29.10.85

Emission, absorption, diffusion de photons par un ion piégé

① Introduction - Buts de ce cours (Transparents T1 à T2)

② Hamiltonien de l'ion piégé
Niveaux d'énergie - Eléments de matrice de l'hamiltonien d'interaction (T3 à T5)

③ Processus d'émission spontanée
- Allure du spectre d'émission (T6 à T7)
- Intensités relatives des diverses raies d'émission (T8 à T9)
- Limite de Lamb-Dicke (T10 à T12)
- Variation de l'énergie moyenne de vibration après émission spontanée d'un photon (T13 à T15)

④ Processus d'absorption
- Section efficace d'excitation (T 16)
- Vitesse de variation de l'énergie moyenne de vibration associée au processus d'absorption (T 17)

⑤ Principe du refroidissement radiatif - Autres phénomènes analogues (T18 à T19)

⑥ Processus de diffusion
- Insuffisances du traitement précédent (T 20)
- Amplitude de diffusion (T 21)
- Vitesse de variation de l'énergie moyenne de vibration associée au processus de diffusion (T 22 à T 26)
- Calcul analogue pour un ion libre (T 27 à T 28)

⑦ Aperçu sur une description plus complète des phénomènes (T29 à T32)

Références

(1) Effet Dicke : R.H. Dicke, Phys. Rev. 89, 472 (1953)
(2) Effet Mossbauer : A. Abragam, "L'effet Mossbauer" Gordon and Breach (1964)
(3) Refroidissement radiatif (principe)
3a - D.J. Wineland, H. Dehmelt, Bull. Am. Phys. Soc. 20, 637 (1975)
3b - T.W. Hansch, A.L. Schawlow, Optics Comm. 13, 68 (1975)
(4) Pompage optique et effet luminofrigorique : A. Kastler, J. Phys. Rad. 11, 255 (1950)
(5) Polarisation nucléaire dynamique et refroidissement radiatif
A. Abragam et M. Goldman "Nuclear magnetism, order and disorder" Clarendon (1982) et references in
(6) Diffusion de photons par un ion piégé
6.a D.J. Wineland, W.M. Itano Phys. Rev. A20, 1521 (1979)
6.b W.M. Itano, D.J. Wineland Phys. Rev. A25, 35 (1982)
(7) Equation pilote pour le refroidissement laser d'ions piégés
7.a J. Javanainen, M. Lindberg, S. Stenholm J.O.S.A. B 1, 111 (1984)
7.b. M. Lindberg, S. Stenholm, J. Phys. B17, 3375 (1984)
et references in

Introduction

(1

Un ion piégé a 2 types de degrés de liberté

- Des degrés de liberté internes correspondant aux excitations des électrons dans le système du centre de masse

  Transitions optiques de l'ion

- Des degrés de liberté externes correspondant à la vibration du centre de masse de l'ion dans le piège

  L'émission ou l'absorption d'un photon par l'ion change non seulement l'état interne de cet ion, mais également son état externe, et donc son énergie de vibration

Buts de ce cours

(2

- Analyser, de manière quantitative, les variations de l'énergie de vibration de l'ion quand cet ion émet, absorbe, ou diffuse des photons quasirésonnants avec une transition interne de l'ion
- Dégager ainsi les éléments permettant de comprendre le mécanisme, la vitesse et les limites ultimes du refroidissement laser qui sera étudié dans le cours suivant
- Etablir des liens avec d'autres effets physiques importants comme l'effet Dicke, l'effet Mossbauer, le pompage optique

Hamiltonien de l'ion piégé

(3

$$\mathcal{H} = h + H$$

$\boxed{h}$ Degrés de liberté internes

e
$\updownarrow \hbar\omega_0$
g

Système à 2 niveaux e, g séparés par $\hbar\omega_0$
Transition optique ou UV

Γ : Largeur naturelle de e
Pbté / unité de temps d'émission spontanée d'un photon à partir de e

$\tau = \Gamma^{-1}$ Durée de vie radiative de e

$\boxed{H}$ Degrés de liberté externes

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

$\dfrac{\vec{P}^2}{2m}$ Energie cinétique du centre de masse de l'ion

$V(\vec{r})$ Potentiel piégeant l'ion

Par exemple, on peut prendre

$$V(\vec{r}) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$$

somme de potentiels harmoniques dans les 3 directions

Niveaux d'énergie de l'ion

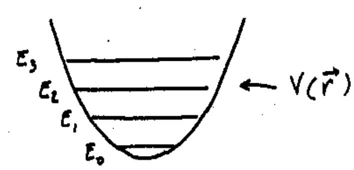
(4

2 nombres quantiques

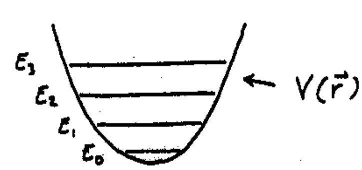
e ou g (internes)

n (externes) $\qquad H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$

e



g



2 niveaux électroniques e et g avec la même structure vibrationnelle associée à la vibration de l'ion dans le potentiel piégeant

Eléments de matrice de l'hamiltonien d'interaction ion-rayonnement 5
(à l'approximation dipolaire électrique)

Amplitude d'émission d'un photon $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ de vecteur d'onde $\vec{k}$, de polarisation $\vec{\varepsilon}$ avec passage de l'ion de $|e, \varphi_n\rangle$ à $|g, \varphi_\ell\rangle$

$$\langle g, \varphi_\ell ; \vec{k}\vec{\varepsilon} \,|\, V \,|\, e, \varphi_n ; 0\rangle$$

$$\sim \underbrace{\langle g|\vec{\varepsilon}.\vec{D}|e\rangle}_{\text{Partie interne}} \; \underbrace{\langle \varphi_\ell | e^{-i\vec{k}.\vec{r}} | \varphi_n\rangle}_{\text{Partie externe}}$$

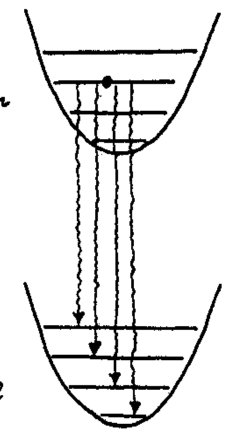
$\vec{D}$: Moment dipolaire électrique interne de l'ion $\quad \vec{d} = \langle g|\vec{D}|e\rangle$

Amplitude d'absorption d'un photon $\vec{k}\vec{\varepsilon}$

$$\sim \langle e|\vec{\varepsilon}.\vec{D}|g\rangle \, \langle \varphi_n | e^{i\vec{k}.\vec{r}} | \varphi_\ell\rangle$$

Finalement, ce sont les éléments de matrice de $e^{i\vec{k}.\vec{r}}$ et $e^{-i\vec{k}.\vec{r}}$ qui interviennent pour les transitions entre états externes

Emission spontanée d'un photon à partir de l'état $|e, \varphi_n\rangle$ 6



Plusieurs transitions possibles correspondant aux divers états finaux possibles $|g, \varphi_\ell\rangle$

Spectre de raies de fréquences $\omega_0 + \frac{E_n - E_\ell}{\hbar}$

Structure vibrationnelle de la raie optique

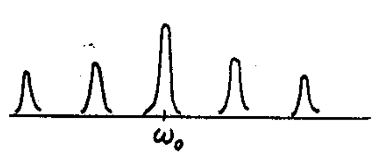
Les deux limites 7

Liaisons fortes $\quad |E_\ell - E_n| \gg \hbar\Gamma$

Fréquences de vibration grandes devant la largeur naturelle

L'ion vibre plusieurs fois dans le puits pendant la durée de vie de e

Raies d'émission bien séparées (Ecart des raies $\gg$ Largeur des raies)



Liaisons faibles $\quad |E_\ell - E_n| \ll \hbar\Gamma$

Pendant la durée de vie de e, l'ion se déplace très peu dans le puits

Les raies d'émission se recouvrent

On s'attend à trouver des résultats voisins de ceux relatifs à un atome libre

Intensités relatives des diverses raies émises à partir de $|e, \varphi_n\rangle$ 8

- Comme $|E_\ell - E_n| \ll \hbar\omega_0$, on peut négliger la variation de la densité d'états du photon émis d'une raie à l'autre, et négliger la variation de $|\vec{k}|$ dans $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ d'une raie à l'autre
- Les intensités relatives $I_{n\ell}$ des raies émises dans la transition $|\varphi_n\rangle \to |\varphi_\ell\rangle$ dans la direction $\vec{k}/k$ sont donc

$$I_{n\ell} = |\langle \varphi_\ell | e^{-i\vec{k}.\vec{r}} | \varphi_n\rangle|^2$$

(avec $|\vec{k}| \simeq k_0 = \omega_0 / c$)

Ces intensités sont bien normalisées puisque

$$\sum_\ell I_{n\ell} = \sum_\ell \langle \varphi_n | e^{i\vec{k}.\vec{r}} | \varphi_\ell\rangle\langle\varphi_\ell | e^{-i\vec{k}.\vec{r}} | \varphi_n\rangle$$
$$= \langle \varphi_n | \varphi_n \rangle = 1$$

Réinterprétation de l'amplitude (9

$\langle \varphi_e | e^{-i\vec{k}.\vec{r}} | \varphi_n \rangle$

$e^{-i\vec{k}.\vec{r}}$: Opérateur de translation de $-\hbar\vec{k}$ dans l'espace des $\vec{p}$, $\mathcal{E}_p$

$\langle \varphi_e | e^{-i\vec{k}.\vec{r}} | \varphi_n \rangle$ est donc l'intégrale de recouvrement (dans $\mathcal{E}_p$) de φ_e par φ_n translaté de $-\hbar\vec{k}$

Cas de $\langle \varphi_n | e^{-i\vec{k}.\vec{r}} | \varphi_n \rangle$

$\Delta x \sim a_0$. Extension spatiale de φ_n

$\Delta p \sim \dfrac{\hbar}{\Delta x} \sim \dfrac{\hbar}{a_0}$ Extension en p de φ_n

Il faut donc comparer l'amplitude de la translation, $-\hbar k$, à $\Delta p \sim \hbar / a_0$

Si $\hbar k \ll \hbar / a_0$, c'est à dire encore si $\lambda \ll a_0$, φ_n est translaté en p d'une quantité très faible devant sa largeur et $\langle \varphi_n | e^{-i\vec{k}.\vec{r}} | \varphi_n \rangle$ est très proche de $\langle \varphi_n | \varphi_n \rangle = 1$

Limite de Lamb-Dicke $a_0 \ll \lambda$ (10

Si $a_0 \ll \lambda$, l'intensité relative $|\langle \varphi_n | e^{-i\vec{k}.\vec{r}} | \varphi_n \rangle|^2$ de la raie $e\,\varphi_n \rightarrow g\,\varphi_n$, de fréquence ω_0, est très proche de 1. Cette raie est donc beaucoup plus intense que toutes les autres

Emission d'une raie intense, de largeur Γ, non déplacée.

C'est l'<u>effet Dicke</u>

Les raies émises par un système confiné dans une région suffisamment petite ($a_0 \ll \lambda$), ne subissent aucun déplacement du fait du mouvement du système

(Référence (1))

Autre forme de la condition de Lamb-Dicke (11

Cas d'un puits harmonique de fréquence de vibration ω_v

Si $|\varphi_n\rangle = |\varphi_0\rangle$ $\qquad a_0 \sim \sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega_v}}$

$$a_0 \ll \lambda \longleftrightarrow \frac{\hbar}{m\omega_v} \ll \lambda^2 = \frac{(2\pi)^2}{k^2}$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \ll \hbar\omega_v$$

Energie de recul ≪ Energie de liaison

Le système émetteur est si rigidement lié qu'il ne peut encaisser tout seul le recul lié à l'émission du photon. C'est le système global ion + piège qui recule

Analogie très étroite avec l'<u>effet Mossbauer</u> : émission sans changement de fréquence d'un photon γ par un noyau rigidement lié dans un cristal (référence (2))

Interprétation semiclassique (12

Modèle à 1 dimension : Ion vibrant à ω_v le long de Ox et portant un dipole oscillant à la fréquence optique ω_v

Un observateur voit cette lumière <u>modulée en fréquence</u> par suite de l'effet Doppler associé à la vibration à ω_v

Raie centrale à ω_0 et bandes latérales à $\omega_0 + r\omega_v$, $r = \pm 1, \pm 2 \cdots$, d'intensité $J_r^2(k x_0)$

J_r : Fonction de Bessel d'ordre r

x_0 : Amplitude de la vibration

Si $k x_0 \ll 1$, c'est à dire si $x_0 \ll \lambda$, seule la composante centrale, de poids $J^2(k x_0) \simeq 1$, sera appréciable

Variation de l'énergie moyenne de vibration de l'ion (après émission spontanée d'un photon) (13

L'émission d'un photon sur la transition $e\,\varphi_n \to g\,\varphi_\ell$, de poids $I_{n\ell}$, fait varier E_{ext} de $\Delta E = E_\ell - E_n$

Pour obtenir $\langle \Delta E \rangle$, il faut pondérer $E_\ell - E_n$ par $I_{n\ell}$ et sommer sur tous les états finaux φ_ℓ possibles ainsi que sur $\vec{\kappa} = \vec{k}/k$ et $\vec{\varepsilon}$ (moyenne angulaire)

$$\langle \Delta E \rangle = \sum_\ell \sum_{\vec{\kappa}\vec{\varepsilon}} (E_\ell - E_n)\, I_{\ell n} =$$

$$= \sum_\ell \sum_{\vec{\kappa}\vec{\varepsilon}} \langle \varphi_n | e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} | \varphi_\ell \rangle \langle \varphi_\ell | [H, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}] | \varphi_n \rangle$$

$$= \sum_{\vec{\kappa}\vec{\varepsilon}} \langle \varphi_n | e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} [H, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}] | \varphi_n \rangle$$

$$= \sum_{\vec{\kappa}\vec{\varepsilon}} \langle \varphi_n | \underbrace{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} H e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}_{\frac{1}{2m}(\vec{p} - \hbar\vec{k})^2 + V(\vec{r})} - \underbrace{H}_{\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})} | \varphi_n \rangle$$

Transformé de H par translation de $\vec{p}$

Calcul de $\langle \Delta E \rangle$ (14

$$\langle \Delta E \rangle = \sum_{\vec{\kappa}\vec{\varepsilon}} \langle \varphi_n | \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} - \frac{\hbar \vec{k}}{m} \cdot \vec{p} | \varphi_n \rangle$$

$$\sum_{\vec{\kappa}\vec{\varepsilon}} \cdots = \int d\Omega_k\, P(\Omega_k) \cdots$$

$P(\Omega_k)$: Distribution angulaire (normée) de l'émission spontanée à partir de e

$P(\vec{\kappa}) = P(-\vec{\kappa}) \longrightarrow$ le $2^{\text{ème}}$ terme est nul

$$\hookrightarrow \quad \boxed{\langle \Delta E \rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E_{recul} = R}$$

Quel que soit l'état de vibration initial, l'énergie <u>moyenne</u> de vibration <u>augmente</u> de R au cours du processus d'émission spontanée.

L'approche semiclassique donne au contraire $\langle \Delta E \rangle = 0$, car l'égalité $J_r^2 = J_{-r}^2$ entraine que le spectre d'émission est symétrique autour de ω_0. Résultat visiblement faux pour l'émission spontanée à partir de l'état $e\,\varphi_0$ (φ_0 : état fondamental de vibration)

Cas où $H = H_x + H_y + H_z$ (15

avec $\quad H_x = \frac{p_x^2}{2m} + V(x)$

La même méthode permet de calculer séparément $\langle \Delta H_x \rangle$, $\langle \Delta H_y \rangle$ et $\langle \Delta H_z \rangle$, et donne

$$\langle \Delta H_i \rangle = s_i R \qquad i = x, y, z$$

avec

$$\begin{cases} s_x = \int d\Omega_k\, P(\Omega_k) \sin^2\theta \cos^2\varphi \\ s_y = \int d\Omega_k\, P(\Omega_k) \sin^2\theta \sin^2\varphi \\ s_z = \int d\Omega_k\, P(\Omega_k) \cos^2\theta \end{cases}$$

Les s_i dépendent de la polarisation de la transition e-g

$$s_x + s_y + s_z = 1$$

L'énergie de recul R, gagnée en moyenne lors de l'émission, est répartie sur les 3 directions, avec des poids relatifs s_x, s_y, s_z

Etude du processus d'absorption (16

Section efficace totale d'excitation du niveau $e\,\varphi_j$ à partir de $g\,\varphi_\ell$

Comme le niveau $e\,\varphi_j$ a une largeur naturelle Γ, la raie d'absorption $g\,\varphi_\ell \to e\,\varphi_j$ est une lorentzienne, de largeur totale Γ, centrée en $\omega_0 + \frac{E_j - E_\ell}{\hbar}$, de force d'oscillateur $|\langle \varphi_j | e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} | \varphi_\ell \rangle|^2$

$$\sigma_{g\varphi_\ell \to e\varphi_j} = \sigma_0 |\langle \varphi_j | e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} | \varphi_\ell \rangle|^2 \frac{(\Gamma/2)^2}{(\Gamma/2)^2 + [\omega - \omega_0 - (E_j - E_\ell)/\hbar]^2}$$

σ_0 : Section efficace d'absorption à résonance pour l'ion libre (égale à $3\lambda_0^2/2\pi$ si la polarisation du photon incident correspond à celle de la transition e-g)

Probabilité d'excitation par unité de temps du niveau φ_j à partir de φ_ℓ (17)

$$\frac{I}{\hbar\omega}\,\sigma_{g\varphi_\ell \to e\varphi_j}$$

I Energie incidente par unité de temps et par unité de surface

$\frac{I}{\hbar\omega}$ Flux de photons incidents

Vitesse de variation de l'énergie moyenne de vibration due au processus d'absorption

$\mathcal{P}_\ell$: Probabilité d'occupation du niveau $g\,\varphi_\ell$

(On suppose les "cohérences" entre $g\varphi_\ell$ et $g\varphi_{\ell'}$ nulles)

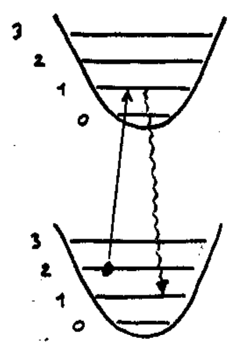
$$\langle \Delta E \rangle = \sum_\ell \mathcal{P}_\ell \sum_j (E_j - E_\ell)\,\frac{I}{\hbar\omega}\,\sigma_{g\varphi_\ell \to e\varphi_j}$$

Moyenne sur l'état initial
Sommation sur l'état final

Ideé du refroidissement radiatif (18)

- On peut choisir la fréquence ω des photons incidents
- En jouant sur le caractère résonnant des sections efficaces d'excitation, on peut réduire l'énergie de vibration au cours du processus d'absorption. Il suffit d'accorder le laser sur une bande latérale de fréquence inférieure à ω_0 excitant préférentiellement l'aller de φ_ℓ à φ_j avec $E_j < E_\ell$
- Si l'énergie moyenne regagnée lors du processus d'émission spontanée (égale à R) est inférieure à l'énergie perdue lors du processus d'absorption, l'effet global d'un cycle absorption-émission spontanée est de refroidir les degrés de liberté externes

Analogie avec le pompage optique (19)



Mécanisme de "luminoréfrigération" suggéré par A. Kastler pour refroidir les degrés de liberté Zeeman ou hyperfins, et appliqué ici directement aux degrés de liberté de vibration (ref.(4))

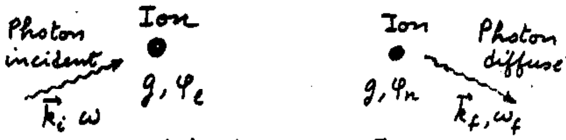
Autres phénomènes analogues

- Polarisation nucléaire dynamique (ref.(5))
- Refroidissement du mouvement magnétron d'électrons piégés (voir cours 84-85)

Questions soulevées par la discussion précédente (20)

- Est il correct de traiter séparément l'effet du processus d'absorption et celui du processus d'émission spontanée?
- Ne faut-il pas plutôt considérer globalement le processus de diffusion, le refroidissement étant dû à des processus de diffusion Raman antiStokes
- Les amplitudes de diffusion correspondant aux divers états excités intermédiaires possibles interfèrent-elles ?
- La description des phénomènes en termes de processus de diffusion n'est valable qu'à faible intensité. (Fréquence de Rabi $\omega_1 \ll \Gamma$). Que se passe-t-il à forte intensité ?

Diffusion d'un photon par un ion piégé (21)



Etat initial — Etat final

Amplitude de diffusion (à l'ordre le plus bas)

$$A(\vec{k}_i\,\omega, g\,\varphi_\ell \to \vec{k}_f\,\omega_f, g\,\varphi_n) \sim$$

$$\sum_j \frac{\langle\varphi_n|e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}}|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}|\varphi_\ell\rangle}{\hbar\omega - \hbar\omega_0 + E_\ell - E_j + i\hbar\frac{\Gamma}{2}} \times$$

$$\delta^{(T)}(\hbar\omega + E_\ell - \hbar\omega_f - E_n)$$

Fonction delta de largeur $\hbar/T$

- Conservation de l'énergie globale à $\hbar/T$ près (où T est le temps d'interaction)
- Somme de contributions correspondant à chaque état intermédiaire $e\,\varphi_j$. Dénominateur résonnant quand $\hbar\omega + E_\ell = \hbar\omega_0 + E_j$

Probabilité de transition par unité de temps $w(\vec{k}_i\,\omega, g\,\varphi_\ell \to \vec{k}_f\,\omega_f, g\,\varphi_n)$ (22)

Possible à définir car $[\delta^{(T)}]^2 \sim T\,\delta^{(T)}$

$$w(\vec{k}_i\,\omega, g\,\varphi_\ell \to \vec{k}_f\,\omega_f, g\,\varphi_n) \sim$$

$$\left|\sum_j \frac{\langle\varphi_n|e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}}|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}|\varphi_\ell\rangle}{\hbar\omega - \hbar\omega_0 + E_\ell - E_j + i\hbar\frac{\Gamma}{2}}\right|^2 \times$$

$$\delta^{(T)}(\hbar\omega + E_\ell - \hbar\omega_f - E_n)$$

Vitesse de variation de $\langle H\rangle$ au cours du processus de diffusion

$$\frac{d}{dt}\langle H\rangle = \sum_\ell \mathcal{P}_\ell \sum_n \sum_{\vec{k}_f\vec{\varepsilon}_f}$$

$$(E_n - E_\ell)\, w(\vec{k}_i\,\omega, g\,\varphi_\ell \to \vec{k}_f\,\omega_f, g\,\varphi_n)$$

$\sum_\ell \mathcal{P}_\ell$: Moyenne sur l'état initial

$\mathcal{P}_\ell$: Population de l'état φ_ℓ (Pas de cohérences entre φ_ℓ et $\varphi_{\ell'}$)

$\sum_n \sum_{\vec{k}_f\vec{\varepsilon}_f}$ Sommation sur les divers états finaux possibles

Calcul de $d\langle H\rangle/dt$ (23)

Sommation sur $|\vec{k}_f| = \omega_f/c$

La présence de $\delta^{(T)}(\hbar\omega + E_\ell - \hbar\omega_f - E_n)$ fait apparaître la densité d'états ρ du photon $\vec{k}_f$ en $\hbar\omega + E_\ell - E_n$

Comme ω est proche de ω_0, que $|E_\ell - E_n| \ll \hbar\omega_0$ et que ρ varie lentement avec ω_f, $\rho(\hbar\omega + E_\ell - E_n) \simeq \rho(\hbar\omega_0)$ indépendant de ℓ et n

$$\hookrightarrow \sum_{|\vec{k}_f|} (E_n - E_\ell)\, w(\vec{k}_i\,\omega, g\,\varphi_\ell \to \vec{k}_f\,\omega_f, g\,\varphi_n)$$

$$\sim (E_n - E_\ell)\,|\langle\varphi_n|B|\varphi_\ell\rangle|^2$$

où

$$B = e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}}\, C\, e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}$$

avec

$$C = \sum_j \frac{|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|}{\hbar\omega - \hbar\omega_0 + E_\ell - E_j + i\hbar\frac{\Gamma}{2}}$$

Sommation sur φ_n

$$\sum_n (E_n - E_\ell)\,|\langle\varphi_n|B|\varphi_\ell\rangle|^2$$

$$= \sum_n \langle\varphi_\ell|B^+|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|[H,B]|\varphi_\ell\rangle$$

$$= \langle\varphi_\ell|B^+[H,B]|\varphi_\ell\rangle$$

car B est indépendant de φ_n

(24)

$$[H,B] = [H, e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}}\, C\, e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}]$$

H commute avec $C = \sum_j \frac{|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|}{\hbar\omega - \hbar\omega_0 + E_\ell - E_j + i\hbar\frac{\Gamma}{2}}$

$$[H,B] = [H, e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}}]\, C\, e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} + e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}}\, C\, [H, e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}]$$

Contribution de $[H, e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}]$ dans $\langle\varphi_\ell|B^+[H,B]|\varphi_\ell\rangle$:

$$\langle\varphi_\ell|e^{-i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}\, C^+ \underbrace{e^{i\vec{k}_f\cdot\vec{r}} e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}}}_{=1} C\, [H, e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}]|\varphi_\ell\rangle$$

$$C^+ C = \sum_j \frac{|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|}{[\hbar\omega - \hbar\omega_0 + E_\ell - E_j]^2 + \hbar^2\Gamma^2/4}$$

$$\hookrightarrow \sum_j (E_j - E_\ell)\, \underbrace{\frac{|\langle\varphi_j|e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}|\varphi_\ell\rangle|^2}{[\hbar\omega - \hbar\omega_0 + E_\ell - E_j]^2 + \hbar^2\Gamma^2/4}}$$

Probabilité d'excitation de φ_j à partir de φ_ℓ

le terme $\sum_j \ldots$ donne (après sommation sur $\vec{k}_f\ \vec{\varepsilon}_f$) la variation d'énergie moyenne après absorption d'un photon $\vec{k}_i$ à partir de l'état $g\,\varphi_\ell$

<u>Contribution de $[H, e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}}]$ dans</u> (25
$\langle \varphi_e | B^+ [H, B] | \varphi_e \rangle$

$$\langle \varphi_e | e^{-i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} C^+ \underbrace{e^{i\vec{k}_f\cdot\vec{r}} [H, e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}}]} C\, e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} | \varphi_e \rangle$$

$$e^{i\vec{k}_f\cdot\vec{r}}\, H\, e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}} - H = \frac{\hbar^2 k_f^2}{2m} - \frac{\hbar \vec{k}_f}{m}\cdot\vec{p}$$

La sommation sur $\vec{\kappa}_f = \vec{k}_f / k_f$ fait disparaître le 2ème terme à cause de la symétrie de l'émission spontanée

$$\hookrightarrow \quad R \langle \varphi_e | e^{-i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} C^+ C\, e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} | \varphi_e \rangle =$$

$$= R \sum_j \frac{|\langle \varphi_j | e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} | \varphi_e \rangle|^2}{[\hbar\omega - \hbar\omega_0 + E_e - E_j]^2 + \hbar^2 \Gamma^2/4}$$

Variation de l'énergie moyenne au cours du processus d'émission spontanée suivant l'excitation de l'ion à partir de l'état φ_e

Variation égale à R, quel que soit le niveau $|\varphi_j\rangle$ excité.

Pas de contribution des cohérences entre $e\varphi_j$ et $e\varphi_{j'}$ (à cause de la somme sur $\vec{\kappa}_f$)

<u>Résultat final</u> (26

Après réintroduction des constantes de proportionnalité et moyenne sur l'état initial, on obtient

$$\frac{d}{dt}\langle H \rangle = \frac{I \sigma_0}{\hbar\omega} \sum_e \mathcal{P}_e \sum_j (E_j - E_e + R)\, |\langle \varphi_j | e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} | \varphi_e \rangle|^2 \frac{\Gamma^2/4}{[\omega - \omega_0 + \frac{E_e - E_j}{\hbar}]^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

σ_0 : Section efficace résonnante pour l'ion libre

$\frac{I}{\hbar\omega}$: Flux de photons incidents

Pour évaluer la variation d'énergie externe au cours du processus de diffusion, il est donc correct d'ajouter séparément les contributions des processus d'absorption et d'émission spontanée

<u>Calcul analogue pour un ion libre</u>

Conservation de l'énergie et de l'impulsion globales dans la diffusion (27

$$\hbar\vec{k}_i + \vec{P}_i = \hbar\vec{k}_f + \vec{P}_f$$

$$\hbar\omega_i + \vec{P}_i^2/2m = \hbar\omega_f + \vec{P}_f^2/2m$$

$\vec{P}_i, \vec{P}_f$: Impulsions initiale et finale

<u>Variation d'énergie externe de l'ion</u>

$$\Delta E = \frac{1}{2m}[\vec{P}_f^2 - \vec{P}_i^2] = \frac{1}{2m}[\vec{P}_i + \hbar(\vec{k}_i - \vec{k}_f)]^2 - \frac{1}{2m}\vec{P}_i^2$$

$$= \frac{\hbar^2 \vec{k}_i^2}{2m} + \frac{\hbar^2 \vec{k}_f^2}{2m} + 2\hbar \frac{\vec{k}_i\cdot\vec{P}_i}{m} - 2\hbar\frac{\vec{k}_f\cdot(\vec{P}_i + \hbar\vec{k}_i)}{m}$$

<u>Moyenne sur le photon diffusé</u>

Le dernier terme donne zéro

$$\langle \Delta E \rangle = R + R + 2\hbar\vec{k}_i\cdot\frac{\vec{P}_i}{m}$$

Recul à l'absorption
Dirigé suivant $\vec{k}_i$

Recul à l'émission
Redistribué sur Ox, Oy, Oz
$s_x R, s_y R, s_z R$

Si $\vec{k}_i\cdot\frac{\vec{P}_i}{m} = \vec{k}_i\,\vec{v}_i$ est négatif, le dernier terme refroidit

<u>Vitesse de variation de $\langle H \rangle$</u> (28

<u>Section efficace d'absorption</u> d'un photon par un ion libre de vitesse $\vec{P}_i/m = \vec{v}_i$

$$\sigma(\vec{v}_i) = \sigma_0 \frac{\Gamma^2/4}{[\omega_i - \omega_0 - \vec{k}_i\cdot\vec{v}_i]^2 + \Gamma^2/4}$$

Décalage Doppler de la raie d'absorption
[on néglige le décalage dû au recul $R \ll \hbar\Gamma$)

<u>Expression de $d\langle H\rangle/dt$</u>

$$\frac{d\langle H\rangle}{dt} = \int d^3 v_i\, \mathcal{P}(\vec{v}_i) \frac{I}{\hbar\omega_i} \sigma(\vec{v}_i) [R + R + 2\hbar\vec{k}_i\cdot\vec{v}_i]$$

Moyenne sur les vitesses initiales de la variation d'énergie moyenne pour un ion de vitesse $\vec{v}_i$

Pour obtenir $d\langle H_x\rangle/dt$, il faut remplacer le crochet par

$$[R + R s_x + 2\hbar k_{ix} v_{ix}]$$

Nous vérifierons ultérieurement que les résultats relatifs à un ion très faiblement lié ($\hbar\omega_v \ll \Gamma$) ressemblent à ceux relatifs à l'ion libre

Limites des traitement précédent (29)

① *Limité aux intensités faibles*
(Pas d'effet de saturation)

Cette limitation n'est pas trop grave dans la mesure où le refroidissement ne nécessite pas de saturer fortement la transition

Avantage des intensités faibles : possibilité d'ajouter indépendamment les effets de plusieurs faisceaux laser

② *Etude limitée à l'énergie moyenne* $\langle E \rangle$

Que peut-on dire de la distribution en énergie ?

Peut-on parler d'une température de vibration ?

③ *Modèle très simple de piège : potentiel statique* $V(\vec{r})$

- Comment fonctionne le refroidissement laser dans un piège de Penning ?
- Effet du mouvement de vibration rapide dans un piège de Paul

Equation pilote pour la matrice densité de l'ion (30)

(incluant les degrés de liberté aussi bien externes qu'internes)

$$\langle a, \varphi_n | \sigma | b, \varphi_\ell \rangle = \sigma^{ab}_{n\ell}$$

$$a, b = e \text{ ou } g$$

Il est possible d'établir des équations d'évolution couplées pour les $\sigma^{ab}_{n\ell}$ incluant :

- les termes d'évolution libre
- les termes de couplage avec le faisceau laser incident
  (Fréquence de Rabi ω_1)
- les termes de relaxation associés à l'émission spontanée
  (Largeur naturelle Γ)

Validité des équations non limitée à $\omega_1 < \Gamma$

Elimination adiabatique des degrés de liberté internes (31)

Recherche d'une équation d'évolution pour la matrice densité réduite

$$\rho_{n\ell} = \sigma^{aa}_{n\ell} + \sigma^{bb}_{n\ell}$$

Trace sur les degrés de liberté internes

Possibilité d'obtenir une équation d'évolution simple pour $\rho_{n\ell}$, grâce au fait que les variables internes évoluent beaucoup plus vite (échelle de temps Γ^{-1}) que les variables externes (échelle de temps $\hbar/R$). On a en effet $\hbar\Gamma \gg R$

Voir les travaux de l'école finlandaise [références 7a et 7b] et les calculs analogues faits pour le refroidissement laser d'atomes libres [cours 1983-84]

Résultats d'un tel calcul (32)

(pour une onde laser plane et un puits harmonique)

- Les populations d'équilibre des niveaux de vibration suivent bien une loi de Boltzmann, ce qui permet de définir une température
- Aux faibles intensités, résultats en accord, pour l'énergie moyenne de vibration, avec ceux du traitement perturbatif présenté plus haut (basé sur l'étude du processus de diffusion)

Nous nous contenterons ici de ce traitement perturbatif

Refroidissement dans un piège de Penning

Ce problème sera discuté ultérieurement (de manière qualitative)