Piège de Paul

But de ce cours.

Etude du mouvement d'une particule dans un potentiel quadrupolaire oscillant. Les problèmes liés à la présence de plusieurs particules (collisions, charge d'espace) seront abordés ultérieurement.

Références page II - 9

Piège de Paul (1)

$$\phi(\vec{r},t) = A(x^2+y^2-2z^2)\cos\Omega t$$

Potentiel quadrupolaire modulé à la fréquence Ω

Limite adiabatique

Cas où la vibration à Ω est très rapide devant le mouvement séculaire

Notion de potentiel effectif
Images physiques simples
Résultats analytiques

Etude générale

Ne nécessite pas l'existence de 2 fréquences très différentes

Equation de Mathieu
Recherche des solutions stables de cette équation

Limite adiabatique (2)

$$\phi(\vec{r},t) = A(x^2+y^2-2z^2)\cos\Omega t$$

Champ au point $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ $\quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$

$$\vec{E}(\bar{x},\bar{y},\bar{z},t) = \vec{\mathcal{E}}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\cos\Omega t$$

$$\mathcal{E}_x = -2A\bar{x} \qquad \mathcal{E}_y = -2A\bar{y} \qquad \mathcal{E}_z = 4A\bar{z}$$

Potentiel effectif

$$V_{eff}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \frac{q^2\vec{\mathcal{E}}^2}{4m\Omega^2} = \frac{q^2A^2}{m\Omega^2}\left[\bar{x}^2+\bar{y}^2+4\bar{z}^2\right]$$

Potentiel harmonique dans les 3 directions. Minimum en $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=0$

V_{eff} indépendant du signe de q

Fréquences du mouvement lent

$$V_{eff}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \frac{m}{2}\left[\bar{\omega}_x^2\bar{x}^2+\bar{\omega}_y^2\bar{y}^2+\bar{\omega}_z^2\bar{z}^2\right]$$

$$\bar{\omega}_z = 2\bar{\omega}_x = 2\bar{\omega}_y = 2\sqrt{2}\,qA/m\Omega$$

Vibration lente à $\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$

Traitement valable si $\Omega \gg \bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$

Mouvement de la particule (3

$$x_i = \bar{x}_i + \xi_i = \bar{x}_i - \frac{q\,\mathcal{E}_i(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}{m\Omega^2}\cos\Omega t$$

Par exemple, pour $i = 3$

$$z = \bar{z} - \frac{4Aq}{m\Omega^2}\,\bar{z}\cos\Omega t$$

Mouvement lent   Mouvement rapide

Expression de $\bar{z}$

$$\bar{z} = \bar{z}_m \cos\bar{\omega}_z t$$

$\bar{z}_m$: Amplitude de la vibration lente à $\bar{\omega}_z = 2\sqrt{2}\,qA/m\Omega$

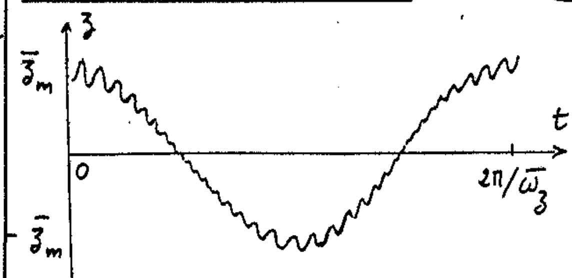
$$\frac{4Aq}{m\Omega^2} = \sqrt{2}\,\frac{\bar{\omega}_z}{\Omega} \ll 1$$

Finalement

$$z = \bar{z}_m \cos\bar{\omega}_z t\left[1 - \sqrt{2}\,\frac{\bar{\omega}_z}{\Omega}\cos\Omega t\right]$$

Fréquences : ω_z , $\Omega \pm \omega_z$

Allure du mouvement (4



Amplitude de la vibration rapide proportionnelle à la distance au centre, et très petite devant $\bar{z}_m$ (réduction par $\sqrt{2}\,\bar{\omega}_z/\Omega \ll 1$)

Vitesse associée au mouvement lent

$$\dot{\bar{z}} = -\bar{z}_m\bar{\omega}_z \sin\bar{\omega}_z t$$

Vitesse associée au mouvement rapide

$$\dot{\xi} \simeq -\bar{z}_m\sqrt{2}\,\frac{\bar{\omega}_z}{\Omega}\,\Omega\sin\Omega t$$
$$= -\bar{z}_m\sqrt{2}\,\bar{\omega}_z\sin\Omega t$$

Vitesses comparables

Profondeur du puits effectif (en volts) (5

Profondeur le long de Oz : $\bar{D}_z$

$$\bar{D}_z = \frac{1}{q}\left[V_{eff}(0,0,z_0) - V_{eff}(0,0,0)\right] = \frac{4qA^2z_0^2}{m\Omega^2}$$

$$\frac{1}{2}m\bar{\omega}_z^2 z_0^2 = q\bar{D}_z$$

Profondeur le long de Ox et Oy : $\bar{D}_x = \bar{D}_y$

$$\frac{1}{2}m\bar{\omega}_x^2 r_0^2 = q\bar{D}_x$$

Comme $\bar{\omega}_z = 2\bar{\omega}_x$, $\bar{D}_x = \bar{D}_z$ si $r_0 = 2z_0$

Lien avec la différence de potentiel appliquée entre les électrodes

$$\phi = A(x^2+y^2-2z^2)\cos\Omega t$$

$$V_0\cos\Omega t = \phi(r_0,0,0,t) - \phi(0,0,z_0,t)$$
$$= A(r_0^2 + 2z_0^2)\cos\Omega t$$

$$\hookrightarrow\quad A = \frac{V_0}{r_0^2+2z_0^2}$$

$$\bar{D}_z = \frac{4qV_0^2z_0^2}{m(r_0^2+2z_0^2)^2\Omega^2} \qquad \bar{\omega}_z = \frac{2\sqrt{2}\,qV_0}{m(r_0^2+2z_0^2)\Omega}$$

Comparaison avec la profondeur du puits statique (pour $\Omega = 0$) (6

$$D_z = \phi(0,0,z_0) - \phi(0,0,0)$$
$$= -2Az_0^2 = -\frac{2V_0z_0^2}{r_0^2+2z_0^2}$$

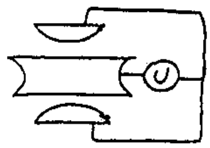
(On suppose $V_0 < 0$)

$$\frac{\bar{D}_z}{D_z} = \frac{-2qV_0}{m(r_0^2+2z_0^2)\Omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\bar{\omega}_z}{\Omega}$$

Comme $\bar{\omega}_z \ll \Omega$, le puits de potentiel effectif est beaucoup moins profond que le puits statique (pour $\Omega = 0$)

Il ne faut pas oublier cependant qu'avec $\Omega = 0$, on ne peut pas avoir de puits de potentiel dans les 3 directions à la fois

Combinaison d'un potentiel effectif et d'un potentiel statique (7



$$U = U_0 + V_0 \cos \Omega t$$

$$\phi = \frac{U}{r_0^2 + 2z_0^2}(x^2+y^2-2z^2)$$

Potentiel effectif (provenant de $V_0 \cos \Omega t$)

$$\psi = \frac{q V_0^2}{m\Omega^2 (r_0^2+2z_0^2)^2}(\bar{x}^2+\bar{y}^2+4\bar{z}^2)$$

Potentiel statique (provenant de U_0)

$$\phi_{st} = \frac{U_0}{r_0^2+2z_0^2}(\bar{x}^2+\bar{y}^2-2\bar{z}^2)$$

Potentiel total $\quad \phi_{tot} = \phi_{st} + \psi$

Isotrope si $U_0 = qV_0^2/m\Omega^2(r_0^2+2z_0^2)$

Ordres de grandeur

$r_0 = \sqrt{2}\, z_0 = 1.13$ cm , $\Omega/2\pi = 524$ kHz , $U_0 = +8$ V

$V_0 = 297$ V $\longrightarrow$ $D_r = D_z = 12$ eV

$\bar{\omega}_z/2\pi = 69$ kHz $\quad \bar{\omega}_x/2\pi = 49$ kHz

Visualisation expérimentale (8

Petites sphères chargées en aluminium ($\phi \simeq 20\mu m$), piégées dans un piège de Paul. Illuminées par un arc et observées directement

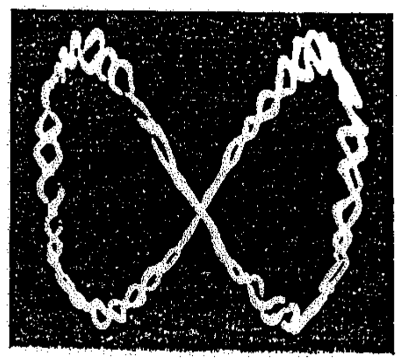
Voir référence (5)

Exemple de résultat

$U_0 = 0 \quad V_0 = 500$ V $\quad \Omega/2\pi = 200$ Hz

$q/m = 0.0053$ Coulomb / Kg

Comme $\bar{\omega}_z = 2\bar{\omega}_{x,y}$, on observe une courbe de Lissajous 2 : 1 pour le mouvement lent (Figure extraite de 5)



Equations du mouvement (9

$$\phi = \frac{U}{r_0^2+2z_0^2}(x^2+y^2-2z^2)$$

$$U = U_0 + V_0 \cos \Omega t \quad \begin{cases} \text{d.d.p. statique} \\ + \text{ d.d.p. modulée} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{q}{m}\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{-2q}{m(r_0^2+2z_0^2)}\left[U_0 + V_0 \cos \Omega t\right] x \\ \ddot{z} = -\dfrac{q}{m}\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = \dfrac{4q}{m(r_0^2+2z_0^2)}\left[U_0 + V_0 \cos \Omega t\right] z \end{cases}$$

Changement de variables

$\Omega t = 2\tau \qquad x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = z$

$a_3 = a_z = -16\, q\, U_0 / m\Omega^2(r_0^2+2z_0^2)$

$q_3 = q_z = 8\, q\, V_0 / m\Omega^2(r_0^2+2z_0^2)$

$a_1 = a_2 = a_r = -\dfrac{a_z}{2} \qquad q_1 = q_2 = q_r = -\dfrac{q_z}{2}$

$$\boxed{\frac{d^2 x_i}{d\tau^2} + (a_i - 2q_i \cos 2\tau)\, x_i = 0}$$

Equation de Mathieu

Forme générale de la solution (10

- Equation différentielle linéaire du 2ème ordre avec coefficients fonctions périodiques de τ, de période $T = \pi$ (Floquet)
- Si $x(\tau)$ solution, $x(\tau+\pi)$ aussi
- Soient $g(\tau)$ et $h(\tau)$ 2 solutions linéairement indépendantes de l'équation. Toute solution $x(\tau)$ peut s'écrire

$$x(\tau) = A\, g(\tau) + B\, h(\tau)$$

en particulier $g(\tau+\pi)$ et $h(\tau+\pi)$

$$\begin{cases} g(\tau+\pi) = \alpha_1\, g(\tau) + \alpha_2\, h(\tau) \\ h(\tau+\pi) = \beta_1\, g(\tau) + \beta_2\, h(\tau) \end{cases}$$

Recherche de solutions telles que

$$x(\tau+\pi) = \mu\, x(\tau)$$

$$(A\alpha_1 + B\beta_1)\, g + (A\alpha_2 + B\beta_2)\, h = \mu A g + \mu B h$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} (\alpha_1 - \mu) A + \beta_1 B = 0 \\ \alpha_2 A + (\beta_2 - \mu) B = 0 \end{cases}$$

En général, 2 valeurs possibles pour μ

Fonctions $x_1(\tau)$ et $x_2(\tau)$ (11

$$\begin{cases} x_1(\tau+\pi) = \mu_1\, x_1(\tau) \\ x_2(\tau+\pi) = \mu_2\, x_2(\tau) \end{cases}$$

Forme générale de $x_i(\tau)$ $(i=1,2)$

Posons $\mu_i = e^{\sigma_i \pi} \rightarrow \sigma_i = \frac{1}{\pi}\operatorname{Log}\mu_i$

et $\chi_i(\tau) = e^{-\sigma_i\tau} x_i(\tau)$

$$\chi_i(\tau+\pi) = e^{-\sigma_i(\tau+\pi)} \underbrace{x_i(\tau+\pi)}$$

$$= \mu_i\, x_i(\tau) = e^{\sigma_i \pi} x_i(\tau)$$

$\hookrightarrow \chi_i(\tau+\pi) = e^{-\sigma_i\tau} x_i(\tau) = \chi_i(\tau)$

$\hookrightarrow x_i(\tau) = e^{\sigma_i\tau}\chi_i(\tau) =$

$$= e^{\frac{\tau}{\pi}\operatorname{Log}\mu_i}\chi_i(\tau) = (\mu_i)^{\frac{\tau}{\pi}}\chi_i(\tau)$$

Finalement,

$$\boxed{\begin{array}{l} x_i(\tau) = (\mu_i)^{\frac{\tau}{\pi}}\chi_i(\tau) \\ \chi_i(\tau) : \text{périodique de période } \pi \end{array}}$$

Propriétés de μ_1 et μ_2 (12

① De l'équation de Mathieu, on déduit

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = 0$$

$\hookrightarrow \frac{d}{d\tau}(\dot{x}_1 x_2 - x_1\dot{x}_2) = 0 \rightarrow \dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = C^{te}$

$$\dot{x}_1(\tau+\pi)\,x_2(\tau+\pi) - x_1(\tau+\pi)\,\dot{x}_2(\tau+\pi) =$$

$$\underbrace{W(\tau+\pi)}_{\text{Wronskien}} = W(\tau)$$

Or, $x_i(\tau+\pi) = \mu_i \cdot x_i(\tau)$ et $\dot{x}_i(\tau+\pi) = \mu_i\,\dot{x}_i(\tau)$ entraînent que

$$W(\tau+\pi) = \mu_1\mu_2\, W(\tau)$$

On en déduit $\boxed{\mu_1\mu_2 = 1}$

② Réalité des coefficients de l'équation de Mathieu

Si $x(\tau)$ solution, $x^*(\tau)$ aussi

$\hookrightarrow$ L'ensemble $\{\mu_1, \mu_2\}$ doit coïncider avec l'ensemble $\{\mu_1^*, \mu_2^*\}$

Les 2 possibilités pour μ_1 et μ_2 (13

① $\mu_1 = \mu_1^*$ $\quad \mu_2 = \mu_2^*$

$\hookrightarrow \mu_1 = 1/\mu_2$ $\quad \mu_1, \mu_2$ réels

$\mu_1 = e^{\sigma\pi}$ $\quad \mu_2 = e^{-\sigma\pi}$ $\quad \sigma$ réel

Forme des solutions

$e^{\sigma\tau}\chi_1(\tau)$	$e^{-\sigma\tau}\chi_2(\tau)$

② $\mu_1 = \mu_2^*$ $\quad \mu_2 = \mu_1^*$

$\hookrightarrow \mu_2 = 1/\mu_1 = \mu_1^* \longrightarrow |\mu_1|^2 = 1$

$\mu_1 = e^{i\beta\pi}$ $\quad \mu_2 = e^{-i\beta\pi}$

β réel, compris entre 0 et π

Forme des solutions

$e^{i\beta\tau}\chi_1(\tau)$	$e^{-i\beta\tau}\chi_2(\tau)$

La 1ère situation conduit à des solutions qui divergent en général

La 2ème situation conduit à des solutions qui restent bornées

Problèmes analogues (14

① Etude des solutions de l'équation de Schrödinger pour un potentiel spatial périodique

- Solutions divergentes
  Bandes interdites
  (Etats de surface)
- Solutions bornées
  Bandes permises
  (Fonctions de Bloch)

② Equation de Schrödinger avec une pertubation dépendant du temps périodique

Hamiltonien de Floquet-Shirley

Quasiénergies

Lien avec l'hamiltonien de "l'atome habillé" (voir cours 76-77)

Signification de β pour $\beta \ll 1$ (15

Solution stable $\quad x(\tau) = e^{i\beta\tau}\,\chi(\tau)$

$\chi(\tau)$ periodique, donc développable en série de Fourier

$$\chi(\tau) = c_0 + c_1 e^{2i\tau} + \dots$$

$$x(\tau) = c_0 e^{i\beta\tau} + c_1 e^{i(2+\beta)\tau} + \dots$$

Retour à t $\qquad \Omega t = 2\tau$

$$x(t) = c_0 e^{i\beta\Omega\frac{t}{2}} + c_1 e^{i\Omega t} e^{i\beta\Omega\frac{t}{2}} + \dots$$

Si $\beta \ll 1$, $\frac{\beta\Omega}{2}$ apparait comme la fréquence $\bar\omega$ du mouvement lent apparaissant à la limite adiabatique

$$x(t) = c_0 e^{i\bar\omega t} + c_1 e^{i\bar\omega t} e^{i\Omega t} + \dots$$

Si $\beta \ll 1$, on a donc

$$\beta = 2\,\frac{\bar\omega}{\Omega}$$

Frontières entre solutions stables et instables (16

$\mu = e^{i\beta\pi}$ devient réel pour

$\beta = 0 \qquad \mu_1 = \mu_2 = 1$

$\beta = 1 \qquad \mu_1 = \mu_2 = -1$

Dans ce cas, la solution $x(\tau)$ est périodique, de période π (pour $\beta = 0$) ou 2π (pour $\beta = 1$)

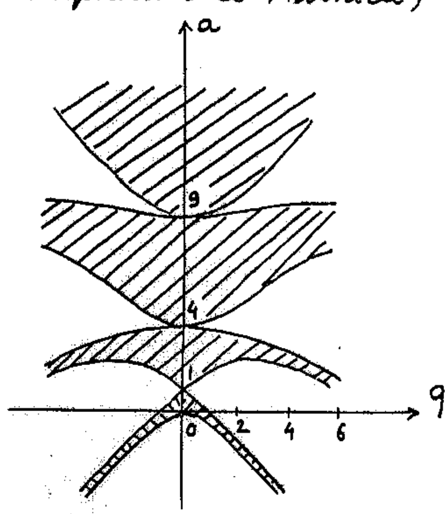
Les valeurs de a et q pour lesquelles l'équation de Mathieu

$$\ddot x + (a - 2q\cos 2\tau)\,x = 0$$

admet des solutions périodiques, de période 2π ($\mu_1 = \mu_2 = \pm 1$) tombent sur des courbes caractéristiques $f(a,q) = 0$, séparant le plan a, q en régions de stabilité et régions d'instabilité

Allure des courbes caractéristiques (17

(Déduites des relations de récurrence obtenues en portant le développement de Fourier de $x(\tau)$ dans l'équation de Mathieu)



Les régions de stabilité sont hachurées

Cas particulier $q = 0$ (18

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + a x = 0$$

$a > 0 \qquad$ Solutions stables $\quad e^{\pm i\sqrt{a}\,\tau}$

$a < 0 \qquad$ Solutions instables $\quad e^{\pm\sqrt{|a|}\,\tau}$

Pour $a^2 = 0, 1, 4, 9, 16 \dots n^2 \dots$, solution périodique de période π ou 2π ($\beta = +1$ ou -1)

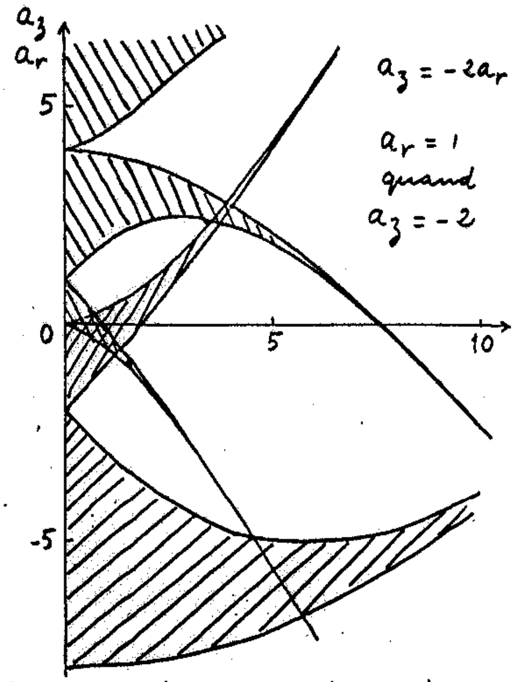
↳ Les courbes caractéristiques doivent passer en ces points

Interprétation de l'instabilité apparaissant au voisinage de $a^2 = 1$ quand q devient non nul

Si $q = 0$, oscillateur de fréquence $\Omega/2$. Quand q devient non nul, modulation de la force de rappel à la fréquence Ω

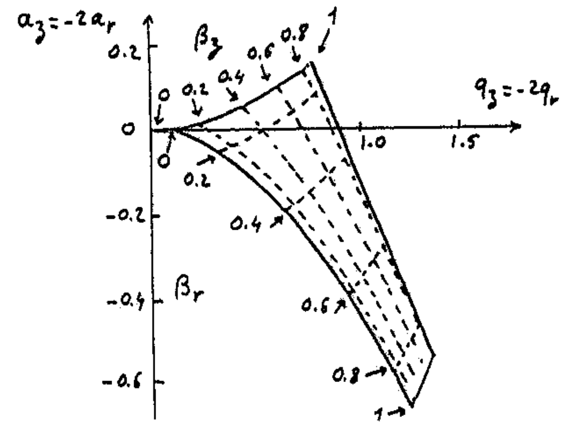
↳ Résonance paramétrique (Excitation d'une balancoire)

Domaine de stabilité de z (19
Domaine de stabilité de x, y (r)



Intersection des 2 zones de stabilité
Mouvement stable dans le piège

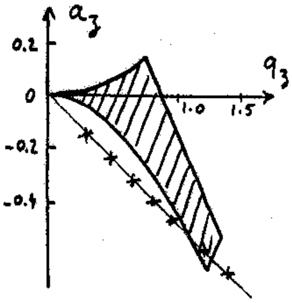
Premier domaine de stabilité (20
(le plus utilisé



Réseau de courbes "iso-β"
Chaque point correspond à un β_r et un β_z bien définis
Pour $a = 0$ (pas de d.d.p. statique, piège RF pur), on vérifie que, pour q petit, $\beta_z = 2\beta_r$, ce qui correspond au résultat $\overline{\omega}_z = 2\overline{\omega}_r$ de la limite adiabatique

Sélectivité en q/m (21

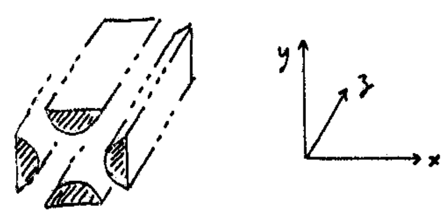
Pour un piège donné ($r_0, z_0, \Omega, U_0, V_0$ fixés), les divers points a, q correspondant à diverses valeurs de q/m se placent sur une droite passant par 0



Si l'on choisit la pente de la droite de manière à passer près d'un bord du diagramme de stabilité, le piège ne garde que les ions pour lesquels q/m a la bonne valeur

Filtre de masse (22

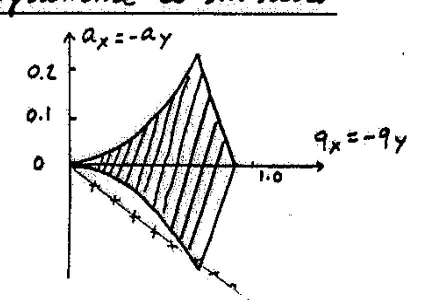
Utilisé comme analyseur de gaz résiduels
Structure des électrodes



Potentiel : $A(x^2 - y^2)/2r_0^2$

Jet d'ions envoyé le long de l'axe avec une vitesse parallèle à Oz

Diagramme de stabilité



Etude quantique (23)

Problème

- Dans tout ce qui précède, la position $\vec{r}$ et l'impulsion $\vec{p}$ de la particule sont traitées classiquement
- Les résultats concernant le domaine de stabilité et les fréquences du mouvement demeurent-ils valables lorsque $\vec{r}$ et $\vec{p}$ sont traités quantiquement ?

Réponse

Oui, parce que le potentiel quadrupolaire est quadratique en x, y, z

Importance de ne pas avoir de termes $l > 2$ dans le développement du potentiel ϕ en Y_l^m

Voir référence (11), et dernière partie de la référence (12)

Esquisse d'une démonstration (24)

- Description de l'état de la particule quantique en termes de fonction de Wigner $w(\vec{r},\vec{p})$, reliée très simplement à la matrice densité $\langle\vec{r}|\sigma|\vec{r}'\rangle$ de la particule en représentation $\vec{r}$

$$w(\vec{r},\vec{p}) = \frac{1}{h^3}\int d^3u \; e^{-i\vec{p}.\vec{u}/\hbar} F(\vec{r},\vec{u})$$

$$F(\vec{r},\vec{u}) = \langle \vec{r}+\frac{\vec{u}}{2}|\sigma|\vec{r}-\frac{\vec{u}}{2}\rangle$$

- Intérêt de $w(\vec{r},\vec{p})$
  - Description complète
  - Ressemble beaucoup à la densité classique dans l'espace des phases (Mais peut prendre des valeurs négatives : w est une densité de "quasi probabilité")

Voir Cours 1983-84 Pages VII-1 à VII-9

Equation d'évolution de w (25)

Particule dans un potentiel $V(r,t)$ pouvant dépendre de t

L'équation de Schrödinger $i\hbar\dot{\sigma} = [H,\sigma]$ conduit à l'équation d'évolution suivante pour $w(r,p)$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{M}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial}{\partial p}\right] w(r,p) = -\frac{\hbar^2}{24}\frac{d^3V}{dr^3}\frac{\partial^3}{\partial p^3} w(r,p) + \cdots$$

1er membre Même structure que l'équation d'évolution classique (vol libre + effet de la force $-\frac{dV}{dr}$)

2ème membre Corrections quantiques (proportionnelles à $\hbar$) et faisant intervenir les dérivées spatiales d'ordre 3, 5 ... du potentiel

Nulles pour un V quadratique

Cas d'un potentiel (26)

$$V(\vec{r},t) = v(\vec{r})\cos\Omega t$$

Mise de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + v(\vec{r})\cos\Omega t\;\psi$$

sous une forme équivalente, où apparaît le potentiel effectif

$$V_{eff}(\vec{r}) = \frac{(\vec{\nabla}v)^2}{4m\Omega^2}$$

Changement de variable

$$\phi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r},t)\, e^{i v(\vec{r})\sin\Omega t/\hbar\Omega}$$

Suggéré par la solution de l'équation de Schrödinger sans le terme $-\hbar^2\nabla^2\psi/2m$

Equation obtenue pour ϕ

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi + \frac{(\vec{\nabla}v)^2}{4m\Omega^2}\phi - \frac{(\vec{\nabla}v)^2}{4m\Omega^2}\phi\cos 2\Omega t + \frac{i\hbar}{m\Omega}\left(\vec{\nabla}v.\vec{\nabla}\phi + \frac{\nabla^2 v\,\phi}{2}\right)\sin\Omega t$$

Voir référence (12)

Problème : Comment évaluer l'effet des termes oscillants de la 2ème ligne ?

Comparaison entre le piège de Penning et le piège RF (27

① Le piège RF peut fonctionner sans champ magnétique $\vec{B}_0$, à la différence du piège de Penning
↳ Pas de limitations liées aux inhomogénéités spatiales et aux instabilités temporelles de B_0.

② Dans un piège de Penning, ω_c décroît comme $1/m$ et ω_z comme $1/\sqrt{m}$ quand m croît.
La condition $\omega_c \gg \omega_z$ est plus difficile à réaliser pour des électrons que pour des ions

③ Profondeur du puits effectif associé à $V_0 \cos \Omega t$ plus petite que celle du puits associé à V_0 (par un facteur $\bar{\omega}/\Omega$). Mais $V_0 \cos \Omega t$ piège dans les 3 directions !

(28

④ Le caractère effectif du potentiel piégeant dans un piège RF fait que des transferts d'énergie peuvent se produire entre le champ RF et le mouvement de l'ion lors de collisions avec un gaz étranger

Chauffage RF (analogue à l'effet Bremsstrahlung inverse pour des électrons dans un faisceau laser)

Dans un piège de Penning par contre, vrai potentiel. Pas de micromouvement rapide

En principe, on peut donc espérer descendre plus bas en température dans un piège de Penning (à condition toutefois que ce piège soit parfait)

Références

Piège de Paul

1 - W. Paul, H. Steinwedel, Z. Naturforsch 8a, 448 (1953)
2 - W. Paul, H.P. Reinhardt, U. von Zahn, Z. fur Phys. 152, 143 (1958)
3 - E. Fischer, Z. fur Phys. 156, 1 (1959)
4 - H.G. Dehmelt, Adv. At. Mol. Phys. 3, 53 (1967)
5 - R.F. Wuerker, H. Shelton, R.V. Langmuir J. Appl. Phys 30, 342 (1959)
6 - P.H. Dawson, Quadrupole mass spectrometry and its applications, Elsevier (1976)

Piège cylindrique

7 - M.N. Benilan, C. Audoin, Int. J. Mass. Spectr. Ion. Phys. 11, 421 (1973)

Equation de Mathieu

8 - A. Angot, Compléments de Mathématiques, Masson (1972), 6e éd. § 7.7
9 - Mc Lachlan, Theory and applications of Mathieu functions, Clarendon (1947)
10 - R. Campbell, Théorie générale de l'équation de Mathieu, Masson (1955)

Théorie quantique

11 - M. Combescure, A quantum particle in a radiofrequency trap
Annales Institut Henri Poincaré, à paraître
12 - R.J. Cook, D.G. Shankland, A.L. Wells, Phys. Rev. A31, 564 (1985)