\right].\vec{B}(\vec{r}) = \sum_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \int_0^1 u\,du\, q_\alpha \left[\vec{B}(u\vec{r}_\alpha)\times\vec{r}_\alpha\right]$$

$$\vec{p}_{\alpha L'} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha} = m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha + q_\alpha \int_0^1 u\,du\, \vec{B}(u\vec{r}_\alpha)\times\vec{r}_\alpha$$

Ecart entre $\vec{p}_{\alpha L'}$ et $m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha$: d'autant plus petit que le système est plus localisé. S'exprime en fonction du champ $\vec{B}$.

$\vec{p}_{\alpha L'}$ peut aussi s'écrire $\quad \vec{p}_{\alpha L'} = m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha + q_\alpha \vec{A}'(\vec{r}_\alpha)$

$\vec{A}'$: potentiel vecteur dans la nouvelle jauge (de Poincaré)

Nouveau moment conjugué de $\vec{A}_\perp(\vec{r})$

- Dans la jauge de Coulomb (ancien L)

$$\vec{\Pi}_L(\vec{k}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathcal{A}}_\perp^*} = \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial \dot{\mathcal{A}}_\perp^*} = \varepsilon_0 \dot{\mathcal{A}}_\perp = -\varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}}_\perp(\vec{k}) \longrightarrow \qquad \vec{\Pi}_L(\vec{r}) = -\varepsilon_0 \vec{E}_\perp(\vec{r})$$

Ancien moment conjugué de $\vec{A}_\perp$ $\quad = -\varepsilon_0 \times$ Champ électrique transverse

- Dans le nouveau point de vue (nouveau L)

$$L'_I = \int d^3r \left[\vec{P}(\vec{r}).\vec{E}_\perp(\vec{r}) + \vec{M}(\vec{r}).\vec{B}(\vec{r})\right]$$

$$\int d^3r\, \vec{P}(\vec{r}).\vec{E}_\perp(\vec{r}) = -\int d^3k \left[\vec{\mathcal{P}}^*(\vec{k}).\dot{\vec{\mathcal{A}}}_\perp(\vec{k}) + \vec{\mathcal{P}}(\vec{k}).\dot{\vec{\mathcal{A}}}_\perp^*(\vec{k})\right]$$

$$\vec{\Pi}_{L'} = \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}'}{\partial \dot{\mathcal{A}}_\perp^*} = \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}'_R}{\partial \dot{\mathcal{A}}_\perp^*} + \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}'_I}{\partial \dot{\mathcal{A}}_\perp^*} = \varepsilon_0 \dot{\mathcal{A}}_\perp - \vec{\mathcal{P}}_\perp = -\left[\varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}}_\perp + \vec{\mathcal{P}}_\perp\right] = -\vec{\mathcal{D}}_\perp$$

$$\hookrightarrow \quad \vec{\Pi}_{L'}(\vec{r}) = -\left[\varepsilon_0 \vec{E}_\perp(\vec{r}) + \vec{P}_\perp(\vec{r})\right] = -\vec{D}_\perp(\vec{r})$$

Nouveau moment conjugué de $\vec{A}_\perp$ = − Induction électrique transverse

- Cas d'un système globalement neutre $\quad \vec{D} = \vec{D}_\perp$

$$\sum_\alpha q_\alpha = 0 \longrightarrow \vec{\Pi}_{L'}(\vec{r}) = -\left[\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})\right]$$

En dehors du système de charges, $\vec{P} = \vec{0}$, et $\Pi_{L'}$ coïncide avec le champ électrique total.

$\vec{\Pi}_{L'}$: meilleure approximation possible du champ électrique total par un champ transverse.

- Si $\sum_\alpha q_\alpha \neq 0$, la différence entre $\vec{\Pi}_{L'}$ et $-\varepsilon_0 \vec{E}$ est, en dehors des charges, le champ coulombien statique créé par la distribution de référence.

Nouvel hamiltonien

- $$H_{L'} = \sum_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \vec{P}_{\alpha L'} + \int d^3k \left(\dot{\vec{\mathcal{A}}}_\perp \cdot \vec{\Pi}^*_{L'} + \dot{\vec{\mathcal{A}}}^*_\perp \cdot \vec{\Pi}_{L'} \right) - L'$$

$H_{L'}$ doit être exprimé en fonction de $\vec{r}_\alpha, \vec{P}_{\alpha L'}, \vec{\mathcal{A}}_\perp, \vec{\Pi}_{L'}$

$$H_{L'} = \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{P}_{\alpha L'} - \int_0^1 u\,du\, q_\alpha \vec{B}(u\vec{r}_\alpha) \times \vec{r}_\alpha\right]^2 +$$

$$\int d^3k \left[\frac{(\vec{\Pi}_{L'} + \vec{\mathcal{P}}_\perp)(\vec{\Pi}_{L'} + \vec{\mathcal{P}}_\perp)^*}{\varepsilon_0} + \varepsilon_0 \omega^2 \vec{\mathcal{A}}^*_\perp \cdot \vec{\mathcal{A}}_\perp\right] + \sum_\alpha \varepsilon^\alpha_{coul} + \sum_{\alpha < \alpha'} \frac{q_\alpha q_{\alpha'}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_\alpha - \vec{r}_{\alpha'}|}$$

- Séparation en une partie $H_{PL'}$ ne dépendant que de $\vec{r}_\alpha$ et $\vec{P}_{\alpha L'}$, une partie $H_{RL'}$ ne dépendant que des $\vec{\mathcal{A}}_\perp$ et $\vec{\Pi}_{L'}$, et une partie $H_{IL'}$ dépendant des 2 types de variables à la fois

$$H_{PL'} = \sum_\alpha \frac{\vec{P}^2_{\alpha L'}}{2m_\alpha} + \sum_\alpha \varepsilon^\alpha_{coul} + \sum_{\alpha < \alpha'} \frac{q_\alpha q_{\alpha'}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_\alpha - \vec{r}_{\alpha'}|} + \int d^3k \frac{|\vec{\mathcal{P}}_\perp|^2}{\varepsilon_0}$$

$$H_{RL'} = \int d^3k \left[\frac{\vec{\Pi}^*_{L'} \cdot \vec{\Pi}_{L'}}{\varepsilon_0} + \varepsilon_0 \omega^2 \vec{\mathcal{A}}^*_\perp \cdot \vec{\mathcal{A}}_\perp\right]$$

$$H_{IL'} = \int d^3k \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\vec{\Pi}^*_{L'} \cdot \vec{\mathcal{P}}_\perp + \vec{\Pi}_{L'} \cdot \vec{\mathcal{P}}^*_\perp\right]$$

$$- \sum_\alpha \int_0^1 u\,du\, q_\alpha \left(\vec{r}_\alpha \times \frac{\vec{P}_{\alpha L'}}{m_\alpha}\right) \cdot \vec{B}(u\vec{r}_\alpha) + \sum_\alpha \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\left[\int_0^1 u\,du\, \vec{r}_\alpha \times \vec{B}(u\vec{r}_\alpha)\right]^2$$

Discussion physique

$H_{RL'}$ Somme d'hamiltoniens d'oscillateur harmonique. Représente l'énergie du champ magnétique et de l'induction électrique transverse.

$H_{PL'}$ Terme nouveau : $\int d^3k \frac{|\vec{\mathcal{P}}_\perp|^2}{\varepsilon_0} = \int d^3r \frac{\vec{P}^2(\vec{r})}{2\varepsilon_0}$

Energie propre dipolaire

Correction à l'énergie propre coulombienne, dont il faut tenir compte lorsqu'on calcule les corrections radiatives dans le nouveau point de vue.

Comme $\vec{P}_{\alpha L'} = m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha + \int_0^1 u\,du\, q_\alpha \vec{B}(u\vec{r}_\alpha)\times\vec{r}_\alpha \neq m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha$, le premier terme ne représente pas l'énergie cinétique.

$H_{IL'}$ – 1er terme : $\frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r\, \vec{\Pi}_{L'}\cdot\vec{P} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r\, \vec{D}_\perp(\vec{r})\cdot\vec{P}(\vec{r})$

Interaction de la densité de polarisation avec l'induction électrique

– 2ème terme : $-\int d^3r\, \vec{M}'(\vec{r})\cdot\vec{B}(\vec{r})$ $\quad \vec{M}'(\vec{r}) = \sum_\alpha \int_0^1 u\,du\, q_\alpha \left(\vec{r}_\alpha \times \frac{\vec{P}_{\alpha L'}}{m_\alpha}\right)\delta(\vec{r}-u\vec{r}_\alpha)$

Interaction avec le champ magnétique d'une densité de magnétisation exprimée en fonction des variables conjuguées $\vec{r}_\alpha, \vec{P}_{\alpha L'}$

– 3ème terme : énergie diamagnétique.

Quantification canonique

$\vec{r}_\alpha^{(2)} = \vec{r}_\alpha$ (multiplication par $\vec{r}_\alpha$) $\qquad \vec{P}_{\alpha L'}^{(2)} = \vec{P}_\alpha = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_\alpha$

$$\left[\mathcal{A}^{(2)}_{\perp\varepsilon}(\vec{k}), \Pi^{(2)+}_{L'\varepsilon'}(\vec{k}')\right] = i\hbar\,\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$\vec{A}^{(2)}_\perp(\vec{r}) = \vec{A}_\perp(\vec{r}) \qquad \vec{\Pi}^{(2)}_{L'}(\vec{r}) = \vec{\Pi}(\vec{r})$$

$$\begin{cases} \vec{A}_\perp(\vec{r}) = \int d^3k \sum_\varepsilon \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\left[\vec{\varepsilon}\, a_\varepsilon(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{\varepsilon}\, a^+_\varepsilon(\vec{k})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right] \\ \vec{\Pi}(\vec{r}) = -i\varepsilon_0\int d^3k \sum_\varepsilon \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\left[\vec{\varepsilon}\, a_\varepsilon(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \vec{\varepsilon}\, a^+_\varepsilon(\vec{k})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right] \end{cases}$$

$$\left[a_\varepsilon(\vec{k}), a^+_{\varepsilon'}(\vec{k}')\right] = \delta_{\varepsilon\varepsilon'}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

Expression de quelques grandeurs physiques

$$\vec{v}_\alpha^{(1)} = \frac{1}{m_\alpha}\left[\vec{P}_\alpha - q_\alpha \vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha)\right]$$

$$\vec{v}_\alpha^{(2)} = \frac{1}{m_\alpha}\left[\vec{P}_\alpha - q_\alpha\int_0^1 u\,du\,\vec{B}(u\vec{r}_\alpha)\times\vec{r}_\alpha\right]$$

$$\vec{E}^{(1)}(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\Pi}(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_\alpha q_\alpha \frac{\vec{r}-\vec{r}_\alpha}{|\vec{r}-\vec{r}_\alpha|^3}$$

$$\vec{E}^{(2)}(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\Pi}(\vec{r}) - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{P}(\vec{r}) + \underbrace{\vec{E}_0(\vec{r})}_{=\frac{\left(\sum_\alpha q_\alpha\right)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}}$$

Transformation unitaire

$$H^{(2)} = T\,H^{(1)}\,T^+ \qquad T = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int d^3k\,\vec{\mathcal{P}}^*(\vec{k})\cdot\vec{\mathcal{A}}_\perp(\vec{k})\right\}$$

Système $\mathcal{S}_A$ (charges $q_\alpha, q_{\alpha'} \dots$) et système $\mathcal{S}_B$ ($q_\beta, q_{\beta'} \dots$) centrés en $\vec{R}_A, \vec{R}_B$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \vec{P}_A(\vec{r}) + \vec{P}_B(\vec{r}) \qquad \vec{s}_\alpha = \vec{r}_\alpha - \vec{R}_A \qquad \vec{s}_\beta = \vec{r}_\beta - \vec{R}_B$$

$$\begin{cases} \vec{P}_A(\vec{r}) = \sum_\alpha \int_0^1 du\, q_\alpha \vec{s}_\alpha\, \delta(\vec{r} - \vec{R}_A - u\vec{s}_\alpha) \\ \vec{P}_B(\vec{r}) = \sum_\beta \int_0^1 du\, q_\beta \vec{s}_\beta\, \delta(\vec{r} - \vec{R}_B - u\vec{s}_\beta) \end{cases} \quad + \text{ Formules analogues pour } \vec{M}_A, \vec{M}_B$$

$$L' = L + \frac{dF}{dt} \qquad F = -\int d^3r\, [\vec{P}_A(\vec{r}) + \vec{P}_B(\vec{r})] \cdot \vec{A}_\perp(\vec{r})$$

Nouvel hamiltonien

$$\begin{aligned} H_{L'} = & \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_{\alpha L'} - q_\alpha \int_0^1 u\,du\, \vec{B}(\vec{R}_A + u\vec{s}_\alpha) \times \vec{s}_\alpha\right]^2 \\ & + \sum_\beta \frac{1}{2m_\beta}\left[\vec{p}_{\beta L'} - q_\beta \int_0^1 u\,du\, \vec{B}(\vec{R}_B + u\vec{s}_\beta) \times \vec{s}_\beta\right]^2 \\ & + \int d^3k \left[\frac{1}{\varepsilon_0}(\vec{\Pi}_{L'} + \vec{\mathcal{P}}_{\perp A} + \vec{\mathcal{P}}_{\perp B})^* \cdot (\vec{\Pi}_{L'} + \vec{\mathcal{P}}_{\perp A} + \vec{\mathcal{P}}_{\perp B}) + \varepsilon_0 \omega^2 \vec{\mathcal{A}}_\perp^* \cdot \vec{\mathcal{A}}_\perp\right] \\ & + \sum_\alpha \varepsilon^\alpha_{coul} + \sum_\beta \varepsilon^\beta_{coul} + \sum_{\alpha<\alpha'} \frac{q_\alpha q_{\alpha'}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_{\alpha'}|} + \sum_{\beta<\beta'} \frac{q_\beta q_{\beta'}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_\beta - \vec{r}_{\beta'}|} + \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha q_\beta}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|} \end{aligned}$$

$$H_{L'} = H_{RL'} + H^A_{IL'} + H^B_{IL'} + H^A_{PL'} + H^B_{PL'} + V^{AB}$$

$H_{RL'}$ sans changement. $H^A_{PL'}$ et $H^B_{PL'}$ ont même structure que pour un seul système de charge – Idem pour $H^A_{IL'}$ et $H^B_{IL'}$

Terme nouveau : $V^{AB} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\int d^3k \left[\vec{\mathcal{P}}^*_{\perp A} \cdot \vec{\mathcal{P}}_{\perp B} + \vec{\mathcal{P}}_{\perp A} \cdot \vec{\mathcal{P}}^*_{\perp B}\right] + \underbrace{\sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha q_\beta}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|}}_{V^{AB}_{Coul}}$

Or

$$\begin{aligned} V^{AB}_{Coul} &= V^{Tot}_{Coul} - V^{AA}_{Coul} - V^{BB}_{Coul} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \left[(\vec{E}_{/\!/A} + \vec{E}_{/\!/B})^2 - \vec{E}^2_{/\!/A} - \vec{E}^2_{/\!/B}\right] \\ &= \varepsilon_0 \int d^3r\, \vec{E}_{/\!/A} \cdot \vec{E}_{/\!/B} \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après les résultats du cours IX, comme A et B sont globalement neutres

$$\varepsilon_0 \vec{E}_{/\!/A} = -\vec{P}_{/\!/A} \qquad \varepsilon_0 \vec{E}_{/\!/B} = -\vec{P}_{/\!/B}$$

$\hookrightarrow$ $V^{AB}_{Coul} = \varepsilon_0 \int d^3r\, \vec{E}_{/\!/A} \cdot \vec{E}_{/\!/B} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r\, \vec{P}_{/\!/A} \cdot \vec{P}_{/\!/B}$

$\hookrightarrow$ $V^{AB} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r \left[\vec{P}_{\perp A} \cdot \vec{P}_{\perp B} + \vec{P}_{/\!/A} \cdot \vec{P}_{/\!/B}\right] = \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r\, \vec{P}_A \cdot \vec{P}_B$

Si $\mathcal{S}_A$ et $\mathcal{S}_B$ sont séparés, $\int d^3r\, \vec{P}_A \cdot \vec{P}_B = 0$ et $V^{AB} = 0$

$\hookrightarrow$ Disparition de toute interaction coulombienne entre $\mathcal{S}_A$ et $\mathcal{S}_B$

Interprétation physique

$\mathcal{S}_A$ et $\mathcal{S}_B$ interagissent uniquement via des champs retardés $\vec{B}$ et $\vec{\Pi}_{L'} = -\vec{D}$. Comme $\mathcal{S}_A$ et $\mathcal{S}_B$ sont séparés, l'induction créée par $\mathcal{S}_A$ en $\mathcal{S}_B$ coïncide (au facteur $-\varepsilon_0$ près) avec le champ électrique total (longitudinal + transverse) créé par $\mathcal{S}_A$ en $\mathcal{S}_B$.